# مثلثات

رابطه‌ی درجه و رادیان:

$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad$ $\qquad$ $1\ rad = \frac{180}{\pi} \simeq 57^\circ$

مثال ۱: $20^\circ = ?\ rad \longrightarrow \frac{\pi}{180} \times 20 = \frac{\pi}{9}\ rad$

مثال ۲: $30^\circ = ?\ rad \longrightarrow \frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}\ rad$

## حدود تغییرات عبارت های مثلثاتی:

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

$\tan\alpha, \cot\alpha \in \mathbb{R}$

نوع مراست

مثال: $\tan\alpha = 200$

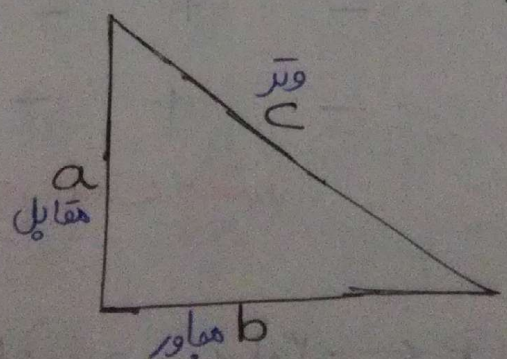
$\cot\alpha = 500$

مثال: حدود تغییرات عبارت $y = 5\sin\alpha + 2$ کدام است؟

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1 \xrightarrow{\times 5} -5 \leq 5\sin\alpha \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq 5\sin\alpha + 2 \leq 7$$

$$\Rightarrow -3 \leq y \leq 7 \quad \text{یا} \quad [-3, 7]$$

نکته:




$$\sin\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} = \frac{b}{a}$$

* $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

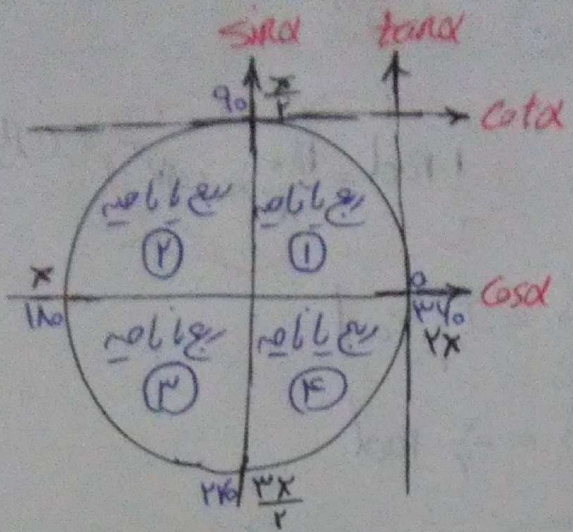
* $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

* $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

* $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ عکس یکدیگرند

مثال: $\tan\alpha = 3 \longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{3}$

دایره مثلثاتی




علامت توابع مثلثاتی در نواحی مختلف

| α | ۰ | π/۶ ۳۰° | π/۴ ۴۵° | π/۳ ۶۰° | π/۲ ۹۰° |
|---|---|---|---|---|---|
| sinα | ۰ | ۱/۲ | √۲/۲ | √۳/۲ | ۱ |
| cosα | ۱ | √۳/۲ | √۲/۲ | ۱/۲ | ۰ |
| tanα | ۰ | √۳/۳ | ۱ | √۳ | ∞ |
| cotα | ∞ | √۳ | ۱ | √۳/۳ | ۰ |

| | ناحیه ① | ناحیه ② | ناحیه ③ | ناحیه ④ |
|---|---|---|---|---|
| sinα | + | + | − | − |
| cosα | + | − | + | + |
| tanα | + | − | + | − |
| cotα | + | − | + | − |

هستند: cosα، tanα sinα، cotα

* tanα و cotα ناحیه هم علامت هستند

نواحی فرد ← ۱ و ۳ ← ⊕ ← sin و cos هم علامت هستند
sinα · cosα > ۰

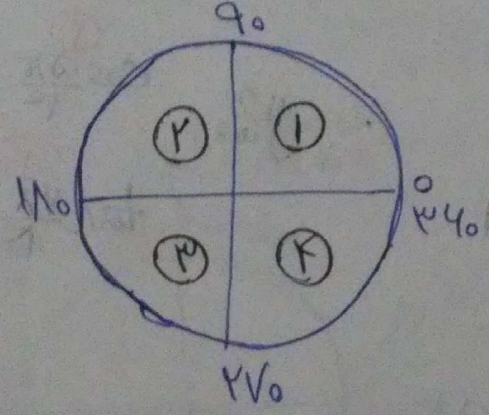
نواحی زوج ← ۲ و ۴ ← ⊖ ← sin و cos مختلف العلامتند
sinα · cosα < ۰

① اگر $\sin^2\alpha \cdot \cot\alpha < 0$ باشد در این صورت کمان $\alpha$ در کدام ناحیه مثلثاتی واقع است؟

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \longrightarrow \sin^2\alpha \times \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\alpha < 0$$

در نواحی ۲ و ۴، $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ مختلف العلامت و حاصلضربشان منفی است.

