وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

$$\begin{cases} 2x-3y=2 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادله و مجهول m و n (a_{ij} ها ضریب و x_{ij} ها مجهول)

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=y_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=y_m \end{cases} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

خلاصه شده $\rightarrow$ $A_{m\times n}x_{n\times 1}=y_{m\times 1}$

مثال)
$$\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=3 \\ x_1+5x_2-4x_3=10 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix}$$

عملیات سطری مقدماتی: عملیات های زیر که روی سطرهای یک ماتریس انجام می گیرد را عملیات های سطری مقدماتی می گوییم.

۱- ضرب یک سطر در عدد غیر صفر λ
۲- جمع یک سطر با λ برابر سطر دیگر ($\lambda\neq 0$)
۳- تعویض دو سطر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{5e_1} \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
سطری

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{5e_1+e_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_1 \leftrightarrow e_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس تحویل یافته سطری پلکانی: ماتریس $A_{m\times n}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $R_{m\times n}$ را تحویل یافته سطری پلکانی (اختصاری) نظیر A گوییم اگر A را با عملیات های سطری مقدماتی به ماتریس زیر تبدیل کرد

۱- اولین درایه غیر صفر هر سطر عدد یک باشد (این یک را یک پیشرو می نامیم)

Scanned by CamScanner

۲- بالا و پایین یک پیشرو همواره صفر باشد.

۳- سطرهای صفر در سطر آخر جمع می‌شوند.

مثال) کدام یک از ماتریس‌های زیر تحویل یافته سطری پلکانی است؟

الف) $\begin{bmatrix} 1 & \textcircled{1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ نیست

ب) $\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0.5 \\ 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$ ← پیشرو

دستگاه معادلات همگن: دستگاه $Ax=0$ همگن گوییم اگر $b=0$ باشد.

دستگاه معادلات ناهمگن: دستگاه $Ax=b$ ناهمگن گوییم اگر $b\neq 0$ باشد.

نکته: اگر R ماتریس تحویل یافته سطری ماتریس A باشد در اینصورت جواب‌های دستگاه‌های $Ax=0$ و $Rx=0$ برابرند.

مثال) جواب‌های دستگاه‌های زیر را بیابید.

$$A)\begin{cases} 3x_1-4x_2=0 \\ 2x_1-5x_2=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times -\frac{1}{2}c_1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2c_1+c_2\to c_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{7}c_2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{3}c_2+c_1\to c_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تنها جواب دستگاه متجانس را حل می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

$$\{(x_1-x_2-x_3,\ 2x_1-x_2,\ 2x_1-2x_2-x_3) \mid x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$$

A B $\lambda A+\mu B$

$$= \{(A, B, A+B) \mid A, B\}$$

$$\{(1,0,1),(0,1,1)\}$$

Subject ۲
Date

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow x_1=0,\ x_2=0$$

B) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3e_1+e_2\to e_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-e_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{e_2+e_1\to e_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{تابعه}]{\text{متغیر}} \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{matrix}$$

جواب کلی $= \{(x_3, 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(a, 2a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

C) $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 10x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2e_1+e_2\to e_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 12 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}e_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-e_2+e_1\to e_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} x_1 = -5x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 6x_3 - 3x_4 \end{matrix}$$

جواب کلی $= \{(-5x_3+2x_4,\ 6x_3-3x_4,\ x_3,\ x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{(-5a+2b,\ 6a-3b,\ a,\ b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

Scanned by CamScanner

نکته: دستگاه $Ax=0$ همواره جواب $x=0$ دارد.

نکته: دستگاه $A_{m\times n}x=0$ اگر $m<n$ همواره جواب غیرصفر دارد.

حل دستگاه ناهمگن: برای حل دستگاه ناهمگن $Ax=b$، ماتریس $[A:b]$ را تحویل یافته سطری پله‌ای می‌کنیم و سپس ماتریس حل می‌کنیم.

مثال) دستگاه‌های ناهمگن زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2=10 \\ 6x_1-10x_2=8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 10 \\ 6 & -10 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 6 & -10 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{-6R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -22 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2\to} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_2+R_1\to R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -17 \\ 0 & 1 & -11 \end{array}\right]$$

پاسخ حل دستگاه حال دستگاه معادل حاصل شده است

$$x_1=-17$$

$$x_2=-11$$

مثال) دستگاه‌های ناهمگن زیر را به روش عملیات های سطری حل کنید.

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=3 \\ 4x_1-x_2+x_3=5 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1+R_2\to R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$x_1=\frac{4}{3}$$

$$x_2-x_3=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{1}{3}+x_3$$

Scanned by CamScanner

Subject ۳
Date

جواب مسئله: $\{(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}+x_۳, x_۳) \mid x_۳ \in R\} = \{(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}+a, a) \mid a \in R\}$

مثال) دستگاه زیر به ازای چه همه‌ای جواب ندارد؟

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=۱ \\ x_۲+x_۳=۲ \\ ۲x_۱+۳x_۲+۳x_۳=a \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۳ & a \end{array}\right] \xrightarrow{-۲e_۱+e_۳} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۱ & -۲+a \end{array}\right] \xrightarrow[-e_۲+e_۳]{-e_۲+e_۱} \left[\begin{array}{ccc|c} ۱ & ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۴+a \end{array}\right]$$

$-۴+a \neq ۰ \rightarrow a \neq ۴$

برای اینکه جواب نداشته باشه (باید حالتی که عنصرات A مخالف صفر بگذاریم)

ماتریس معکوس پذیره ماتریس A ، $n \times m$ معکوس پذیر گوییم اگر ماتریس $n \times n$ مانند B وجود داشته باشه که $A \times B = B \times A = I_n = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ و بنابراین $B = A^{-۱}$ نمایش می‌دهیم

روش بدست آوردن معکوس ماتریس با استفاده از عملیات های مقدماتی: ماتریس $A_{n \times n}$ و ماتریس همانی I_n کنار یکدیگر می‌نویسیم با استفاده از عملیات های مقدماتی ماتریس A را به ماتریس همانی تبدیل می‌کنیم اگر همین عملیات ها را روی ماتریس همانی اثر می‌دهیم، ماتریس معکوس بدست می‌آید

مثال) معکوس ماتریس های زیر را بیابید

۱) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۸ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$

$\xrightarrow{۳e_۱+e_۲}$ $\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱۴ & ۳ & ۱ \end{array}\right]$ (هرکاری سمت چپ میکنیم روی همانی انجام می‌دهیم)

$\xrightarrow{\frac{۱}{۱۴}e_۲}$ $\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۲ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۱۴} & \frac{۱}{۱۴} \end{array}\right]$

$\xrightarrow{-۲e_۲+e_۱}$ $\left[\begin{array}{cc|cc} ۱ & ۰ & \frac{۴}{۷} & -\frac{۱}{۷} \\ ۰ & ۱ & \frac{۳}{۱۴} & \frac{۱}{۱۴} \end{array}\right]$ $= A^{-۱}$

Subject
Date

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R_1 + R_2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$-R_1$

$$\begin{bmatrix} +1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{4}R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$4R_3 + R_1$, $-R_2 + R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$-\frac{4}{5}R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

$\frac{3}{4}R_3 + R_1$, $-\frac{5}{4}R_3 + R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} = A^{-1}$$

مثال: ماتریس $A=(a_{ij})_{n\times n}$ را در نظر بگیرید. کافی است به دنبال a_{11} ام برابر است با؟

ترمینان: عامل از حذف سطر i ام و ستون j ام و با علامت A_{ij} مشخص می‌شود.

(ماتریس 1×1) $|[2]| = 2$

مثال) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ (ماتریس دو در دو)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$ (سطر یک ستون دو)

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۴
Date

تعریف (دترمینان) دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$ برابرات با $\det(A)$

$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$ (j ثابت)

$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}$ (i ثابت)

مثال) دترمینان ماتریس مقابل را بیابید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 1 = 1$$

محاسبه دترمینان با سطر اول

محاسبه دترمینان با ستون سوم $1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 2 = 1$

* ترانهاده‌ی ماتریس A، ماتریسی است که در آن سطر و ستون A با هم عوض شده است (نماد A^T)

ماتریس الحاقی: ماتریس $A_{n\times n}$ را در نظر بگیرید ابتدا بجای درایه a_{ij} مقدار $(-1)^{i+j} A_{ij}$ قرار دهید که A_{ij} کهاد وابسته به درایه a_{ij} است در اینصورت B^T را ماتریس الحاقی وابسته به ماتریس A گوییم و با نماد A^* نشان می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^* =$$

$$B = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} d & (-1)^{1+2} c \\ (-1)^{2+1} b & (-1)^{2+2} a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ترانهاده}} A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان}} B = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ترانهاده}} A^* = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

ماتریس الحاقی نظیر ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\1&1&1\end{bmatrix}$ را بیابید.

$B=\begin{bmatrix}-1&-2&-1\\-2&2&1\\5&-2&1\end{bmatrix}$ ← ترانهاده ← $A^*=\begin{bmatrix}-1&-2&5\\-2&2&-2\\-1&1&1\end{bmatrix}$

نکته: اگر A ماتریس $n\times n$ باشد آنگاه $A\times A^*=(\det A)\cdot I_n$

نتیجه: $\det A\neq 0 \Longrightarrow A\times\underbrace{\left(\frac{1}{\det A}\cdot A^*\right)}_{A^{-1}}=I_n$

نتیجه: اگر ماتریس A معکوس پذیر باشد $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*$

مثال) معکوس ماتریس $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ را بیابید.

$B=\begin{bmatrix}d&-c\\-b&a\end{bmatrix}\rightarrow A^*=\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

$\det A=ad-bc \longrightarrow A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d&-b\\-c&a\end{bmatrix}$

امتحان مشابه
مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ را تعیین علامت کنید.

الف) دستگاه $Ax=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ را حل کنید.

$$\begin{cases}x_1+2x_2=1\\x_2=2\\x_1+x_3=3\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&0&2\\1&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{-e_1+e_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&0&2\\0&-2&1&2\end{array}\right]\xrightarrow[2e_2+e_3]{-2e_2+e_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&6\end{array}\right]$$

$$x=\begin{bmatrix}-3\\2\\6\end{bmatrix}$$

PdPCO

Scanned by CamScanner

ب) ترمیان و الحاقی A را بیابید.

سارروس: $1(1-0)-0(-1)+1=1$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ترانهاده}} A^*=B^T=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}=A^{-1}$$

چون ترمیان الحاقی $A^*=A^{-1}$

$$R^n=\{(a_1,a_2,\dots,a_n)\mid a_i\in R\}$$

استقلال خطی: بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ را در نظر بگیرید این مجموعه از بردارها را مستقل گوییم

اگر (λ_i) $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n=0$ $\xrightarrow{\text{بردار}}$ فقط $\lambda_i=0$

مثال) نشان دهید بردارهای $(2,1)$ و $(4,3)$ مستقل خطی اند

$$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(3,4)=(0,0)$$

$$(\lambda_1,2\lambda_1)+(3\lambda_2,4\lambda_2)=(0,0)$$

$$(\lambda_1+3\lambda_2,\ 2\lambda_1+4\lambda_2)=(0,0) \qquad \begin{cases}\lambda_1+3\lambda_2=0\\ 2\lambda_1+4\lambda_2=0\end{cases}$$

مستقل خطی اند $\Leftarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

مثال) نشان دهید بردارهای $(2,1)(4,3)(1,1)$ مستقل خطی نیستند.

$$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(3,4)+\lambda_3(1,1)=(0,0)$$

$$(\lambda_1+2\lambda_1)+(3\lambda_2+4\lambda_2)+(\lambda_3+\lambda_3)=(0,0)$$

$$(\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3,\ 2\lambda_1+4\lambda_2+\lambda_3)=(0,0)$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -\lambda_3 \longrightarrow \lambda_3 = \lambda_2 - 3\lambda_2 = -2\lambda_2$$

$$\text{جواب} = \{(-\lambda_2, \lambda_2, -2\lambda_2) \mid \lambda_2 \in R\}$$

$v_1, \dots, v_n$ را در نظر بگیرید. این مجموعه از بردارها یک مجموعه مولد R^n است اگر $\forall v \in R^n \Rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_n$ وجود داشته باشند که $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

مثال) نشان دهید بردارهای $(1,2)$ و $(3,4)$ مولد R^2 هستند.