① در کدام گزینه عبارت داده شده منفی است؟




۱) $\sin 119^\circ + \cos 340^\circ$ (+ +)

۲) $\sin 19^\circ + \tan 170^\circ$ (+ −)

۳) $\tan 200^\circ - \cot 300^\circ$

۴) $-\cos 148^\circ + \cot 80^\circ$

مثال: اگر $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ باشد حاصل $\csc\alpha$ کدام است؟

یادآوری: $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ ، $\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

حل: $\csc\alpha = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ ②

## ویژگی توابع مثلثاتی کمان‌های معروف

| | ربع ① | ربع ② | ربع ③ |
|---|---|---|---|
| θ های مادر | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| θ های بعدی | $\frac{3\pi}{6}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{2\pi}{3}$ |
| | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ |
| | $\frac{11\pi}{6}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{3}$ |

ربع اول $\theta = \frac{\pi}{n}$

ربع دوم $\theta = \frac{(n-1)\pi}{n}$

ربع سوم $\theta = \frac{(n+1)\pi}{n}$

ربع چهارم $\theta = \frac{(2n-1)\pi}{n}$

* تابع‌ها مقدار بعدی‌ها عین مادر شوند و فقط در جزئیات (تعیین علامت) فرق دارند اما مقدارشان با هم برابر است.

نکته: به ازای $\theta$ های مادر و جمع‌های آن مقادیر $|\sin\theta|$ ها و $|\cos\theta|$ ها و $|\tan\theta|$ و $|\cot\theta|$ ها با هم برابرند

دسته اول: $\theta$ مادر $\frac{\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{6}$ $\frac{7\pi}{6}$ $\frac{11\pi}{6}$

$|\sin\theta| = \frac{1}{2}$ $|\tan\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$|\cos\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|\cot\theta| = \sqrt{3}$

مثال: $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ناصیه ۲) $\quad \cot\frac{11\pi}{6} = -\sqrt{3}$ (ناصیه ۴)

$\tan\frac{7\pi}{6} = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ناصیه ۳)

دسته ۲: $\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{7\pi}{4}$

$|\sin\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $|\tan\theta| = 1$

$|\cos\theta| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $|\cot\theta| = 1$

مثال: $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $\quad \sin\frac{3\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲)

$\tan\frac{7\pi}{4} = -1$ (۴)

دسته‌ی سوم: $\frac{\pi}{3}$ $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{4\pi}{3}$ $\frac{5\pi}{3}$

$|\sin\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|\cos\theta| = \frac{1}{2}$

$|\tan\theta| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $|\cot\theta| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

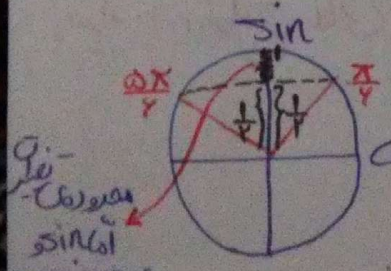
مثال: $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ $\quad \cot\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\frac{4\pi}{3} = +\sqrt{3}$

① اگر $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$ باشد و $\sin\alpha = \frac{1}{m-2}$ باشد حدود $m$ کدام است.

روش غلط ← از کل عبارت sin بگیرید غلط است

روش صحیح ← رسم دایره مثلثاتی




بیشترین مقدار sin و cos در ربع اول ۱ است

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\alpha \leq 1 \rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{m-2} \leq 1$

عکس $\rightarrow 1 \leq m-2 < 2 \xrightarrow{+2} 3 \leq m < 4$

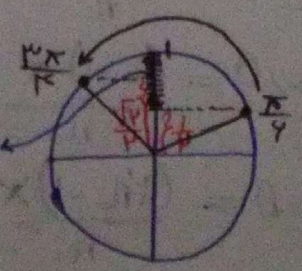
۱) $m \geq 4$

۲) $m > 4$

③ $2 < m \leq 3$

۴) $m \geq 3$ و $m \leq 1$

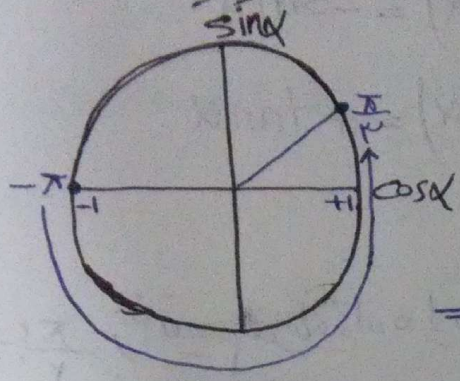
② با فرض $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$ حدود $\sin\alpha$ را بیابید.




بیشترین مقدار sin در ربع اول ۱ است

$\Rightarrow \frac{1}{2} < \sin\alpha \leq 1$

① با فرض $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{9}$ و $\cos 3\alpha = \frac{m-1}{2}$ حدود تغییرات $m$ را بیابید.




$\Rightarrow -1 < \cos 3\alpha \leq +1$

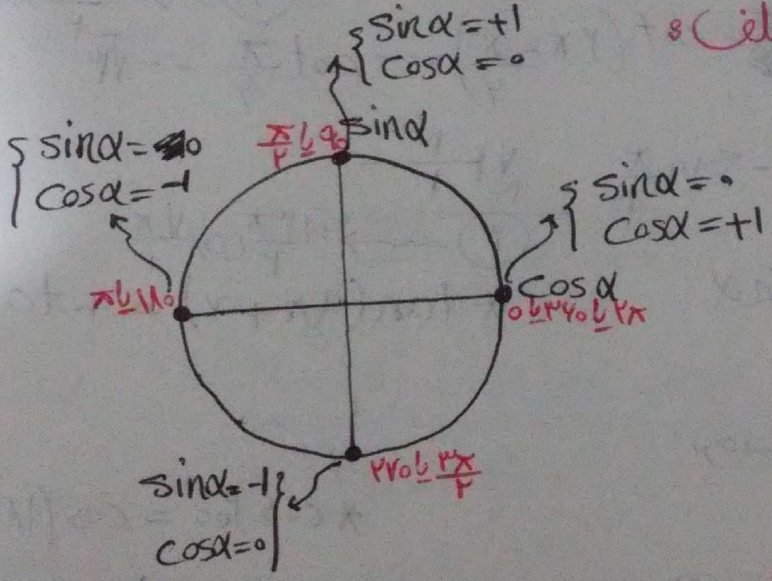
$-\pi < 3\alpha < \frac{\pi}{3}$ (کمان cos شناخته شد) ← $\times 3$

$\Rightarrow -1 < \frac{m-1}{2} \leq +1 \xrightarrow{\times 2} -2 < m-1 < 2$

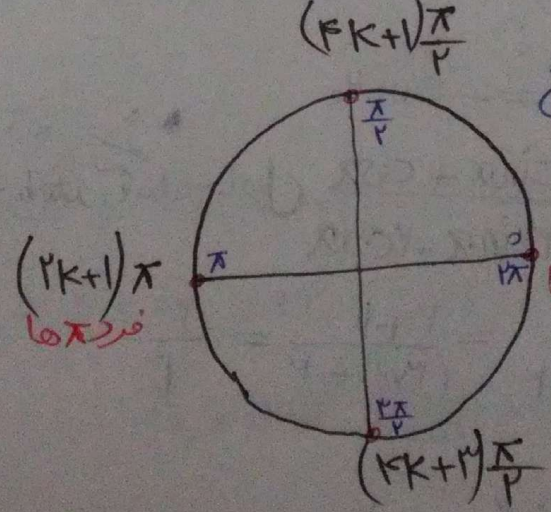
$\xrightarrow{+1} -1 < m < 3$

جواب

مقادیر sin و cos در مرزهای مختلف:




نسبت‌های مثلثاتی کمان‌های مرکب:




* $2K\pi$ و $(2K+1)\pi$ نسبت‌های مثلثاتی را عوض نمی‌کنند

* $(4K+1)\frac{\pi}{2}$ و $(4K+3)\frac{\pi}{2}$ نسبت‌های مثلثاتی را عوض می‌کنند

یعنی sin ⇄ cos

tan ⇄ cot

نکته: ضریب $\frac{\pi}{2}$ را بر ۴ تقسیم کرده اگر باقیمانده ۱ شد روی $\frac{\pi}{2}$ و اگر باقیمانده ۳ شد روی $\frac{3\pi}{2}$ است.

نکته: علامت به وسیله‌ی نسبت سمت چپ تعیین می‌شود نه سمت راست.

مثال: $*\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$ $*\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$

$*\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha$ $*\tan(\pi+\alpha)=+\tan\alpha$

$*\sin\left(\frac{39\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=+\cos\frac{\pi}{4}=\frac{+\sqrt{2}}{2}$ ضریب $\frac{\pi}{2}$ بر ۴ تقسیم شد باقیمانده ۱ شد پس زاویه $\frac{\pi}{2}$ است

$*\tan\left(\frac{27\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\cot\frac{\pi}{3}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ → $\begin{array}{r|l}27 & 4\\ 24 & 6\\ \hline 3 & \end{array}$ زاویه $\frac{3\pi}{2}$ است

$*\cot\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\cot\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

$*\cos\left(\frac{7\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}$ $\begin{array}{r|l}7 & 4\\ 4 & 1\\ \hline 3 & \end{array}$ زاویه $\frac{7\pi}{2}$ زاویه $\frac{3\pi}{2}$ است

$*\sin(10\pi+\alpha)=+\sin\alpha$ $*\tan(9\pi+\alpha)=+\tan\alpha$

مثال: برحسب کمان $20^\circ$ نوشته شوند؟

$*\sin 200^\circ=\sin 20^\circ$ $*\cos 100^\circ=\cos(110+20)=-\cos 20$

$*\tan 140^\circ=\tan(110^\circ+20^\circ)=-\tan 20^\circ$ $*\cot 340^\circ=\cot(360-20)=-\cot 20$

$*\cos 250^\circ=\cos(270-20)=-\sin 20^\circ$

① اگر $\tan\alpha=2$ باشد آنگاه حاصل $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{3\sin\alpha-2\cos\alpha}$ چیست؟

صورت و مخرج را بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow\frac{\tan\alpha+1}{3\tan\alpha-2}=\frac{2+1}{(3\times2)-2}=\frac{3}{4}$

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\frac{5}{6}$

② اگر $\tan\alpha=2$ باشد آنگاه حاصل $\frac{3\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ برابر است؟

عبارت را برحسب tan بازنویسی می‌کنیم $\Rightarrow$ صورت و مخرج را بر $\cos^2\alpha$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow\frac{3\tan^2\alpha+1}{1}=3(2)^2+1=12+1=13$

۱) اگر $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}$ کدام است.