بردار دلخواه (a,b) را به صورت ترکیبی از آنها می‌نویسیم

$$(a,b) = \lambda_1(1,2) + \lambda_2(3,4)$$

$$(a,b) = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = a \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = b \end{cases}$$

$$-2\lambda_2 = -2a + b \rightarrow \lambda_2 = \frac{2a-b}{2}$$

$$\lambda_1 = a - \frac{3}{2}(2a-b) = -2a + \frac{3}{2}b$$

مثال) نشان دهید بردارهای $(0,1,1)$ و $(1,1,0)$ و $(1,0,1)$:

الف) مستقل‌اند

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(0,1,1) + \lambda_3(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

بردارها مستقل خطی‌اند

PAPCO

Scanned by CamScanner

ب) مولد R^3 هستند.

$$(a,b,c)=\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,1,0)$$

$$(a,b,c)=(\lambda_1+\lambda_3,\ \lambda_2+\lambda_3,\ \lambda_1+\lambda_2)$$

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=a\\ \lambda_2+\lambda_3=b\\ \lambda_1+\lambda_2=c\end{cases}$$

$$\lambda_1=\frac{a-c+b}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{b-a+c}{2}$$

$$\lambda_3=\frac{c+a-b}{2}$$

فضای برداری: مجموعه V همراه با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که یک فضای برداری روی میدان F گویند.

$\lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2$

* ۱) $\forall v_1,v_2\in V \quad v_1+v_2\in V$
۲) $\forall v_1,v_2,v_3\in V \quad (v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$
۳) $\exists 0\in V,\ \forall v\in V \quad v+0=0+v=v$
۴) $\forall v\in V.\ \exists -v\in V;\ v+(-v)=0$
۵) $\forall v_1,v_2\in V \quad v_1+v_2=v_2+v_1$
۶) $\forall \lambda\in F,\ \forall v\in V \quad \lambda v\in V$
۷) $\forall \lambda\in F\ \forall v_1,v_2\in V \quad \lambda(v_1+v_2)=\lambda v_1+\lambda v_2$
۸) $\forall \lambda_1,\lambda_2\in F,\ \forall v\in V \quad (\lambda_1+\lambda_2)v=\lambda_1 v+\lambda_2 v$
۹) $\forall \lambda_1,\lambda_2\in F,\ \forall v\in V \quad (\lambda_1\lambda_2)\cdot v=\lambda_1(\lambda_2 v)$
۱۰) $\forall v\in V \quad 1\cdot v=v$

مثال) نشان دهید $V=R^2$ یک فضای برداری $F=R$ است.

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$$

$$((a_1,a_2)+(b_1,b_2))+(c_1,c_2)=(a_1,a_2)+((b_1,b_2)+(c_1,c_2))$$

$$1\cdot(a,b)=(a,b) \qquad \lambda(a,b)$$

Scanned by CamScanner

پس R^n روی R و C^n روی C و Q^n روی Q همگی فضای برداری اند

مثال) نشان دهید $V = M_{m\times n}(R)$ یک فضای برداری روی $F=R$ است

(واثبات تمامی 8 اکسیوم را روی مثال بررسی می کنیم)

M_{mn} = ماتریس صفر : $0+0=0+0=0$

$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{m\times n} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$: ماتریس دوم

پس $M_{m\times n}(R)$ و $M_{m\times n}(Q)$ و $M_{m\times n}(C)$ همه فضای برداری هستند

مثال) نشان دهید $V = P_n(R)$ یک فضای برداری روی $F=R$ است. (P_n چند جمله ای با درجه حداکثر n و ضرایب در R)

$P_n = (a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^n) + (b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^n) =$

$(a_1+b_1) + (a_2+b_2)x + \cdots + (a_n+b_n)x^n$

تابع صفر $\leftarrow$ $0+0x+0x^2+0x^3+\cdots+0x^n = 0$: ماتریس صفر

پس $P_n(R)$ و $P_n(Q)$ و $P_n(C)$ همه فضای برداری اند

زیرفضای برداری: فضای برداری V روی میدان F را درنظر بگیرید زیرمجموعه ای $W \subseteq V$ را یک زیرفضای برداری گویند اگر خودش روی F یک فضای برداری باشد و یا عناصر $W \leq V$ عنی

می دهیم

نکته: فرض کنید V روی F یک فضای برداری باشد، در اینصورت $W \subseteq V$ یک زیرفضای برداری است

اگر و تنها اگر

1) $\forall v_1, v_2 \in W \quad v_1 + v_2 \in W$
2) $\forall v \in W, \forall \lambda \in F \quad \lambda . v \in W$

(فقط قانون 1 و 10 را می خواهیم بررسی کنیم.)

مثال) نشان دهید مجموعه $W = \{(a, 2a) \mid a \in R\}$ یک زیرفضای برداری است.

معادله: $y = 2x$

$$\left.\begin{array}{l} 1) \ (a, 2a) + (b, 2b) = (a+b, 2(a+b)) \in W \\ 2) \ \lambda(a, 2a) = (\lambda a, 2(\lambda a)) \in W \end{array}\right\} \rightarrow \text{زیرفضای برداری است}$$

مثال) نشان دهید مجموعه $\{(a+1, 2a) \mid a \in R\}$ زیرفضای برداری نیست.

مثال نقض: (عددی دهید)

$a = 2$

$1 = 1$ و $(2, 2) + (3, 4) = (5, 6) \notin W$

$$\begin{cases} a+1 = 5 \\ 2a = 6 \end{cases}$$ معادله جواب ندارد

مثال) نشان دهید $W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & \frac{1}{2}a \\ a-b & 3b \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ زیرفضای $M_2(R)$ است

شرط 1: تساوی

$$\begin{bmatrix} a_1+b_1 & \frac{1}{2}a_1 \\ a_1-b_1 & 3b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2+b_2 & \frac{1}{2}a_2 \\ a_2-b_2 & 3b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{(a_1+a_2)}_{A} + \underbrace{(b_1+b_2)}_{B} & \frac{1}{2}(a_1+a_2) \\ (a_1+a_2)-(b_1+b_2) & 3(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$

شرط 2: تساوی

$$\lambda \begin{bmatrix} a+b & \frac{1}{2}a \\ a-b & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\lambda a}_{A} + \underbrace{\lambda b}_{B} & \frac{1}{2}(\lambda a) \\ \lambda a - \lambda b & 3(\lambda b) \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

مثال) نشان دهید مجموعه $\left\{\begin{bmatrix} a^2 & a \\ 2a & a \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ زیرفضای $M_{2}(\mathbb{R})$ نیست.

مثال نقض: عضو خنثی

$a=1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5=a^2 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad a=2$

(وقتی سوال میگه زیرفضاست سایه مثال نقض بیاریم که باعضوشاخص است ولی اگر گفت زیرفضای برداری است دیگه مجموعه دلخواه مثال میزنیم و بررسی میکنیم.)

مثال: نشان دهید $W_a \leq P_3(\mathbb{R})$ که $W = \{a+(a-b)x+2bx^2+(a-b)x^3 \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

چون توان a و b یک است پس $W_a \leq P_3(\mathbb{R})$ است.

استقلال خطی: فضای برداری V بالای میدان F در نظر بگیرید، مجموعه‌ی $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$

یک مجموعه مستقل خطی گوییم اگر: $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$ صفر برداری $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ عدد

مثال) نشان دهید مجموعه‌ی $\{(1,2),(4,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ یک مجموعه مستقل خطی است.

$\lambda_1(1,2) + \lambda_2(4,0) = (0,0)$

$(\lambda_1 + 4\lambda_2, 2\lambda_1) = (0,0)$

$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ پس مجموعه مستقل خطی است

مثال) نشان دهید مجموعه $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ یک مجموعه مستقل خطی است.

Scanned by CamScanner

Subject ۸
Date

$$\lambda_1\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-1&2\\0&1\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3 & \lambda_1+2\lambda_2\\ 0 & \lambda_1+\lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{cases}\longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

مثال) نشان دهید مجموعه $\{x^2+1-x,\ 1-2x^2,\ x+1\}$ یک مجموعه مستقل در $P_3(\mathbb{R})$ است.

$$\lambda_1(x+1)+\lambda_2(2x^2-1)+\lambda_3(x-1+x^2)=0$$ چند جمله‌ای صفر

بعد از مرتب کردن بر حسب توان‌ها داریم:

$$(\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)+x(\lambda_1+\lambda_3)+x^2(2\lambda_2+\lambda_3)=0$$

$$\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}\longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

$$\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&0&1\\0&2&1\end{vmatrix}\neq 0$$ دترمینان

جواب‌ها $=0$ $\longrightarrow$

تعریف: فضای برداری V روی میدان F را در نظر بگیرید، زیرمجموعه $S=\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ را یک مجموعه مولد برای V گوییم اگر:

$$\forall v\in V\ \exists\ \lambda_1,\dots,\lambda_n\in F;\ v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$$

Scanned by CamScanner

مثال) نشان دهید مجموعه $\{(-1,2),(-1,0)\}$ یک مجموعه مولد برای R^2 است

$$v=(a,b)=\lambda_1(-1,2)+\lambda_2(-1,0)$$

$$(a,b)=(\lambda_1-\lambda_2,2\lambda_1)\qquad \begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=a\\ 2\lambda_1=b\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\lambda_1=b/2\\ \lambda_2=b/2-a\end{cases}$$

مثال) نشان دهید مجموعه $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ یک مجموعه مولد برای $M_2(R)$ است.

$$v=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\lambda_1\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}+\lambda_3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\lambda_4\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1+\lambda_2&\lambda_1+\lambda_3\\ \lambda_2+\lambda_4&\lambda_3\end{bmatrix}\qquad \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=a\\ \lambda_1=b\\ \lambda_2+\lambda_4=c\\ \lambda_3=d\end{cases}$$

مجموعه بالا یک معادلات

$\lambda_1=b$

$\lambda_2=d$

$\lambda_3=a-b$

$\lambda_4=c-a+b$

مثال) نشان دهید مجموعه $\{x-1,x^2,1+x-x^2\}$ یک مجموعه مولد برای $P_2(R)$ است.

$$v=(ax^2+bx+c)=\lambda_1(x-1)+\lambda_2(x^2)+\lambda_3(1+x-x^2)$$

$$(ax^2+bx+c)=(-\lambda_1+\lambda_3)+x(\lambda_1+\lambda_3)+x^2(\lambda_2-\lambda_3)$$

$$\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=a\\ \lambda_1+\lambda_3=b\\ -\lambda_1+\lambda_3=c\end{cases}\qquad 2\lambda_3=b+c\rightarrow\lambda_3=\frac{b+c}{2}$$

$$\lambda_2=a+\frac{b+c}{2}$$

$$\lambda_1=b-\frac{b+c}{2}$$

Scanned by CamScanner

مثال) نشان دهید مجموعه $\left\{\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ 2a+b & 4a-b \end{bmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R}\right\}$ یک مجموعه مولد برای زیرفضای $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ است.

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ 2a+b & 4a-b \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a \\ 2a+b & 4a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_2 & 3\lambda_1 \\ 3\lambda_1+\lambda_2 & 4\lambda_1-\lambda_2 \end{bmatrix}$$

$-\lambda_2 = a-b \rightarrow \lambda_2 = b-a$

$3\lambda_1 = 2a \rightarrow \lambda_1 = a$

$3\lambda_1+\lambda_2 = 2a+b$

$3\lambda_1-\lambda_2 = 4a-b$

مثال) نشان دهید مجموعه $\{(1,1),(2,2)\}$ یک مجموعه مولد برای $\mathbb{R}^2$ نیست.

$(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,2)$

$(a,b) = (\lambda_1+2\lambda_2) + (\lambda_1+2\lambda_2)$ $\quad \begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2 = a \\ \lambda_1-2\lambda_2 = b \end{cases}$

مثال نقض: $(0,1) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,2)$ ← هر دو عدد غیر یکسان

مثال نشان دهید مجموعه $\{1+2x+4x^2, 1+x+4x^2, 1+2x+2x^2\}$ یک مجموعه مولد برای زیرفضای برداری $\{(a-b+c)+(a+b)x+(4a+2c)x^2\}$ است.

$a,b,c \in \mathbb{R}$

$(a-b+c)+(a+b)x+(4a+2c)x^2 = \lambda_1(1+2x+4x^2)+\lambda_2(1+x+4x^2)$

$(a-b+c)+(a+b)x+(4a+2c)x^2 = (4\lambda_1+4\lambda_2)x^2+(2\lambda_1+\lambda_2)x+(\lambda_1+\lambda_2)$

$\begin{cases} 4\lambda_1+4\lambda_2 = 4a+4b \\ 2\lambda_1+\lambda_2 = a+b \\ \lambda_1+\lambda_2 = a-b+c \end{cases}$

$\lambda_2 = a-b+c-2b+c = a+2c-3b$

$4\lambda_1+4\lambda_2 = 4(2b-c)+4(a+2c-3b) =$

$4a+2c$

$\lambda_1 = 2b+c$

Scanned by CamScanner

یادآوری: فضای برداری V روی F را در نظر بگیرید مجموعه‌ی $\{v_1, \dots, v_n\}$ را یک پایه برای V گوییم اگر

الف) A مستقل خطی باشد. ب) A مولد V باشد.