۱) $\frac{9}{8}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{7}{3}$ ۴) $\frac{3}{5}$

صورت و مخرج بر $\cos^2\alpha$ تقسیم می‌شود ⇐ برحسب $\tan\alpha$ بنویسیم

$$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+2-\tan^2\alpha}{4-2\tan^2\alpha}=\frac{\frac{1}{2}+2-\frac{1}{4}}{4-2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$=\frac{\frac{21}{4}}{\frac{9}{4}}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$$

۲) اگر $\cot\alpha=\frac{1}{2}$ باشد حاصل $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) $\frac{3}{2}$ ۳) $3$ ۴) $\frac{7}{3}$

$$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha}=1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1+\cot\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

۳) اگر $\tan 35^\circ=a$ باشد حاصل $\frac{\sin 145^\circ-\sin 325^\circ}{\cos 325^\circ}$ کدام است؟

۱) $a+1$ ۲) $a-1$ ۳) $2a$ ۴) $2a-2$

$$\Rightarrow \frac{\sin(180-35)-\sin(270-35)}{\cos(360-35)}=\frac{+\sin 35+\cos 35}{\cos 35^\circ}$$

صورت و مخرج بر $\cos 35$ تقسیم

$$\longrightarrow \tan 35+1=a+1$$

۴) حاصل $\sin 20+\sin 200+\sin 340+\sin 160$ کدام است.

۱) صفر ۲) $\sin 20$ ۳) $2\sin 20$ ۴) $\sin 40$

$$\Rightarrow \sin 20+\sin(180+20)+\sin(360-20)+\sin(180-20)$$

$$=\sin 20-\sin 20-\sin 20+\sin 20=0$$

۵) اگر $\tan 20=0/36$ باشد حاصل $\frac{\sin 160-\cos 200}{\cos 110+\sin 70}$ کدام است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{10}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{31}{14}$

$$\Rightarrow \frac{\sin(180-20)-\cos(180+20)}{\cos(90+20)+\sin(90-20)}=\frac{+\sin 20+\cos 20}{-\sin 20+\cos 20}$$

صورت و مخرج بر $\cos 20$ تقسیم

$$=\frac{\tan 20+1}{-\tan 20+1}=\frac{0/36+1}{-0/36+1}=\frac{1/36}{0/64}=\frac{17}{8}$$

① اگر مقدار $\tan\theta=\frac{۲}{۱۰}$ باشد آنگاه مقدار $\frac{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\theta)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta)-\sin(۳\pi+\theta)}$ برابر است؟

$$\Rightarrow \frac{+\sin\theta+\cos\theta}{+\sin\theta+\sin\theta}=\frac{\tan\theta+۱}{۲\tan\theta}=\frac{\frac{۲}{۱۰}+۱}{۲\times\frac{۲}{۱۰}}=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

۱) $-۲$
۲) $۱/۲$
۳) $۲$
۴) $۳$

② اگر $\tan\alpha=\frac{۲}{۳}$ باشد آنگاه حاصل $\frac{\sin(۳\pi+\alpha)-\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}$ برابر است؟

$$\Rightarrow \frac{-\sin\alpha-\cos\alpha}{+\sin\alpha-\cos\alpha}\xrightarrow[\text{بر }\cos\alpha\text{ تقسیم}]{\text{صورت و مخرج}}\frac{-\tan\alpha-۱}{\tan\alpha-۱}=\frac{-\frac{۲}{۳}-۱}{\frac{۲}{۳}-۱}=\frac{-\frac{۵}{۳}}{-\frac{۱}{۳}}=+۵$$

۱) ۵
۲) ۱
۳) $-۳$
۴) $-۴$

نکته ① نکته‌ی مهم:

| $\cot\alpha$ | $\tan\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
|---|---|---|---|
| فرد | فرد | زوج | فرد |

یادآوری از بحث تابع:
* تابع فرد $(-)$ را به بیرون پس می‌دهد
* تابع زوج $(-)$ را قورت می‌دهد (می‌بلعد)

* $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
* $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$
* $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
* $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

① از تساوی $\frac{۲\sin(\alpha-۳\pi)+\cos(\alpha-\frac{\pi}{۲})}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}=۲$، $\tan\alpha$ برابر است.

$$\Rightarrow ۲\sin(\alpha-۳\pi)=-۲\sin(-(\alpha-۳\pi)),\ \cos(\alpha-\tfrac{\pi}{۲})=\cos(\tfrac{\pi}{۲}-\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{-۲(\sin(۳\pi-\alpha)+\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha))}{\sin(\frac{۳\pi}{۲}+\alpha)}=\frac{-۲\sin\alpha+\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$=\boxed{\tan\alpha=۲}$$

① حاصل $\cos(-\frac{۲۱۱\pi}{۴})+\sin(\frac{-۲۱۱\pi}{۴})$ برابر است؟

$۲۱۱\ |\ ۴$
$۲۱۰\ |\ ۵۳$
$۱$

$$\frac{۲۱۱\pi}{۴}\rightsquigarrow ۵۳\pi+\frac{\pi}{۴}$$

$$\cos(-\tfrac{۲۱۱\pi}{۴})-\sin(\tfrac{۲۱۱\pi}{۴})=\cos(۵۳\pi+\tfrac{\pi}{۴})-\sin(۵۳\pi+\tfrac{\pi}{۴})$$

$$\Rightarrow -\cos\tfrac{\pi}{۴}+\sin\tfrac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{-\sqrt{۲}+۱}{۲}$$

۱) $\frac{\sqrt{۳}+۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۳}-۱}{۲}$
۳) $\frac{-(\sqrt{۳}+۱)}{۲}$
۴) $\frac{-\sqrt{۳}+۱}{۲}$

① حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin(\frac{41\pi}{10})+\sin(\frac{29\pi}{10})+2\sin(\frac{11\pi}{10})}{\cos(-\frac{\pi}{10})\cdot\tan(\frac{21\pi}{10})+2\cos(\frac{2\pi}{5})}$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $-4$
۴) $-\frac{1}{4}$

$$A=\frac{\sin(2\pi+\frac{\pi}{10})+\sin(4\pi-\frac{\pi}{10})-2\sin(\pi+\frac{\pi}{10})}{\cos(-\frac{\pi}{10})\cdot\tan(2\pi+\frac{\pi}{10})+2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10})}$$

$$=\frac{+\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{\pi}{10}+2\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}\times\frac{\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{10}}+2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4\sin\frac{\pi}{10}}{2\sin\frac{\pi}{10}}=\frac{4}{3}$$

نکته ① : اگر $\alpha+\beta=90^\circ$ باشد به عبارتی $\alpha$ و $\beta$ متمم یکدیگر باشند آنگاه :

$$\begin{cases}\sin_{\text{یکی}}=\cos_{\text{دیگری}}\\ \tan_{\text{یکی}}=\cot_{\text{دیگری}}\end{cases}\Longrightarrow\begin{aligned}&\sin\alpha=\cos\beta\\&\cos\alpha=\sin\beta\\&\tan\alpha=\cot\beta\\&\cot\alpha=\tan\beta\end{aligned}$$

نکته ② : اگر $\alpha+\beta=\pi$ یا $180^\circ$ باشد به عبارتی $\alpha$ و $\beta$ مکمل یکدیگر باشند آنگاه :

$$\begin{cases}\sin\alpha=\sin\beta\\ \cos\alpha=-\cos\beta\longrightarrow\cos\alpha+\cos\beta=0\\ \tan\alpha=-\tan\beta\longrightarrow\tan\alpha+\tan\beta=0\\ \cot\alpha=-\cot\beta\longrightarrow\cot\alpha+\cot\beta=0\end{cases}$$

② حاصل عبارت $A=\cos^2\frac{\pi}{36}+\cos^2\frac{5\pi}{36}+\cos^2\frac{9\pi}{36}+\cos^2\frac{13\pi}{36}+\cos^2\frac{17\pi}{36}$ کدام است؟

۱) $\frac{2}{3}$
۲) $2$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $\frac{7}{2}$

یادآوری : $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\alpha$ ($\frac{\pi}{36}$) , $\beta$ ($\frac{17\pi}{36}$) , $\alpha+\beta=\frac{\pi}{36}+\frac{17\pi}{36}=\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{17\pi}{36}=\sin\frac{\pi}{36}$

$A'$ ($\frac{5\pi}{36}$) , $B'$ ($\frac{13\pi}{36}$) , $A'+B'=\frac{5\pi}{36}+\frac{13\pi}{36}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\frac{13\pi}{36}=\sin\frac{5\pi}{36}$

با توجه به این عبارت $\Rightarrow A=\cos^2\frac{\pi}{36}+\cos^2\frac{5\pi}{36}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{36}+\sin^2\frac{\pi}{36}$

$=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

① اگر $\alpha=10^\circ$ باشد حاصل $\frac{\sin 2\alpha \cdot \tan 4\alpha}{\cot 5\alpha \cdot \cos 7\alpha}$ کدام است؟

$\alpha+\beta=90^\circ$ { $\sin$ = $\cos$ زاویه‌ی دیگری ؛ یادآوری: $\tan$ = $\cot$ زاویه‌ی دیگری

۴) ۱
۳) ۲
۲) ۳
۱) ۴

$\alpha=10^\circ$ به ازای همه‌ی $\alpha$ های زاویه‌ی $0^\circ$ تا $90^\circ$ برابر است با $\Rightarrow \frac{\sin 20 \times \tan 40}{\cot 50 \times \cos 70}$