مثال) نشان دهید مجموعه‌ی $\{(1,1), (1,-1)\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^2$ است.

بررسی مستقل بودن: $\lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) = (0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$ پس مستقل است

بررسی مولد بودن: $(a,b) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(1,-1) \rightarrow (a,b) = (\lambda_1+\lambda_2, \lambda_1-\lambda_2)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = a \\ \lambda_1 - \lambda_2 = b \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \frac{a+b}{2} \\ \lambda_2 = \frac{a-b}{2} \end{matrix}$$

پس مولد است.

مثال) نشان دهید مجموعه‌ی $\{(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0)\}$ یک مجموعه مولد برای زیرفضای $\{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ است.

بررسی مستقل بودن: $\lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$ پس مستقل است $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

بررسی مولد بودن: $v = (a,b,a+b) = \lambda_1(1,0,1) + \lambda_2(0,1,1)$

$$(a,b,a+b) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1+\lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_2 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a+b \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

تعریف (بُعد): فضای برداری V را در نظر بگیرید اگر B پایه‌ای برای فضای V باشد تعداد عناصر B را بعد V نامیم و با نماد $\dim(V)$ نمایش می‌دهیم

$\dim(R^n) = n$

$\dim(\overset{\text{ماتریس}}{M_{m\times n}}(R)) = m.n$

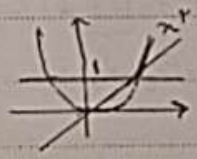
$\dim(P_n(R)) = n+1$

پایه استاندارد R^n $= \{(1,0,\dots,0), (0,\dots,0,1), \dots, (0,1,0,\dots,0)\}$

پایه استاندارد $M_{2}(R)$ $= \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

پایه استاندارد $M_{m\times n}(R)$ $= \left\{\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\0&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix}0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right\}$

پایه استاندارد $P_2(R)$ $= \{1, x, x^2\}$



پایه استاندارد $P_n(R)$ $= \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

مثال) نشان دهید مجموعه $\{x^2, x, 1\}$ یک پایه برای $P_2(R)$ است.

بررسی استقلال خطی: $\lambda_1(1)+\lambda_2(x)+\lambda_3(x^2) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ پس مستقل‌اند

بررسی مولدبودن: $ax^2+bx+c = \lambda_1(x^2)+\lambda_2(x)+\lambda_3(1)$

$\lambda_1 = a$
$\lambda_2 = b$
$\lambda_3 = c$

Scanned by CamScanner

مثال) برای زیرفضای $\{\underbrace{a}_{A}+\underbrace{(a+b)}_{B}x+\underbrace{2b}_{(B-A)2}x^2 \mid a,b\in R\}$ یک پایه بیابید.

$$\{A+Bx+2(B-A)x^2 \mid A,B\in R\}$$

$A=1, B=0 \longrightarrow 1+2x^2$

$A=0, B=1 \longrightarrow x+2x^2$

$\text{پایه} = \{1-2x^2,\ x+2x^2\}$

مثال) برای فضای برداری $\{(a,b,a+b) \mid a,b\in R\}$ یک پایه بیابید.

$\text{پایه} = \{(1,0,1),\ (0,1,1)\}$

مثال) برای فضای برداری $\{(\underbrace{a+b}_{A},\ \underbrace{2a+2b}_{2A} \mid a,b\in R\}$ پایه بیابید.

$$\{(A,2A) \mid A\in R\}$$

$\text{پایه} = \{(1,2)\}$ (0,0) نمی‌شود.

مثال) برای زیرفضای $\left\{\begin{bmatrix} \underbrace{a+b+c}_{A} & \underbrace{2a+2c}_{A+B} \\ \underbrace{a-b+2c}_{B} & \underbrace{-2b+2c}_{-2A+2B} \end{bmatrix} \mid a,b\in R\right\}$ یک پایه بیابید.

$$2a+2c=\lambda_1(a+b+c)+\lambda_2(a-b+2c)$$

$$2a+2c=(\lambda_1+\lambda_2)a+(\lambda_1-\lambda_2)b+(\lambda_1+2\lambda_2)c$$

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2=2 \\ \lambda_1-\lambda_2=0 \longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1 \\ \lambda_1+2\lambda_2=2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

$$-6b+2c = \lambda_1(a+b+c)+\lambda_2(a-b+2c)$$

$$-4b+2c = (\lambda_1+\lambda_2)a+(\lambda_1-\lambda_2)b+(\lambda_1+2\lambda_2)c$$

$$\lambda_1+\lambda_2=0$$

$$\lambda_1-\lambda_2=-4 \qquad \lambda_1=-2,\ \lambda_2=2$$

$$\lambda_1+2\lambda_2=2$$

$$\left[\begin{array}{cc} A & A+B \\ B & -2A+2B \end{array}\right] \Big| \; A,B\in R$$

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

مثال) برای زیرفضای $\{(a-b+2c)+(2a-b)x+(b+c)x^2 \mid a,b,c\in R\}$ پایه بیابید.

$$(a-b+2c)=A,\quad (2a-b)=B$$

$$b+c = \lambda_1(a-b+2c)+\lambda_2(2a-b)$$

$$b+c = (\lambda_1+2\lambda_2)a+(-\lambda_1-\lambda_2)b+(2\lambda_1)c$$

$$\lambda_1+2\lambda_2=0$$

$$-\lambda_1-\lambda_2=1$$

$$2\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=\tfrac{1}{2},\ \lambda_1=-\tfrac{3}{2}$$

صدق نکرد

$C=(b+c)x^2$ نتیجه

$$\text{پایه}_S=\{1,x,x^2\}$$

Scanned by CamScanner

مثال) مجموعه $W = \left\{ \begin{bmatrix} a-b+c & 3a+c \\ 2a+b & a+2b-c \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ را بررسی کنید.

الف) نشان دهید $W \leq M_2$ (یعنی W زیرفضای M_2 است.)

ب) نشان دهید مجموعه $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ یک پایه برای W است.

الف)

قانون ۱:
$$\begin{bmatrix} a_1-b_1+c_1 & 3a_1+c_1 \\ 2a_1+b_1 & a_1+2b_1-c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2-b_2+c_2 & 3a_2+c_2 \\ 2a_2+b_2 & a_2+2b_2-c_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \underbrace{(a_1+a_2)}_{A} - \underbrace{(b_1+b_2)}_{B} + \underbrace{(c_1+c_2)}_{C} & \underbrace{3(a_1+a_2)}_{A} + \underbrace{(c_1+c_2)}_{C} \\ \underbrace{2(a_1+a_2)}_{A} + \underbrace{(b_1+b_2)}_{B} & \underbrace{(a_1+a_2)}_{A} + \underbrace{2(b_1+b_2)}_{B} - \underbrace{(c_1+c_2)}_{C} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A-B+C & 3A+C \\ 2A+B & A+2B-C \end{bmatrix}$$

قانون ۲: $\lambda \begin{bmatrix} a-b+c & 3a+c \\ 2a+b & a+2b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{(\lambda a)}_{A} - \underbrace{(\lambda b)}_{B} + \underbrace{(\lambda c)}_{C} & \underbrace{3(\lambda a)}_{A} + \underbrace{(\lambda c)}_{C} \\ \underbrace{2(\lambda a)}_{A} + \underbrace{\lambda b}_{B} & \underbrace{(\lambda a)}_{A} + \underbrace{2(\lambda b)}_{B} - \underbrace{\lambda c}_{C} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} A-B+C & 3A+C \\ 2A+B & A+2B-C \end{bmatrix}$$

در نتیجه W زیرفضای $M_2(R)$ است.

Scanned by CamScanner

Subject ۱۲
Date

ب)

بررسی مستقل بودن: $\lambda_1\begin{bmatrix}0&3\\3&3\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$3\lambda_2=0$

$3\lambda_1+\lambda_2=0$

$3\lambda_1\neq 0$

$3\lambda_1-\lambda_2=0$

$\lambda_1=\lambda_2=0$ پس مستقل است

بررسی مولد بودن: $\lambda_1\begin{bmatrix}0&4\\4&3\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a-b+c&3a+c\\2a+b&a+3b-c\end{bmatrix}$

$-\lambda_2=a-b+c$

$3\lambda_1+3\lambda_2=2a+c$ پس مولد است برای W

$3\lambda_1=2a+b \rightarrow \lambda_1=\frac{2a+b}{3}$

$\lambda_1-\lambda_2=a+3b-c$

مثال) برای مجموعه $\begin{bmatrix}\frac{a-b+3c}{A}&\frac{a+b}{B-A}\\\underbrace{2a+3c}_{B}&\underbrace{a+b-4c}_{2B-4A}\end{bmatrix}$ یک پایه بیابید.

$\begin{bmatrix}A&B-A\\B&2B-4A\end{bmatrix}$

$\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\0&-4\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}\right\}$

تبدیل خطی: فضاهای برداری V و W روی میدان F را در نظر بگیرید. تابع $T:V\rightarrow W$ را تبدیل خطی گوییم اگر:

۱) $\forall v_1,v_2\in V \quad T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$

۲) $\forall v\in V,\ \forall \lambda\in F \quad T(\lambda\cdot v)=\lambda\cdot T(v)$

P4PCO

Scanned by CamScanner

مثال) در مورد تبدیل خطی بودن یا نبودن توابع زیر

۱) $T: R^2 \longrightarrow R$

$T(x,y) = 2x - 3y = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [2x - 3y]$

جواب) $v_1 = (x_1, y_1)$ ابتدا $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) =$

$v_2 = (x_2, y_2)$

$2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 2x_1 + 2x_2 - 3y_1 - 3y_2 =$

$T(v_1) + T(v_2)$

ثانیاً $v(x,y)$

$T(\lambda \cdot v) = T(\lambda(x,y)) = T(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x) - 3(\lambda y) = \lambda(2x - 3y) =$

$\lambda \cdot T(v)$

نکته: اگر $T: V \to W$ تبدیل خطی $\Rightarrow T(0_V) = 0_W$

۲) $T: R^2 \longrightarrow R^2$

$T(x,y) = (x - y, 2x + y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - y \\ 2x + y \end{bmatrix}$

جواب) ثانیاً: $T(v_1 + v_2) = T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(\underbrace{x_1 + x_2}_{x}, \underbrace{y_1 + y_2}_{y}) =$

$(x_1 + x_2 - y_1 - y_2, 2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2) = (x_1 - y_1, 2x_1 + y_1) + (x_2 - y_2, 2x_2 + y_2) =$

$T(v_1) + T(v_2)$

ثانیاً) $T(\lambda \cdot v) = T(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x - \lambda y, 2\lambda x + \lambda y) = \lambda(x - y, 2x + y) =$

$\lambda \cdot T(v)$

Scanned by CamScanner

Subject ۱۳
Date

ضرب a و b در ...

۳) $T: R^2 \to R$

$T(x,y) = 2x - 2y + 1$ ①

* اگه به عبارت ما عددی اضافه شد، دیگر تبدیل خطی نیست

بنابراین باید مثال نقض بیاوریم: به x و y ها عدد میدیم

بردار: $v_1 = (1,2)$

$v_2 = (3,3)$ $\quad T(v_1+v_2) = T(4,5) = 8 - 10 + 1 = -1$ $\neq$

$T(v_1) + T(v_2) = (2-4+1) + (6-9+1) = -1 - 2 = -3$ تبدیل خطی نیست

$T: R^n \to R^m$

فرم کلی تبدیل خطی:

$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1, a_{12}x_2, \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

۴) $T: P_2(x) \to R^2$

$T(a+bx+cx^2) = (a-b, c+2a) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b \\ c+2a \end{bmatrix}$ ← ضرب ماتریس‌ها

بردار) $v_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2$

همیشه باید به T بدهیم $v_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2$

۱- ب) $T(v_1+v_2) = T((a_1+a_2)+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2) = (a_1+a_2-b_1+b_2, (c_1+c_2)+2(a_1+a_2)) =$

$(a_1-b_1, c_1+2a_1) + (a_2-b_2, c_2+2a_2) = T(v_1)+T(v_2)$

۲- ب) $T(\lambda v) = T(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2) = (\lambda a - \lambda b, \lambda c + 2\lambda a) = \lambda(a-b, c+2a) =$

$\lambda \cdot T(v)$

۵) $T: M_2(R) \to P_2(R)$

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (b-2c)x + ax^2 = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & -2 & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b-2c \\ a \end{bmatrix}$$

РДРСО

Scanned by CamScanner

$v_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ ۱ب° $T(v_1+v_2) = T\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix} =$

$v_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ $a_1+a_2+((b_1+b_2)-2(c_1+c_2))x+(a_1+a_2)x^2 =$

$\underbrace{a_1+(b_1-2c_1)x+a_1x^2}_{T(v_1)} + \underbrace{a_2+(b_2-2c_2)x+a_2x^2}_{T(v_2)} = T(v_1)+T(v_2)$

۲ب° $T(\lambda.v) = T\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} = \lambda a+(\lambda b-2\lambda c)x+\lambda a x^2 =$

$v = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\lambda(\underbrace{a+(b-2c)x+ax^2}_{T(v)}) = \lambda.T(v)$

هسته تبدیل خطی: تبدیل خطی $T: V \to W$ را در نظر بگیرید، زیرفضای برداری V را هسته تبدیل T گوییم و آن را با $\ker T$ نمایش می‌دهیم. $\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$

مثال) هسته تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ که $T(x,y,z) = (x-y, 2y+z)$ را بیابید.