می‌توان گفت $\Rightarrow \cos 70 = \sin 20$ و $\cot 50 = \tan 40$ $\Rightarrow$ جواب = ۱

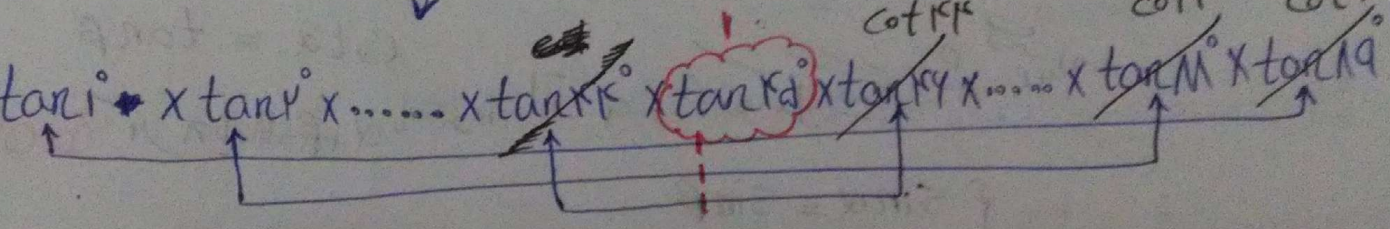
② حاصل $A=\log\tan 1^\circ+\log\tan 2^\circ+\cdots\cdots+\log\tan 89^\circ$ کدام است؟

$\log A + \log B + \log C + \cdots\cdots = \log ABC\cdots$ = نیست

۱) ۱
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

حل: $A=\log(\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \cdots\cdots \times \tan 89^\circ)$

$\alpha+\beta=90^\circ$ { $\sin$ = $\cos$ زاویه‌ی دیگری ؛ $\tan$ = $\cot$ زاویه‌ی دیگری



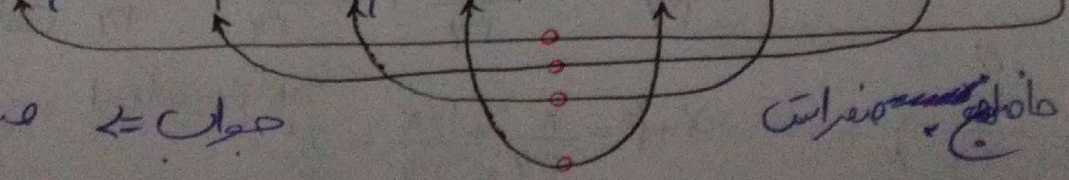

$A=\log 1 =$ صفر

③ حاصل $A=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cdots+\cos\frac{8\pi}{9}$ کدام است؟

$\alpha+\beta=180^\circ$ { $\cos\alpha + \cos\beta = 0$

۱) ۱
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲

بازنویسی $\Rightarrow \cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{6\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}$



$A=$ صفر $\Leftarrow$ حاصل

حاصل جمع صفر است

④ چرا حاصل $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos 179\alpha$ به ازای $\alpha=10^\circ$ صفر است؟

$\Rightarrow \cos 10+\cos 20+\cos 30+\cdots\cdots+\cos 1530+\cos 1540+\cos 1710$

۱) ۱
۲) صفر
۳) $\frac{1}{2}$
۴) ۲



صفر = جواب

$\alpha+\beta=180^\circ \Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta=0$

## روابط بین نسبت های مثلثاتی:

دسته‌ی اول: روابط اولیه

① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \end{cases}$

② $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

③ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

④ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

حاصل $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(2 + \tan^2\alpha + \cot^2\alpha)$ برابر است با؟ ②

راه حل اول: $\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\left(1 + \tan^2\alpha + 1 + \cot^2\alpha\right) = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right)$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = ①$

راه حل دوم: عددگذاری هوشمندانه برای کمک گرفتن از گزینه‌ها

فرض $\alpha = \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \begin{cases} \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan\alpha = \cot\alpha = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(2 + 1 + 1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)4 = ①$ ✓✓

۱) $\tan\alpha$
۲) $\cot\alpha$
۳) ۱
۴) $\frac{\sqrt{3}}{3} - 1$

حاصل $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$ برابر است با؟ ②

راه حل اول: $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha(1 - \cos^2\alpha)} = \frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha \times \sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\tan\alpha}$

راه حل دوم: فرض $\alpha = \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

حاصل $(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(1 + \tan^2\alpha) + \tan^2\alpha$ برابر است با؟ ①

یادآوری: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

۱) صفر
۲) ۱
۳) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$
۴) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$

راه حل اول: $(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(1 + \tan^2\alpha) + \tan^2\alpha$

$= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + \tan^2\alpha = 1 - \tan^2\alpha + \tan^2\alpha = ①$

راه حل دوم: فرض $\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\cos^4\alpha - \sin^4\alpha)(1 + \tan^2\alpha) + \tan^2\alpha$

$= (\underbrace{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}_{0})(\cos^2\alpha + \cos^2\alpha) + 1 = 0 + 1 = ①$

① حاصل $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}-(\tan\alpha+\cot\alpha)$ برابر چیست؟

۱) $-2$
۲) $2$
۳) $-1$
۴) صفر

یادآوری: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$

روش اول: $\frac{\sin^2\alpha}{\tan^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cot^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}-(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cdot\cot\alpha)=-2$

روش دوم: فرض $\alpha=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}-4=2-4=-2$

② اگر انتهای کمان رادیانی زاویه‌ی $\alpha$ در ناحیه دوم باشد حاصل $\sqrt{\frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}}$ برابر چیست؟

۱) $-\cot\alpha$
۲) $-\cos\alpha$
۳) $+\cot\alpha$
۴) $+\cos\alpha$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{1}{\sin^2\alpha}}}=\sqrt{\cos^2\alpha}=|\cos^2\alpha|=-\cos^2\alpha$

③ اگر $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{5}$ باشد آنگاه $\tan^3\alpha+\cot^3\alpha$ برابر چیست؟

۱) $110$
۲) $115$
۳) $\frac{422}{3}$
۴) $\frac{322}{3}$

یادآوری: $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\Rightarrow(\tan\alpha+\cot\alpha)^3-3\tan\alpha\cot\alpha(\tan\alpha+\cot\alpha)$

$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$

در عبارت $\Rightarrow 5^3-3(5)=125-15=110$ جواب

④ اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}$ باشد آنگاه $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$ برابر است؟

$\Rightarrow(\sin\alpha+\cos\alpha)^3-3\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)$

$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3}\xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین}}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{9}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{9}$

در عبارت کلی $\Rightarrow\frac{1}{27}+\frac{12}{27}=\frac{13}{27}$ جواب

۱) $\frac{13}{27}$
۲) $\frac{13}{81}$
۳) $\frac{17}{27}$
۴) $\frac{17}{81}$

① اگر $\tan\beta=2$ باشد آنگاه حاصل $R=\frac{\cos\beta}{\sin^3\beta+\sin\beta}$ کدام است؟

1) $\frac{1}{3}$
2) $\frac{4}{9}$
3) $\frac{5}{9}$
4) $\frac{5}{18}$ ✓

صورت و مخرج تقسیم بر $\cos^3\beta$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2\beta}}{\tan^3\beta+\frac{\sin\beta}{\cos^3\beta}}=\frac{1+\tan^2\beta}{\tan^3\beta+\frac{\sin\beta}{\cos^3\beta}}=\frac{1+\tan^2\beta}{\tan^3\beta+(\tan\beta\cdot(1+\tan^2\beta)}$$

$$=\frac{5}{8+10}=\frac{5}{18}$$

② اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$ باشد حاصل $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2$ کدام است؟

1) 4 ✓
2) 3
3) 2
4) 1

$$\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}$$

جایگذاری $\rightarrow (1+1)^2=4$ جواب

## دسته‌ی دوم: روابط جمع و تفاضل دو کمان

① $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

عامل و غیر عامل باز

② $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

خود خواه و لج باز

③ $\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

تذکر مهم: $\tan(\frac{\pi}{4}\pm\alpha)=\frac{1\pm\tan\alpha}{1\mp\tan\alpha}$

① اگر $\cot\alpha=\frac{3}{2}$ باشد حاصل $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟

$$\tan\alpha=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{1}{5}$$

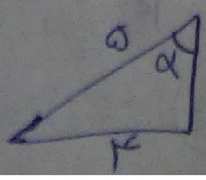
① حاصل $\frac{1+\tan30^\circ}{1-\tan30^\circ}$ کدام است؟

$$\tan(45+30)=\tan75^\circ$$

① اگر $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ باشد حاصل $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟ (سوال)

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{1}{7}$$

جواب




$\rightarrow \tan\alpha=\frac{4}{3}$

① اگر $\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = \frac{3}{2}$ باشد آنگاه حاصل $\tan^2\alpha$ کدام است؟

طرفین را بر $\cos^2\alpha$ تقسیم می‌کنیم $\Rightarrow \tan^2\alpha + 2 = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 2 = \frac{3}{2}(1+\tan^2\alpha)$

$= \frac{1}{2}\tan^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \tan^2\alpha = 1$

۱) ۱ ✓
۲) ۲
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{1}{2}$

② اگر $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ باشد و $\cos\alpha < 0$ آنگاه حاصل $\sin\alpha$ کدام است؟

یادآوری: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \rightsquigarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{5}$

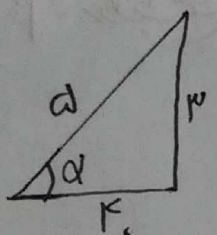
راه حل اول: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -2$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = +\frac{\sqrt{5}}{5}$

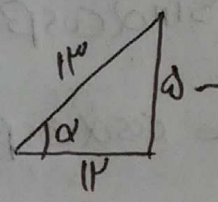
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (⊕ / ⊖)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
۳) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۴) $+\frac{\sqrt{5}}{5}$

نکته: اعداد معروف فیثاغورس




$\rightsquigarrow$ { ۳, ۴ ⟶ ۵ ; ۳n, ۴n ⟶ ۵n }




$\rightsquigarrow$ { ۵, ۱۲ ⟶ ۱۳ ; ۵n, ۱۲n ⟶ ۱۳n }

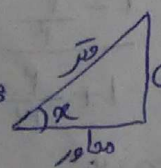
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$ $\quad \cot\alpha = \frac{4}{3}$