از عبارت نتیجه می‌شود

$\ker T = \{(x,y,z) \mid T(x,y,z) = (0,0)\} = \{(x,y,z) \mid (x-y, 2y+z) = (0,0)\} =$

$\begin{cases} x-y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \to \begin{matrix} x = y \\ z = -2y \end{matrix}$ دقت کنید معادلات از مجهولات کمتر بودند که این نتیجه را به دست آوردیم.

$\{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

جواب $= \{(y, y, -2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \{(t, t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

$y = x$ ، $z = -2y$

اضافه: $x = t$ ، $y = t$ ، $z = -2t$

Subject 15
Date

مثال) هسته تبدیل خطی $T:M_2(R)\to R^3$ که $T\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=(a-b,b+c,c-d)$ (c=a) را بیابید.

$$\ker T=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\;|\;T\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=(0,0,0)\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\;|\;(a-b,b+c,c-d)=(0,0,0)\right\}$$

$$\begin{cases}a-b=0\longrightarrow a=b\\ b+c=0\longrightarrow c=-b\\ c-d=0\longrightarrow d=c=-b\end{cases}$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}b&b\\-b&-b\end{bmatrix}\;|\;b\in R\right\}$$

تعریف: برای تبدیل خطی $T:V\to W$ بعد هسته T را پوچی T نامیده و با $N(T)$ نشان می‌دهیم.

$$\dim(\ker T)=N(T)$$

مثال) هسته تبدیل خطی زیر را بیابید.

$$T:P_2(R)\to M_2(R)$$

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix}a-b+d&b+a+c\\2a+c+d&2b+c-d\end{bmatrix}$$

$$\ker T=\left\{(a+bx+cx^2+dx^3)\;|\;T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=$$

$$\left\{(a+bx+cx^2+dx^3)\;|\;\begin{bmatrix}a-b+d&b+a+c\\2a+c+d&2b+c-d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\right\}=\left\{a+ax-2ax^2+0(x^3)\;|\;a\in R\right\}$$

$$\begin{cases}a-b+d=0\\ b+a+c=0\\ 2a+c+d=0\\ 2b+c-d=0\end{cases}\quad d=b-a,\quad c=-a-b$$

$$\begin{cases}a-b+d=0\\ b+a+c=0\end{cases}=2a+c+d$$

$$d=b-a,\quad c=-b-a,\quad c+d=-2b$$

$$a=b,\quad d=0,\quad c=-2a$$

Scanned by CamScanner

تصویر تبدیل خطی: تبدیل $T: V \to W$ علاوه‌نظر بگیرید، تصویر T برابر است با زیرفضای

$\text{Im}\, T$ عناصری هستند از W که به ازای $\{T(v) \mid v \in V\}$

مثال) تصویر تبدیلات زیر را بیابید:

۱) $T: R \to R$

$T(x) = 2x$ حل: $2x = y \to x = \frac{y}{2}$ ← ضابطه را برحسب y بنویسید

$\to \text{Im}\, T = R$

۲) $T: R^2 \to R^2$

$T(x,y) = (\underbrace{x+y}_{a}, \underbrace{2x+2y}_{2a})$ $\quad \text{Im}\, T = \{(a, 2a) \mid a \in R\}$

Im بعد = ۱ ← تعداد متغیرهای آزاد

۳) $T: R^2 \to R^2$

$T(x,y) = (\underbrace{x-y}_{a}, \underbrace{x+2y}_{b})$ $\quad \text{Im}\, T = \{(a,b) \mid a, b \in R\}$

Im بعد = ۲ ← هیچ‌متغیر آزاد

۴) $T: R^3 \to R^2$

$T(x,y,z) = (\underbrace{x-y}_{a}, \underbrace{y+z}_{b}, \underbrace{2x+2z}_{2a+2b})$

$2x+2z = \lambda a + \mu b = \lambda(x-y) + \mu(y+z) = \lambda x + (-\lambda+\mu)y + \mu z$

$\begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 2 \end{cases}$

$\text{Im}\, T = \{(a, b, 2a+2b) \mid a, b \in R\}$

۴) $T: M_2(R) \to P_1(R)$

$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \underbrace{(a+b)}_{A} + \underbrace{(c+d)}_{B}x + \underbrace{(2a+2b+2c+2d)}_{2A+2B}x^2$

PqPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۱۵
Date

$$Im\,T=\{A+Bx+(2A+2B)x^2 \mid A,B\in R\}$$
$$Im \text{ بعد} = 2$$

تعریف: بعد $Im\,T$ را رتبه T نامیم و با نماد $RankT$ نمایش می‌دهیم.

قضیه: اگر $T: V\to W$ تبدیل خطی باشد آنگاه: $N(T)+RankT=\dim V$

تعریف: تبدیل خطی $T: V\to W$ را پوشا گوییم اگر $Im\,T=W$

نکته: اگر $T: V\to W$ تبدیل خطی باشد T پوشاست $\iff \dim V=rankT$

یک‌به‌یک: تبدیل خطی $T: V\to W$ یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر $T(v_1)=T(v_2)\to v_1=v_2$

نکته: $T: V\to W$ یک‌به‌یک $\iff N(T)=0$

مثال) تابع زیر را در نظر بگیرید $T: P_2(R)\to M_{2\times 2}(R)$

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{bmatrix} a & b-c \\ a+2b-2c & 3c \end{bmatrix}$$

Ker را اینجا در نظر بگیرید

Img را در نظر بگیرید

$\dim V=3$ پایه‌ها

الف) نشان دهید T تبدیل خطی است.

برای $v_1=(a_1+b_1x+c_1x^2)$ و $v_2=(a_2+b_2x+c_2x^2)$:

$$T(v_1+v_2)=T(a_1+a_2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)x^2)=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & (b_1+b_2)-(c_1+c_2) \\ a_1+a_2+2(b_1+b_2)-2(c_1+c_2) & 3(c_1+c_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_1+2b_1-2c_1 & 3c_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_2 & b_2-c_2 \\ a_2+2b_2-2c_2 & 3c_2 \end{bmatrix}=T(v_1)+T(v_2)$$

($T(v_1)$ و $T(v_2)$)

برای $v=ax+bx+cx^2$ و $\lambda\in R$:

$$T(\lambda\cdot v)=T(\lambda a+\lambda bx+\lambda cx^2)=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b-\lambda c \\ \lambda a+2\lambda b-2\lambda c & 3\lambda c \end{bmatrix}=\lambda\cdot T(v)$$

Scanned by CamScanner

ب) هسته T را بدست آورید.

$$\ker T = \{(a+bx+cx^2) \mid T(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\} = \{(a+bx+cx^2) \mid \begin{bmatrix} a & b-c \\ a+2b-2c & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b-c=0 \\ 2c=0 \\ a+2b-2c=0 \end{cases} \qquad a=b=c=0$$

$$\ker T = 0$$

ج) تصویر و رتبه T را بدست آورید.

$$\text{Rank } T = \dim V - N(T) \longrightarrow \text{Rank } T = 3 - 0 = 3$$

د) خروجی یک به یک بودن و پوشایی T بحث کنید.

$$\text{Rank } T = 3 \neq \dim M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{پوشا نیست}$$

یک به یک است چون هسته برابر صفر است.

ه) با یافتن ماتریس تبدیل در پایه استاندارد را بدست آورید.

تصویر

$$\text{Im } T = \left\{ \begin{bmatrix} \overbrace{a}^{A} & \overbrace{b-c}^{B} \\ \underbrace{a+2b-2c}_{A+2B} & \underbrace{2c}_{C} \end{bmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ A+B & C \end{bmatrix} \mid A,B,C \in \mathbb{R} \right\}$$

جواب این سوال:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{matrix}$$

ماتریس تبدیل خطی: فرض کنید $T: V \to W$ تبدیل خطی باشد و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V و $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ پایه‌ای برای W باشد. داریم:

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m \quad (a_{ij} \in F)$$

PQPCOL نرم‌افزار

Scanned by CamScanner

ماتریس a_{ij} بالا را نمایش ماتریسی تبدیل T در پایه V نامیم و با نماد $[T]_{BB'}$ نمایش می‌دهیم.

مثال) نمایش ماتریسی تبدیل مقابل را در پایه $B=\{\underbrace{(1,-1)}_{v_2},\underbrace{(1,1)}_{v_1}\}$ و $B'=\{\underbrace{(1,0)}_{w_1},\underbrace{(1,1)}_{w_2}\}$ بدست آورید

$$T: R^2 \to R^2$$
$$T(x,y)=(x-y,\ 2x+3y)$$

جواب) $T(v_1)=T(1,1)=(0,5)=a_{11}(1,0)+a_{21}(1,1)$

$$(0,5)=(a_{11}+a_{21},\ a_{21})$$
$$a_{11}=-5,\ a_{21}=5$$

می‌شود ستون اول ماتریس

$$T(v_2)=T(1,-1)=(2,-1)=a_{12}(1,0)+a_{22}(1,1)$$
$$(2,-1)=(a_{12}+a_{22},\ a_{22})$$
$$a_{22}=-1$$
$$a_{12}=3$$

$$[T]_{BB'}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$$

مثال) نمایش ماتریسی تبدیل خطی مقابل به $B=\{(1,0),(0,1)\}$ و $B'=\{(1,0),(0,1)\}$ را بدست آورید.

$$T: R^2 \to R^2$$
$$T(\underbrace{x,y}_{B=e_2})=(\underbrace{x-y,\ 2x+3y}_{B'=e_2})$$

$$T(1,0)=a_{11}(1,0)+a_{21}(0,1) \Rightarrow (1,2)=(a_{11},a_{21}) \quad a_{11}=1,\ a_{21}=2$$

$$T(0,1)=a_{12}(1,0)+a_{22}(0,1) \to (-1,3)=(a_{12},a_{22}) \quad a_{12}=-1,\ a_{22}=3$$

$$[T]_{BB'}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

نکته: اگر $T: V \to W$ تبدیل خطی باشد و $\dim V = n$ و $\dim W = m$ باشد در اینصورت ماتریس $[T]_{BB'}$ ماتریس $m \times n$ است.

مثال) مطلوب است یافتن ماتریس متقابل که $B = \{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\}$ و $B' = \{(1,-1), (1,1)\}$

$T: M_{2}(R) \to R^2$

$T\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = (a-b, c+2d+a)$

$T\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix} = (0,1) = a_{11}(1,1) + a_{21}(-1,1) \to \begin{cases} a_{11} - a_{21} = 0 \\ a_{11} + a_{21} = 1 \end{cases} \quad a_{11} = a_{21} = \frac{1}{2}$

$T\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix} = (0,3) = a_{12}(1,1) + a_{22}(-1,1) \to \begin{cases} a_{12} - a_{22} = 0 \\ a_{12} + a_{22} = 3 \end{cases} \quad a_{12} = a_{22} = \frac{3}{2}$

$T\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = (1,1) = a_{13}(1,1) + a_{23}(-1,1) \to \begin{cases} a_{13} - a_{23} = 1 \\ a_{13} + a_{23} = 1 \end{cases} \quad a_{13} = 1, \; a_{23} = 0$

$T\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} = (2,0) = a_{14}(1,1) + a_{24}(-1,1) \to \begin{cases} a_{14} - a_{24} = 0 \\ a_{14} + a_{24} = 2 \end{cases} \quad a_{14} = a_{24} = 1$

$$[T]_{BB'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

نکته: فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند و $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ پایه‌ای برای V باشد و $w_1, \dots, w_n$ بردارهایی از W باشند. در اینصورت تنها و تنها یک تبدیل خطی منحصر به فرد مانند $T: V \to W$ موجود است که $T(v_i) = w_i$ $(i = 1, \dots, n)$

Subject: 10
Year. Month. Date. ( )

روش بعد آوردن ضابطه کلی بالا: هر دلخواه $v \in V$ را به صورت زیر

$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \Rightarrow T(v) = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n)$: نمایش می‌دهیم

مثال) تبدیل خطی $T: R^2 \to R$ بعد آوردید که $T(1,1) = 2$ و $T(2,3) = 1$ باشد.
پایه ۲ پایه ۱
اول عضو دلخواه از R^2 برحسب پایه داریم

$\tilde{B} = \{(1,1), (2,3)\}$ پایه ، جواب

$(x,y) \in R^2$

$(x,y) = \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,3)$

$(x,y) = (\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_1 + 3\lambda_2)$ $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = y \end{cases} \to \begin{matrix} \lambda_2 = y - x \\ \lambda_1 = 3x - 2y \end{matrix}$

$T(x,y) = (y-x)T(1,1) + (3x-2y)T(2,3)$

$T(x,y) = (y-x)2 + (3x-2y)1 = 2y - 2x + 3x - 2y = x + 0$

مثال) تبدیل خطی $T: P_2(R) \to R^2$ بعد آوردید که $T(1+x) = (1,1)$ و $T(x+x^2) = (1,0)$ ،
چند جمله‌ای

$T(1+x^2) = (2,1)$.

وقتی دترمینان ماتریس مختلف صفر شود داریم

$ax^2 + bx + c = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(1+x^2) = x^2(\lambda_2 + \lambda_3) + x(\lambda_2 + \lambda_1) + (\lambda_3 + \lambda_1)$

$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_2 + \lambda_1 = b \\ \lambda_3 + \lambda_1 = c \end{cases}$ از هم کم کنیم $\begin{matrix} \lambda_2 - \lambda_1 = a - b \\ \lambda_2 + \lambda_1 = c \end{matrix}$ جمع کنیم $\Rightarrow 2\lambda_2 = a - b + c$

$\lambda_2 = \frac{a-b+c}{2}$

$\lambda_1 = \frac{2c - a + b - c}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$

$\lambda_3 = \frac{2a - a + b - c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$T(ax^2+bx+c) = \frac{-a+b+c}{2}T(1+x) + \frac{b+a-c}{2}T(x+x^2) + \frac{a-b+c}{2}T(1+x^2)$

$T(ax^2+bx+c) = \frac{-a+b+c}{2}(1,1) + \frac{b+a-c}{2}(1,0) + \frac{a-b+c}{2}(2,3)$

نکته: فرض کنید $T: V \to V$ تبدیل خطی باشد و B یا پایه برای V باشد در اینصورت $[T]_B = P^{-1}(T)P$ استاندارد

که ستونهای P عناصر B هستند

مثال)

$T: R^2 \to R^2$

$T(x,y) = (x-y, x-y)$

پایه استاندارد $B = \{(1,0),(0,1)\}$

حل:

$[T]_{B,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$B' = \{(1,2),(3,-1)\}$

$[T]_B = P^{-1}(T)P$

$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

مثال)

$T: P_2(R) \to P_1(R)$

ضریب x و a

$T(a+bx+cx^2) = a-b+(b-c+a)x+cx^2$

$B = \{1+x, x+x^2, x^2+1\}$

$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ در پایه استاندارد

مختصات: فضای برداری V با پایه $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ در نظر بگیرید در اینصورت برای هر بردار دلخواه

$\alpha \in V$ داریم: $\alpha = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ که λ_i ها یکتا وجود دارد

Scanned by CamScanner

در فضای n بایی $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ مختصات بردار α در پایه B را بیابید و با نماد $[\alpha]_B$ نمایش می دهیم

مثال) مختصات بردار $(1,3)$ در پایه $B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$ بدست آورید.

$$(1,3) = \underbrace{1}_{\lambda_1}(1,0) + \underbrace{3}_{\lambda_2}(0,1)$$

$$[(1,3)]_{B_1} = (1,3)$$

مثال) مختصات بردار $(1,3)$ در پایه $B_2 = \{(1,-1), (1,1)\}$ بدست آورید

$$(1,3) = \underbrace{2}_{\lambda_1}(1,1) + \underbrace{-1}_{\lambda_2}(1,-1)$$

$$\Rightarrow (1,3) = (\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix}$$

جواب این مثال با توجه به فرمول صفحه بعد:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = P^{-1}[v]_{B'}$$

مثال) مختصات بردار $2x^2 + 3x + 2$ در پایه $B_3 = \{1, x, x^2\}$ بدست آورید

$$2 - x + 3x^2 = \lambda_1(1) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x^2)$$

$$\left[2 - x + 3x^2\right]_{B_3} = (2, -1, 3)$$

روش تشتی:

$$[v]_B = P^{-1}[v]_{B'}$$

$$\left[2 - x + 3x^2\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

مثال) مختصات بردار $2 - x + 3x^2$ در پایه $B_4 = \{1+x, x+x^2, x^2+1\}$ بدست آورید

$$2 - x + 3x^2 = \lambda_1(1+x) + \lambda_2(x+x^2) + \lambda_3(x^2+1) = (\lambda_1 + \lambda_3) + (\lambda_1 + \lambda_2)x + (\lambda_2 + \lambda_3)x^2$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = -4$$

$$\lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_3 = 3$$

$$\left[2 - x + 3x^2\right]_{B_4} = (-1, 0, 3)$$

Scanned by CamScanner

نکته: اگر B پایه استاندارد و B' پایه غیراستاندارد برای فضای برداری V باشد، در اینصورت داریم $v \in V$

$[v]_B = P[v]_{B'}$ یعنی $[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$ که ستونهای P عناصر B' هستند، در نتیجه

جمع دو زیرفضای برداری: فرض کنید V یک فضای برداری و V_1 و V_2 زیرفضای برداری V باشند

در اینصورت تعریف می‌کنیم: $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$

مثال) اگر $V = \mathbb{R}^2$، $V_1 = \{(a,0) \mid a \in R\}$، $V_2 = \{(0,a) \mid a \in R\}$ مطلوبست $V_1 + V_2$:

$V_1 + V_2 = \{(a,0) + (0,b) \mid a,b \in R\} = \{(a,b) \mid a,b \in R\} = \mathbb{R}^2$

مثال) اگر $V = R^2$، $V_1 = \{(2a,a) \mid a \in R\}$، $V_2 = \{(4b,2b) \mid b \in R\}$ مطلوبست $V_1 + V_2$:

$V_1 + V_2 = \{(2a,a) + (4b,2b) \mid a,b \in R\} = \{(\underbrace{2a+4b}_{A}, \underbrace{a+2b}_{A/2}) \mid a,b \in R\}$

جمع مستقیم

$\{(A, A/2) \mid A \in R\} \longrightarrow x = 2y$

مثال) مطلوبست $V_1 \oplus V_2$ اگر $V_1 = \{(a,2a,-2a) \mid a \in R\}$، $V_2 = \{(2b,b,3b) \mid b \in R\}$، $V = R^3$

$V_1 \oplus V_2 = \{(\underbrace{a+2b}_{x}, \underbrace{2a-b}_{y}, -2a+3b) \mid a,b \in R\}$

جمع مستقیم

$-2a+3b = \lambda_1(a+2b) + \lambda_2(2a-b) = (\lambda_1 + 2\lambda_2)a + (2\lambda_1 - \lambda_2)b$

$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2 & \lambda_1 = 1 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 = 3 & \lambda_2 = -1 \end{cases}$ معادله صفحه این $= x - 3y$

Scanned by CamScanner

Subject 19
Date

جمع مستقیم: فرض کنید V فضا و V_1, V_2 دو زیرفضای V هستند. V را جمع مستقیم V_1 و V_2 گوییم اگر $V = V_1 + V_2$ و $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ و بنابراین می‌نویسیم $V = V_1 \oplus V_2$

تعریف: فرض کنید $T: V \to V$ تبدیل خطی و $W \leq V$ باشد، W را T-پایا گوییم اگر: $T(W) \subseteq W$

نکته: اگر $V = V_1 \oplus V_2$، B_1 پایه‌ای برای V_1 و B_2 پایه‌ای برای V_2 باشد، $B_1 \cup B_2$ پایه‌ای برای V است.

نکته: $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

نکته: اگر $V = V_1 \oplus V_2$ و $T: V \to V$ تبدیل خطی و V_1 و V_2 T-پایا باشند و B_1 پایه‌ای برای V_1 و B_2 پایه‌ای برای V_2 باشد بدین‌صورت

$$[T]_{B_1 \cup B_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n\times n} & 0 \\ 0 & B_{m\times n} \end{bmatrix}$$

مثال) تبدیل خطی $T: R^3 \to R^3$ و $T(x,y,z) = (2x-y, x+y, 2z)$ را در نظر بگیرید

$V_1 = \{(a,b,0) \mid a,b \in R\}$

$V_2 = \{(0,0,c) \mid c \in R\}$

$B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$

$B_2 = \{(0,0,1)\}$

$V_1 \oplus V_2 = R^3$

$T(1,0,0) = 2(1,0,0) + (0,1,0) = (2,1,0)$

$T(0,1,0) = (-1,1,0)$

$T(0,0,1) = (0,0,2)$

V_1 و V_2، T-پایا هستند

$$(T)_{B_1 \cup B_2} = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}^{A_{n\times n}} & 0 \\ 0 & \underbrace{[2]}_{B_{m\times n}} \end{bmatrix}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

تعریف: تبدیل خطی $T: V \to V$ را در نظر بگیرید، اسکالر λ را مقدار ویژه‌ی T گوییم اگر

$\exists 0 \neq v \in V \text{ و } T(v) = \lambda v$ ، مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای ویژه وابسته به T گوییم و $\{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$

را فضای ویژه وابسته به مقدار ویژه λ گوییم و با نماد W_λ نمایش می‌دهیم.

روش بدست آوردن مقادیر ویژه تبدیل T: ابتدا نمایش ماتریسی تبدیل T را در پایه استاندارد بنویسید

$(A = [T]_{\text{استاندارد}})$ در اینصورت مقادیر ویژه برابر است با ریشه‌های چند جمله‌ای $P_A(x) = |xI_{n\times n} - A|$

این چند جمله‌ای را چند جمله‌ای مشخصه T گوییم.

مثال) تبدیل خطی $T: R^2 \to R^2$ که $T(x,y) = (3y, 5x)$ را در نظر بگیرید مطلوبست:

الف) چند جمله‌ای مشخصه: $[T]_{\text{استاندارد}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2} \to P_t(x) = \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \right|$

$$P_T(x) = \begin{vmatrix} x & -5 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x^2 - 15$$

ب) مقادیر ویژه: (ریشه‌های معادله بالا را بدست می‌آوریم) $x^2 - 15 = 0 \to x = \pm\sqrt{15}$

ج) بردار ویژه و فضای ویژه $W_{\lambda=\sqrt{15}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;\middle|\; \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{15} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} =$

$$\begin{cases} 5y = \sqrt{15}x \\ 3x = \sqrt{15}y \end{cases} \to \begin{matrix} y = \frac{\sqrt{15}}{5}x \\ y = \frac{3}{\sqrt{15}}x \end{matrix} \qquad \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \frac{\sqrt{15}}{5}x \end{bmatrix} \;\middle|\; x \in R \right\}$$

(حتماً دستگاه باید حساب شود صفر داشته باشد.)

Scanned by CamScanner

Subject ۲۰
Date

$$W_{\lambda=-\sqrt{15}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\sqrt{15} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -\frac{\sqrt{15}}{5}x \end{bmatrix} \middle| x \in R \right\}$$

$$\begin{cases} 5y = -\sqrt{15}x \\ 3x = -\sqrt{15}y \end{cases} \rightarrow y = -\frac{\sqrt{15}}{5}$$

بردار ویژه وابسته به $\lambda = \sqrt{15}$: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{15} \end{bmatrix}$ (باید گفته شود)

بردار ویژه وابسته به $\lambda = -\sqrt{15}$: $\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{15}}{5} \end{bmatrix}$

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

الف) چند جمله‌ای مشخصه

$$P_T(x) = \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix} \right| = x^2 - 2x + 1$$

ب) مقادیر ویژه $\lambda = 1$ ← $x^2 - 2x + 1 = 0$

ج) بردار ویژه و فضای ویژه

$$W_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in R \right\}$$

$2x - y = x$

$x = y$

بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه یک: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

مثال) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید:

۱) چند جمله‌ای مشخصه

$$P_T(x) = \left| x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} x-5 & 6 & 6 \\ 1 & x-4 & -2 \\ -3 & 6 & x+4 \end{bmatrix} \right| =$$

$$(x-1)^2(x-2) = (x-4)2 + 2(6+2(x-4)) - 6(x+4-6) - 5(x^2-14+12) - x$$

۲) مقادیر ویژه

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$

PARCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

۳) بردار ویژه و فضای ویژه

$$W_{\lambda=2}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}5&-4&-4\\1&4&2\\3&-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2y+2z\\y\\z\end{bmatrix}\;\middle|\;y,z\in R\right\}$$

(بعد فضای ویژه = ۲)

$$\begin{cases}5x-4y-4z=2x\\x+y+2z=2y\\3x-4y-4z=2z\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}3x-4y-4z=0\\-x+y+2z=0\\3x-4y-4z=0\end{cases}$$

بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه $\lambda=2$: $\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$

$$W_{\lambda=1}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{bmatrix}5&-4&-4\\1&4&2\\3&-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}z\\-z\\z\end{bmatrix}\;\middle|\;z\in R\right\}$$

$$\begin{cases}5x-4y-4z=x\\x+y+2z=y\\3x-4y-4z=z\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}4x-4y-4z=0\\-x+4y+2z=0\\3x-4y-5z=0\end{cases}\xrightarrow{\times 2}\begin{cases}4x-4y-4z=0\\-2x+4y+4z=0\end{cases}$$

$$2x-2z=0$$

$$x=z,\ y=-z$$

بردار ویژه وابسته به مقدار $\lambda=1$: $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

۱) چند جمله‌ای مشخصه

$$P_A(x)=\left|x\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}x-2&0&-4\\0&x-2&0\\-4&0&x-2\end{vmatrix}$$

$$=(x-2)^3-16=(x-2)\left((x-2)^2-16\right)+0(0-0)-(x-2)(0-0)=0$$

۲) مقادیر ویژه

$$(x-2)\left((x-2)^2-16\right)=0$$

$$x-2=0\longrightarrow x=2$$

$$(x-2)^2=16\longrightarrow x-2=\pm 4\begin{cases}x=6\\x=-2\end{cases}$$

PdPCO

Scanned by CamScanner

Subject: ۲۱
Year. Month. Date. ( )

۳- بردار ویژه و فضای ویژه

$$W_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \middle| y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} 2x + 4z = 2x & 4z = 0 \to z = 0 \\ 2y = 2y \\ 4x + 2z = 2z & 4x = 0 \to x = 0 \end{cases}$$

بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه ۲: $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

تعریف: تبدیل خطی $T: V \to V$ را در نظر بگیرید، در اینصورت T را قطری شدنی گوییم اگر پایه‌ای مانند B برای V موجود باشد که $[T]_B$ ماتریس قطری شود.

تعریف معادل: تبدیل خطی $T: V \to V$ را قطری شدنی گوییم اگر ماتریسی مانند P یافت شود که $P^{-1}AP$ قطری شود (A نمایش ماتریسی T در پایه استاندارد است.)

قضیه: تبدیل خطی $T: V \to V$ قطری شدنی است اگر:

۱- $P_T(x)$ به طور کامل تجزیه شود.

۲- $\dim W_{\lambda_1} + \cdots + \dim W_{\lambda_k} = \dim V$

مثال) در مورد قطری شدنی یا نشدنی تبدیلات زیر بحث کنید.

۱) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x, y) = (3y, 5x)$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$P_T(x) = x^2 - 10$

$\lambda_1 = \sqrt{10}$ $\quad \dim W_{\lambda_1} = 1$

$\lambda_2 = -\sqrt{10}$ $\quad \dim W_{\lambda_2} = 1$ $\quad \dim V = 2$

$1+1=2$ پس تبدیل قطری شدنی است

۲) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$P_A(x) = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{(x-1)^2}$ $\quad 1 \neq 2$ قطری شدنی نیست

$W_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \mid x \in R \right\}$

۳) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -4 & -4 \end{bmatrix}$

$P_A(x) = (x-2)^2(x-1)$

$W_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid y, z \in R \right\}$ $\quad \overbrace{W_\lambda}^{2} \quad \overbrace{P_A}^{2}$ $\quad 2+1=3$ قطری شدنی است.

نکته: اگر T تبدیل خطی قطری شدنی باشد، داریم $V = W_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus W_{\lambda_K}$

اگر B_1 پایه‌ای برای W_{λ_1} تا ... B_K پایه‌ای برای W_{λ_K} باشد، $B = B_1 \cup \dots \cup B_K$ پایه‌ای است

در آن تبدیل قطری شدنی است یا به صورت معادل $P^{-1}(T)P$ قطری شدنی است که ستون‌های P عناصر B هستند.

Scanned by CamScanner

Subject ۴۲
Date

مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}$ را قطری کنید. (مثال دو صفحه قبل)

۱) چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه را بدست آورید.

$\lambda = 2, -2, 6$

۲) فضای ویژه وابسته به هر مقدار ویژه را بدست آورید.

$$W_{\lambda=2} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\0\\z\end{bmatrix} \mid x,z \in R\right\}$$

$$W_{\lambda=-2} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\0\\-x\end{bmatrix} \mid x \in R\right\}$$

$$\begin{cases} 2x+4z=-2x \\ 2y=-2y \\ 4x+2z=-2z \end{cases} \longrightarrow y=0,\ x=-z$$

$$W_{\lambda=6} = \left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}x\\0\\x\end{bmatrix} \mid x \in R\right\}$$

$$\begin{cases} 2x+4z=6x \\ 2y=6y \\ 4x+2z=6z \end{cases} \qquad \begin{matrix} x=z \\ y=0 \end{matrix}$$

۳- آیا ماتریس قطری شدنی است؟

$P_A(x) = (x-2)(x+2)(x-6)$

چند جمله‌ای مشخصه کامل تجزیه شد و $\dim W_{\lambda_1} + \dim W_{\lambda_2} + \dim W_{\lambda_3} = 1+1+1 = 3$ پس ماتریس قطری شدنی است.

۴- ماتریس ماتریس P بیابید که $P^{-1}AP$ قطری شود.

$$B_1 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$B_2 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}$$

$$B_3 = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$P = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&-1&1\end{bmatrix} \qquad B = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

۱) چند جمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه
۲) فضای ویژه وابسته به هر مقدار
۳) آیا ماتریس قطری شدنی است؟
۴) ماتریس مانند P بیابید که $P^{-1}AP$ قطری شود

مقادیر ویژه ← چند جمله‌ای مشخصه

$P_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$W_{\lambda=1} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in R \right\}$

$W_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 2y+2z \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| y,z \in R \right\}$

پایه $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$P_1(x)=(x-1)(x+2)^2=(x-1)(x^2+4x+4)=x^3+3x^2-4$

ماتریس همراه $\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}$

* برای یافتن ماتریس P باید بردار α را بیابیم که A - پوچساز آن $P_1(x)$ باشد.

$P(x)=(x-1)(x+2)^2$

- باید بررسی کنیم که A - پوچساز α ها $(x-1)(x+1)$ یا $(x+2)^2$ نباشد.

مثلاً $\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

$(A-I)\alpha=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 4\\ 0 & -3 & 0\\ 4 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\4\end{bmatrix}$

یعنی α شناسی انتخاب نکردید.

بررسی می‌کنیم که α مناسب برابرات با $\alpha=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ درنتیجه $P=(\alpha, A\alpha, A^2\alpha)$ است

Scanned by CamScanner

Subject
Date

غایش ② = $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus [1] \oplus [1]$

مثال) اگر $p_A(x)=(x-1)^2(x^2+x+1)^2$ و $m_A(x)=(x-1)(x^2+x+1)$ مطلوبست تمام حالتهای ممکن غایش کویا برای A.

حل: $p_1(x)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$

$p_2(x)=(x-1)(x^2+x+1)$

غایش کویا = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

مثال) $p_A(x)=(x-2)^3(x^2+1)^2$ و $m_A(x)=(x-2)(x^2+1)$ تمام حالات های ممکن در غایش کویا را بنویسید.

حل: $p_1(x)=(x-2)(x^2+1)=x^3-2x^2+x-2$ ← m_A هست

$p_2(x)=(x-2)(x^2+1)$

$p_3(x)=(x-2)$

غایش کویا = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus [2]$

مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، مطلوبست ماتریسی مانند P که $P^{-1}AP$ غایش A در فرم کویا باشد.

$p(x)=(x-1)(x+2)^2$

$m(x)$ → $(x-1)^{①}(x+2)^{①}$

→ $(x-1)^{①}(x+2)^{②}$ ✓ مینمال

$A^2+A-2I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

PqPco

Scanned by CamScanner

است. مثلاً: $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

مثال) $P_1(x)$ با A-پوچساز α برابر است.

$$(A-I)\alpha = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ A پوچساز نیست. $x=1$

↓

A پوچساز α برابر است با $P_1(x)$

$(A-2I)\alpha \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ A پوچساز نیست $x-2$

حال بردار β را به گونه‌ای بیابید که A-پوچساز آن $P_2(x)$ شود، یعنی:

$(A-2I)\beta = 0$

$A\beta = 2\beta \longrightarrow$ β برابر بردار ویژه وابسته به مقدار ویژه ۲ است

$$W_{\lambda=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ -x \\ 3x \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

مثال)

$$\begin{bmatrix} A_{n\times n} & O_{n\times m} \\ O_{m\times n} & B_{m\times m} \end{bmatrix} = A \oplus B$$ تعاریف

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال) اگر $P(x) = (x-1)^4$, $m(x) = (x-1)^2$ مطلوب تمام عامل‌های ناوا ممکن برای A

(۱) $\begin{cases} P_1(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \\ P_2(x) = (x-1)^2 \end{cases}$

(۲) $\begin{cases} P_1(x) = (x-1)^2 \\ P_2(x) = (x-1) \\ P_3(x) = (x-1) \end{cases}$ عامل‌ها

(۳) $= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ماتریس A در فرم کوپا = $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \quad [2] \end{bmatrix}$

معلومست تمام حالت های ممکن فرم کوپا برابر ماتریس A که $P_A(x)=(x-1)^2(x^2+1)$

۱) $m_A(x)=(x-1)(x^2+1)$

$P_1(x)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$

$P_2(x)=(x-1)$

ماتریس A در فرم کوپا = $\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \quad 0 \quad 1 \end{bmatrix}$

۲) $m_A(x)=(x-1)^2(x^2+1)$

$P_1(x)=(x-1)^2(x^2+1)=(x^2-2x+1)(x^2+1)=x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$ داده شده. ماتریس ماشه P بیابید که $P^{-1}AP$ ماتریس A در فرم تجزیه کوپا باشد؟

حل:

حالت: $P_A(x)=(x-1)(x-2)^2$

$m_A(x)=(x-1)(x-2)$

$P_1(x)=(x-1)(x-2)$
$P_2(x)=(x-2)$ ⟶ ماتریس در فرم کوپا = $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

بیابید بردار P ها ابتدا α ای پیدا می کنیم که A و $P_1(x)$ چیساز آن باشد سپس از رابطه بردار $\{\alpha, A\alpha\}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}}_{P^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

مثال) $A_{4\times 4}$ و A پیدا کنید که برابر است با $x^4-x^3+5x^2-x+2$ معادله مشخصه ماتریس

پایه A $\{\alpha, A\alpha, A^2\alpha, A^3\alpha\}$

ماتریس همراه $=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$

فرم کوپا: برای تبدیل خطی $T: V\to V$ بردارهای α_1 و ... و α_r موجودند که T پوچساز $p_1(x)$ ... $p_r(x)$

آنها هستند که در شرط زیر صدق می‌کنند الف) $V=Z(T;\alpha_1)\oplus\dots\oplus Z(T;\alpha_r)$

ب) $p_{i+1}(x)\mid p_i(x)$

ج) $p_1(x)\times\dots\times p_r(x)=$ چند جمله‌ای مشخصه T

د) $p_1(x)$ برابر چند جمله‌ای مینیمال است.

مثال) مطلوب تمام حالتهای ممکن فرم کوپا برای ماتریس A 3×3 که $m_A(x)=(x-1)(x-2)$ و $p_A(x)=(x-1)(x-2)^2$.

جواب: $p_1(x)=(x-1)(x-2)$

$p_2(x)=(x-2)$

Scanned by CamScanner

$$Z(T;\alpha)=\left\{\lambda_1\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}+\lambda_2\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}\;\middle|\;\lambda_1,\lambda_2\in R\right\}=\left\{\begin{bmatrix}\lambda_1-2\lambda_2\\\lambda_1+2\lambda_2\\-2\lambda_1-\lambda_2\end{bmatrix}\;\middle|\;\lambda_1,\lambda_2\in R\right\}$$

$z=ax^2+by$

$$-2\lambda_1-\lambda_2=a(\lambda_1-2\lambda_2)+b(\lambda_1+2\lambda_2)=(a+b)\lambda_1+(-2a+2b)\lambda_2$$

$$\begin{cases}a+b=-2\\-2a+2b=1\\4b=-4\Rightarrow b=-1\end{cases},\quad a=-1$$

نکته: اگر $T:V\to V$ تبدیل خطی و $\dim V=n$ آنگاه برای V پایه‌ای مانند $\{\alpha, T(\alpha),\dots,T^{n-1}(\alpha)\}$ وجود دارد.

$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a$ برابر با T و α برای $V=Z(T;\alpha)$ چندجمله‌ای

ماتریس خاص تبدیل T در پایه B به صورت:

$$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_0\\1&0&\cdots&0&-a_1\\0&1&\cdots&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&-a_{n-1}\end{bmatrix}$$

مثال) $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&2\end{bmatrix}$ و $\alpha(1,1)$ مطلوب است یافتن ماتریس A در پایه $\{\alpha, A\alpha\}$ و $(P^{-1}AP)$

حل: $P(x)=(x-1)(x-2)$

$m(x)=(x-1)(x-2)$

A برای $\begin{matrix}x-1\\x-2\\(x-1)(x-2)\end{matrix}$

$=x^2-3x+2$

$$B=\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{\alpha},\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}}_{A\alpha}\}$$

Scanned by CamScanner

Subject ۲۷
Date

مثال) $T: R^2 \to R^2$ ، $T(x,y)=(2x,-y)$ ، $\alpha=(1,0)$ ، $Z(T;\alpha)=?$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad P_A(x)=(x-2)(x+1)$$

$$m_A(x)=(x-2)(x+1)$$

مقسوم‌علیه‌های T-پوچساز α: $x-2$ ✓، $x+1$، $(x-2)(x+1)$

حالت ۱: $\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$

$Z(T;\alpha)$ پایه‌ای $=\left\{\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right\} \longrightarrow Z(T;\alpha)=\left\{\begin{bmatrix}\lambda\\ 0\end{bmatrix} \mid \lambda\in R\right\}$ = محور xها

مثال) تمرین) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید $\alpha=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$, $P_A(x)=m_A(x)=(x^2+1)(x-1)$

مطلوب است: $Z(A;\alpha)=?$

مقسوم‌علیه‌های T-پوچساز α: $x-1$، x^2+1 ✓، $(x^2+1)(x-1)$

حالت اول $A-I$: $\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}$

حالت دوم A^2+I:

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$Z(T;\alpha)$ پایه‌ای $=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -2\end{bmatrix}}_{\alpha},\ \underbrace{\begin{bmatrix}-2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}}_{A\alpha}\right\}$

Scanned by CamScanner

مثال) $T: R^2 \to R^2$ ، $\alpha = (1,0)$ ، مطلوبست $Z(T;\alpha) = ?$ خیلی مثال مهمیه

$T(x,y) = (2x, -y)$

① $x+1 \longrightarrow T+I\,(1,0) = (2,-1) + (1,0) = (3,-1)$ ✓

② $x^2-2 \longrightarrow T^2 - 2I\,(1,0) = T(3,-1) - 2(1,0) = (6,1) + (-2,0) = (4,1)$ ✓

⋮

هدف: یافتن پایه برای $Z(T;\alpha)$

تعریف: فرض کنید $T: V \to V$ تبدیل خطی و $\alpha \in V$ ، $\alpha \neq 0$ در اینصورت T-پوچساز برداری چندجمله‌ای $f(x)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱- $f(T)\alpha = 0_V$

۲- $f(x)$ یکتا است

۳- اگر $g(x)$ چندجمله‌ای دیگری باشد که $g(T)\alpha = 0$ آنگاه $f(x) \mid g(x)$

مثال) تبدیل $T(x,y) = (y, 2x)$ را در نظر بگیرید و مطلوب کنید $\alpha = (1,0)$ ، T-پوچساز.

حل: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \to P_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 0 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = (x-2)^{①}(x+1)^{①}$

$m_A(x) = (x-2)^{①}(x+1)^{①}$

حالت‌های $f(x)$: $\begin{cases} x-2 & \frac{1}{} \\ x+1 & \frac{2}{} \\ (x-2)(x+1) & \frac{3}{} \end{cases}$

حالت ۱: $(A-2I)(\alpha) \to \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

نکته: اگر $T: V \to V$ تبدیل خطی و $\alpha \in V$ ، $\alpha \neq 0$ در اینصورت $\{\alpha, T(\alpha), \dots, T^{k-1}(\alpha)\}$ یک پایه برای $Z(T;\alpha)$ است که k بیشترین چندجمله‌ای T-پوچساز است.

Scanned by CamScanner

$W_1 = \ker(A+I) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{bmatrix} \middle| x,y \in \mathbb{R} \right\}$

($2 = W_1$ بعد)

$W_2 = \ker(A-I) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

($1 = W_2$ بعد)

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

پایه مناسب جردان فرم تجزیه اولیه:
(در پایه B بالا ماتریس A بلوکی قطری است)

$\begin{bmatrix} [\ ]_{2\times 2} & 0 \\ 0 \quad 0 & [\ ]_{1\times 1} \end{bmatrix}$ حل اول:

حل دوم: $P^{-1}AP = [\text{بلوکی قطری}]$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

نکته: فرم تجزیه اولیه برای تبدیلات قطری ناشدنی استفاده می‌شود و ماتریس نمایش بصورت بلوکی قطری است.

فرم تجزیه کوشی یا دوری:

فرض: $T: V \to V$ تبدیل خطی و $0 \neq \alpha \in V$ در نظر بگیرید و قرار دهید $Z(T;\alpha)$ زیرفضای T-دوری تولید شده توسط α برابر است با تمام $\{g(T)\alpha \mid g \text{ چندجمله‌ای است}\}$ و با نماد $Z(T;\alpha)$ نمایش می‌دهیم

Scanned by CamScanner

شکل قطری شدنی A به چه صورت است؟

(شرایط قطری شدن: ۱- همه عامل‌های $P(x)$ تجزیه شود ۲- جمع بعد مقادیر ویژه برابر با بعد فضا باشد که در این صورت می‌گوییم A قطری شدنی است)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \oplus & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \oplus & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ominus \end{bmatrix}$$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

روی قطر باید مقادیر ویژه باشد.

نکته مهم: اگر $V = W_1 \oplus W_2$ و W_iها، T پایا باشند و B_1 پایه‌ای برای W_1 و B_2 پایه‌ای برای W_2 باشد، در این صورت ماتریس T در پایه $B_1 \cup B_2$:

$$T_{B_1 \cup B_2} = \begin{bmatrix} A_{r\times r} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & C_{s\times s} \end{bmatrix}$$

قضیه تجزیه اولیه: اگر A ماتریس $n\times n$ و $P(x) = (f_1(x))^{r_1} \cdots (f_k(x))^{r_k}$ (که f_iها سازه اولند) صفحه‌های $W_i = \ker(f_i(T))^{s_i}$ و $1 \le s_i \le r_i$ که $m(x) = (f_1(x))^{s_1} \cdots (f_k(x))^{s_k}$ مینیمم A باشد و در این صورت $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ و در پایه مناسب برای V، ماتریس A غیر بلوکی قطری دارد.

مثال) ماتریس 3×3 و 2×2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ را در فرم تجزیه اولیه بنویسید.

$P(x) = (x^2+1)^{\oplus}(x-1)^{\oplus}$ (حالتی که سبد شده)

$m(x) = (x^2+1)^{\ominus}(x-1)^{\ominus}$ ← (در مینیمال A)

$W_1 = \ker(A^2+I)$

$W_2 = \ker(A-I)$

$$A^2+I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A-I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

مثال) ماتریس $A_{10\times 10}$ با چندجمله‌ای مشخصه $P(x)=(x^2+1)^3(x-1)^2(x+2)^2$ را در نظر بگیرید:

الف) مطلوبت مقادیر ویژه A: صفرهای چندجمله‌ای مشخصه که $P(x)$ به ازای 1 و -2 صفر می‌شود

ب) مطلوبت تمام حالت‌هایی که $m(x)$ بتواند باشد

حالت ۱: $m(x)=(x^2+1)^{①}(x-1)^{①}(x+2)^{①}$

حالت ۲: $m(x)=(x^2+1)^{②}(x-1)^{①}(x+2)^{①}$

حالت ۳: $m(x)=(x^2+1)^{③}(x-1)^{①}(x+2)^{①}$

⋮

حالت آخر: $m(x)=(x^2+1)^{③}(x-1)^{②}(x+2)^{②}$ (بیشترین توان حال توانی است که در ریشه‌ها داده)

مثال) چندجمله‌ای مینیمال ماتریس $A=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$ را بیابید.

$P(x)=(x-1)(x-2)^2$ ← ریشه‌های مشخصه محاسبه شده

* چندجمله‌ای مینیمال مشخص به مرزات است.

حالت ۱: $m(x)=(x-1)^{①}(x-2)^{①}$

حالت ۲: $m(x)=(x-1)^{①}(x-2)^{②}$ طبق قاعده کایلی همیلتون مشخص در حالت‌های بالا جایگذاری ماتریس کامل صفرات است.

بررسی حالت ۱: $(x-1)(x-2)=x^2-3x+2$

$$A^2-3A+2I=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}^2-3\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)$ چندجمله‌ای مینیمال

مثال) (از قطری سازی) ماتریس $A_{4\times 4}$ را در نظر بگیرید اگر $P(x)=(x-1)^1(x+2)^3$ چندجمله‌ای مشخصه A باشد.

قطری پذیر است $\Leftrightarrow \dim W_{\lambda=1}+\dim W_{\lambda=-2}=4$ و $(\dim W_{\lambda=1}=1)$ بعد W_1 برابر $\dim W_{\lambda=1}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال) چند جمله‌ای مینمال تبدیل $T:R^2\to R^2$ و $T(x,y)=(3x,5y)$ را بدست آورید

حل: $m(x)=(x-3)(x-5)=x^2-8x+15$ ضرب و تنزیم

$m(T)=T^2-8T+15I$

$m(T)(x,y)=T^2(x,y)-8T(x,y)+15I(x,y)=(9x,25y)-(24x,40y)+(15x,15y)=(0,0)$

قضیه کایلی-همیلتن: اگر $T:V\to V$ تبدیل خطی و $P(x)$ چند جمله‌ای مشخصه و $m(x)$ چند جمله‌ای مینمال T باشد، در اینصورت $P(x)$ و $m(x)$ ریشه‌های اول یکسان و به احتمال با چند تکراری‌های متفاوت دارند و $P(T)=0$

مثال) چند جمله‌ای مینمال تبدیل $T:R^2\to R^2$ و $T(x,y)=(3x,5y)$ را بدست آورید

برای محاسبه مشخصه ماتریس نمایش T ابتدا باید استاندارد را پیدا کنیم

ماتریس نمایی $T=A=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}$

$P_A(x)=\left|x\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}\right|=\begin{vmatrix}x-3&0\\0&x-5\end{vmatrix}=(x-3)(x-5)\to$ ①

$m_A(x)=(x-3)(x-5)$ ① توان باید کوچکتر از توان اولیه بوده و ≥ 1 توان باشد در این مثال

مثال: از روی پایه $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$ یک پایه متعامد برای $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ است

$$w_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad w_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$w_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$$

$$w_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\frac{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)}{tr\left(\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right)}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$$

-① ضرایب فوریه:

یادآوری: مختصات بردار v در پایه $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ یعنی $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ $\Leftarrow$ $v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n$

* نکته: اگر $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه متعامد برای V باشد در اینصورت برای هر $v\in V$ داریم مختصات

$$v=\lambda_1v_1+\dots+\lambda_nv_n \longrightarrow \lambda_1=\frac{v\cdot v_1}{v_1\cdot v_1},\quad \lambda_k=\frac{v\cdot v_k}{v_k\cdot v_k}$$

تعریف-①: فرض کنید V یک فضای برداری و $\{v_1,\dots,v_n\}$ یک پایه متعامد برای V باشد در اینصورت مختصات دلخواه v در پایه B بصورت $\left(\frac{v\cdot v_1}{v_1\cdot v_1},\dots,\frac{v\cdot v_n}{v_n\cdot v_n}\right)$ است. این ضرایب را ضرایب فوریه گوییم.

مثال: مطلوبست ضرایب فوریه برای چند جمله‌ای x^2+x+1 در پایه متعامد $\left\{1,x-\frac{1}{2},x^2-x+\frac{1}{6}\right\}$

$$\lambda_1=\frac{\int_0^1(x^2-x+1)\cdot 1\,dx}{\int_0^1 1\cdot 1\,dx} \qquad \lambda_2=\frac{\int_0^1(x^2-x+1)(x-\frac{1}{2})\,dx}{\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2\,dx}$$

Scanned by CamScanner

$B' = \{w_1, \dots, w_n\}$

$w_1 = v_1$

$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1$

$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2$

$\vdots$

$w_n = v_n - \frac{v_n \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 - \frac{v_n \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 - \dots - \frac{v_n w_{n-1}}{w_{n-1} \cdot w_{n-1}} w_{n-1}$

مثال: از روی پایه $\{(1,1), (2,-1)\}$ یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^2$ بسازید.

$w_1 = (1,1) \quad , \quad w_2 = (2,-1) - \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$

مثال: از روی پایه $\{1, x, x^2\}$ برای $P_2(x)$ یک پایه متعامد بسازید.

$w_1 = 1 \qquad w_2 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 \, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \, dx}(1) = x - \frac{1/2}{1} = x - 1/2$

$w_3 = x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 \, dx} 1 - \frac{\int_0^1 x^2 (x - 1/2) \, dx}{\int_0^1 (x - 1/2)^2 \, dx}(x - 1/2) = x^2 - \frac{1/3}{1}(1) - \frac{1/4 - 1/6}{1/3 - 1/2 + 1/4}(x - 1/2)$

$w_3 = x^2 - 1/3 - (x - 1/2) = x^2 - x + 1/6$

Scanned by CamScanner

Subject ۳۰
Date

(الف) $\langle A,A\rangle = tr(AA^+) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0$
$A=(a_{ij})$

$\langle A,A\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \Rightarrow A = 0$

ب) $\langle A,B\rangle = tr(AB^+) = tr((AB^+)^+) = tr(BA^+) = tr(BA^+) = \langle B,A\rangle$

ج) $\langle A,B+C\rangle = tr(A(B+C)^+) = tr(A(B^+ + C^+)) = tr(AB^+ + AC^+)$

$= tr AB^+ + tr AC^+ = \langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$

تعریف: دو بردار A و B برهم عمودند اگر $\langle A,B\rangle = 0$

مثال: نشان دهید دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ برهم عمودند

$AB = tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0$

هدف: ساختن یک پایه متعامد از روی یک پایه دلخواه

تعریف: پایه $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای فضای برداری V را یک پایه متعامد گوییم اگر $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ $(i \neq j)$

مثال: $\{(1,0),(0,1)\}$ یک پایه متعامد برای $\mathbb{R}^2$ است

فرایند گرام ـ اشمیت: پایه $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ برای فضای برداری V را در نظر بگیرید از روی این پایه با روش زیر می‌توان یک پایه متعامد برای V بدست آورد

مثال) $(1,2,3,4)\cdot(1,-1,1,1) = 1-2+3+4 = 6$

مثال: نشان دهید ضرب زیر یک ضرب داخلی روی $P_n(x)$ است.

$\langle f(x), g(x) \rangle \int_0^1 f(x).g(x)\,dx$

الف) بررسی $\langle f(x), f(x) \rangle = \int_0^1 f^2(x)\,dx \geq 0$.

$\langle f(x), f(x) \rangle = 0 \Rightarrow \int_0^1 f^2(x)\,dx = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

ب) شرط $\int_0^1 f(x).g(x) = \int_0^1 g(x).f(x)$ ج) شرط $\int_0^1 f(x)\,(g(x)+h(x))\,dx$

$= \int_0^1 f(x).g(x)\,dx + \int_0^1 f(x).h(x)$

مثال: نشان دهید ضرب زیر یک ضرب داخلی روی $M_n(\mathbb{R})$ است

$\langle A,B \rangle = tr(AB^t)$

یادآوری: ① $tr(A+B) = tr A + tr B$ ⑤ $tr A = tr A^t$ مجموع عناصر روی قطر

② $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$ ④ $tr(AB) = tr(BA)$

③ $(A.B)^t = B^t A^t$ ⑥ $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

⑦ $tr(\lambda A) = \lambda\, tr A$

⑧ $A^{tt} = A$

$tr(AA^t) =$

$A = (a_{ij})$

$$AA^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & a_{nn} \\ a_{1n} & a_{2n} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2 & & \\ & a_{21}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{2n}^2 & \\ & & \ddots \\ & & a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$A_{5\times5}$ — $P_A(x) = (x-3)^3(x-1)^2$ $\quad m_A(x) = (x-3)^2(x-10)$

$J_2^{(3)} \oplus J_1^{(3)} \oplus J_1^{(10)} \oplus J_1^{(10)}$

$A_{9\times9}$ $\quad P_A(x) = (x-3)^4(x-1)^2 \quad m_A(x) = (x-3)^2(x-11)$

حالت (I) $\quad J_2^{(3)} \oplus J_2^{(3)} \oplus J_1^{(11)} \oplus J_1^{(11)}$

حالت (II) $\quad J_2^{(3)} \oplus J_1^{(3)} \oplus J_1^{(3)} \oplus J_1^{(11)} \oplus J_1^{(11)}$

ضرب داخلی: فرض کنید V فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد

را یک ضرب داخلی روی V می‌نامیم اگر $\quad$ تابع $V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$

الف) $\forall v\in V \quad \langle v,v\rangle \geq 0$ و $\langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ب) $\forall u,w\in V \quad \langle u,w\rangle = \langle w,u\rangle$

ج) $\forall u,v_1,v_2\in V$ و $\forall \alpha\in\mathbb{R} \quad \langle u, \alpha v_1 + v_2\rangle = \alpha\langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$

مثال: نشان دهید ضرب زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ است

$(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_n) = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$

الف) بررسی شرط: $(a_1,\dots,a_n)(a_1,\dots,a_n) = a_1^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$

$(a_1,\dots,a_n)(a_1,\dots,a_n) = 0 \Rightarrow a_i = 0$

ماتریس $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ را صد از داخل $\ker(A-2I)^2$ بری داریم.

ناآب

$$(A-2I)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdot & \cdot\\ -1 & \cdot\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdot\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix}$$

$$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\ \cdot\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\cdot\\ -1\\ 2\end{bmatrix}\right\}$$

حال بیا را الزمسته $(A-2I)$ بری داریم. $\ker(A-2I)=W_{\lambda=2}=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}-1 & \cdot & \cdot\\ -1 & -1 & \cdot\\ 2 & 4 & \cdot\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{bmatrix}\right\}$

$$A-2I=\begin{bmatrix}-1 & \cdot & \cdot\\ -1 & -1 & \cdot\\ 2 & 4 & \cdot\end{bmatrix}\Rightarrow B_2=\left\{\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}-x=\cdot\\ -x-y=\cdot\\ 2x+4y=\cdot\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}\cdot\\ \cdot\\ z\end{bmatrix}\middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & -1 & \cdot\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \cdot\\ 1 & 2\end{bmatrix} & \begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix}\\ \begin{matrix}\cdot & \cdot\end{matrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

مثال: تمام ماتریس های جردن ممکن $A_{4\times4}$ که $P_A(x)=(x-1)(x-2)^3$

$m_A(x)$ *

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1\end{bmatrix} & \begin{matrix}\cdot & \cdot\end{matrix}\\ \begin{matrix}\cdot\\ \cdot\end{matrix} & \begin{bmatrix}2 & \cdot\\ 1 & 2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$A_{4\times4}$ $P_A(x)=(x-2)^4$ $m_A(x)=(x-2)^2$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \cdot\\ 1 & 2\end{bmatrix} & \begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{matrix}\\ \begin{matrix}\cdot & \cdot\end{matrix} & \begin{bmatrix}2 & \cdot\\ 1 & 2\end{bmatrix}\end{bmatrix}\quad\text{یا}\quad\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \cdot\\ 1 & 2\end{bmatrix} & \begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{matrix}\\ \begin{matrix}\cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot\end{matrix} & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\\ & & & \begin{bmatrix}2\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$J_2(2)\oplus J_2(2)$ $J_2(2)\oplus J_1(2)\oplus J_1(2)$

Scanned by CamScanner

به همین صورت برای ماتریس‌های دیگر تستی از پایه را بدست آورید در نهایت

$$B = B_1 \cup \dots \cup B_k$$

مثال: ماتریسی مانند P بیابید که $P^{-1}AP$ ماتریسی در فرم جردن باشد که $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$P_A(x) = (x-3)^2$

$m_A(x) = (x-3)^2$

$\ker(A-3I)^2 = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$(A-3I)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $(A-3I)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

خوب است

$B = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{(A-3I)v} \right\}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\left(P = J_c(3)\right)$

مثال: ماتریسی مانند P بیابید که $P^{-1}AP$ ماتریس در فرم جردن باشد. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

$P_A(x) = (x-2)^2(x-3)$

$m_A(x) = (x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

$m_A(x) = (x-2)^2(x-3)$

$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 11 & 20 & 9 \end{bmatrix}$ $A^2 - 5A + 6 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 11 & 20 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \\ -15 & -20 & -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$v_1 \in \ker(A-2I)^2$; $v_1 \notin \ker(A-2I)$

$B_1 = \{v_1, (A-2I)v\}$

$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$\ker(A-2I)^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / (A-2I)^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} / \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ -x + 4y + z = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ x - 4y \end{bmatrix} / x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعریف: بلوک $n \times n$ جردن $J_n(c)$ بصورت زیر تعریف می‌شود (با عدد c روی قطر)

$$J_n(c) = \begin{bmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & c & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & c \end{bmatrix}$$

(مثال) $J_2(3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad J_3(-1) \oplus J_2(2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{5\times 5}$

هدف فرم جردن پیدا کردن پایه‌ای است که در این پایه ماتریس بصورت بلوک قطری باشد و هر یک از بلوک‌ها بصورت $J_k(c_i)$ باشد.

این دو سوال معادل یکدیگرند: ماتریس آن پایه A و $T: V \to V$ استاندارد

① - یافتن پایه B که $[T]_B$ بلوک - قطری باشد.

② - یافتن ماتریس P که $P^{-1}AP$ " " .

فرم جردن: ماتریس $n \times n$ ، A را در نظر بگیرید که

$$P_{A(x)} = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$$

$$m_A(x) = (x-c_1)^{s_1} \cdots (x-c_k)^{s_k}$$ در اینصورت پایه زیر را برای فضای $\mathbb{R}^n$

در نظر بگیرید. $v_1 \in \ker (A-c_1 I)^{s_1}$ ، $v_1 \notin \ker (A-c_1 I)^{s_1-1}$

و قرار دهید $B_1 = \{v_1, (A-c_1 I)v_1, \ldots, (A-c_1 I)v\}$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject ۲۵
Date

مثال: ماتریس ماتریس P پیدا کنید $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 8 \end{bmatrix}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

«قطری سازی ماتریس های متقارن»

ماتریس متقارن: ماتریس $A_{n\times n}$ را متقارن گوییم اگر $A = A^t$

الگوریتم متعامد سازی ماتریس های متقارن: با استفاده از عملیات های سطری و ستونی ماتریس متقارن A را به ماتریس قطری تبدیل می کنیم یعنی ماتریسی مانند P پیدا می شود که $P^tAP = D$ قطری شود.

$$\begin{bmatrix}2&4\\4&3\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right.$$

سطر ↑

$-2c_1+c_2$ →

$$\begin{bmatrix}2&4\\0&-5\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0\\-2&1\end{matrix}\right.$$

$-2f_1+f_2$ →

$$\begin{bmatrix}2&0\\0&-5\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0\\-2&1\end{matrix}\right.$$

ستون ↓

D | P^t

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}}_{P^t}\underbrace{\begin{bmatrix}2&4\\4&3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix}2&0\\0&-5\end{bmatrix}$$

نکته: ماتریس متعامد قطری شدنی است

مثال: ماتریسی مانند P بیابید که P^tAP قطری شود

$$A = \begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right.$$

c_1+c_3 →

$$\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\0&0&-6\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{matrix}\right.$$

$-2f_1+f_3$ →

$$\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-6\end{bmatrix} \quad \left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{matrix}\right. \quad P^t$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}}_{P^t}\underbrace{\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\4&0&2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-6\end{bmatrix}$$

PAPCO