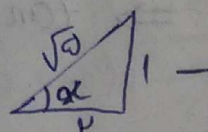
$\sin\alpha = \frac{5}{13}$ $\quad \cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\tan\alpha = \frac{5}{12}$ $\quad \cot\alpha = \frac{12}{5}$

راه حل دوم:




$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{1}{2}$ (مقدار مثبت)




$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = +\frac{\sqrt{5}}{5}$ (⊕)

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (⊖ / ⊖)

③ اگر $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = 2$ باشد آنگاه $\cot\alpha$ کدام است؟

عبارت داده شده را عکس می‌کنیم $\Rightarrow \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \cot\alpha + \frac{1}{2}$

طرفین به توان ۲ $\rightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} = (\cot\alpha + \frac{1}{2})^2 \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \cot^2\alpha + \frac{1}{4} + \cot\alpha$

$\Rightarrow \cot\alpha = \frac{3}{4}$ (جواب)

یادآوری: $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

تمرین: مقدار عبارات را بیابید.

$*\sin 75^\circ = \sin(45+30) = \sin 45\cdot\cos 30 + \cos 45\cdot\sin 30 = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$*\cos 75^\circ = \cos(45+30) = \cos 45\cdot\cos 30 - \sin 45\cdot\sin 30 = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$*\tan 75^\circ = \tan(45+30) = \frac{\tan 45+\tan 30}{1-\tan 45\cdot\tan 30} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-(1\times\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$*\cot 75^\circ = \frac{1}{\tan 75^\circ} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$*\sin 15^\circ = \sin(45-30) = \sin 45\cos 30 - \cos 45\cdot\sin 30 = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$*\cos 15^\circ = \cos(45-30) = \cos 45\cdot\cos 30 + \sin 45\sin 30 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$*\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$*\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(7) ساده شده عبارت $\frac{\sin 20\cos 10 + \cos 20\sin 10}{\cos 10\cdot\cos 50 + \sin 10\cdot\sin 50}$ برابر است؟

$\Rightarrow \frac{\sin(20+10)}{\cos(10-50)} = \frac{\sin 30}{\cos 50}$

یادآوری: if $\alpha+\beta=90$ ⇝ $\sin_{\text{یکی}} = \cos_{\text{دیگری}}$

$\Rightarrow 30+50=90 \Rightarrow$ جواب ۱

$\sin 10$ (۱
$2$ (۲
$\frac{1}{2}$ (۳
۱ (۴ ✓

(7) حاصل عبارت $\frac{\sin^2 35\cdot\cos^2 10 - \cos^2 35\cdot\sin^2 10}{\cos^2 35\cdot\cos^2 10 - \sin^2 35\cdot\sin^2 10}$ برابر است؟

یادآوری: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

حل: $\frac{(\sin^2 35\cdot\cos^2 10 - \cos^2 35\cdot\sin^2 10)}{(\cos^2 35\cdot\cos^2 10 - \sin^2 35\cdot\sin^2 10)} = \frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}$

$a=\sin^2 35\cdot\cos^2 10$, $b=\cos^2 35\cdot\sin^2 10$, $a'=\cos^2 35\cdot\cos^2 10$, $b'=\sin^2 35\cdot\sin^2 10$

$\tan 35$ (۱
$\cot 35$ (۲
$\frac{1}{2}\tan 35$ (۳
$\frac{1}{2}\cot 35$ (۴

جواب $= \frac{(\sin 35\cos 10 - \cos 35\sin 10)}{(\cos 35\cdot\cos 10 - \sin 35\sin 10)} \times \frac{(\sin 35\cdot\cos 10 + \cos 35\cdot\sin 10)}{(\cos 35\cdot\cos 10 + \sin 35\cdot\sin 10)}$

$= \frac{\sin(35-10)\times\sin(35+10)}{\cos(35+10)\times\cos(35-10)} = \frac{\sin 25\times\sin 65}{\cos 65\times\cos 25} = \tan 25^\circ$ جواب

$\sin_{\text{یکی}} = \cos_{\text{دیگری}}$

$*25+65=90$

دیگر خود دانید:

یک بار تفاضل دو کمان یک بار جمع کمان‌ها $\Rightarrow \frac{\sin 75^\circ \times \sin 45^\circ}{\cos 75^\circ \times \cos 45^\circ} = \tan 45^\circ$

(T) اگر $\tan\alpha$ و $\tan\beta$ ریشه‌های معادله $x^2+3x+10=0$ باشد آنگاه حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ کدام است؟

$S = -\frac{b}{a} = -3$

$P = \frac{c}{a} = 10$

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$ جواب

1) $\frac{1}{9}$
2) $3$
3) $-9$
4) $\frac{1}{3}$

(T) حاصل $\frac{1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ}$ کدام است؟

$\Rightarrow \frac{1-\tan 20^\circ}{1+\tan 20^\circ} = \tan(45^\circ-20^\circ) = \tan 25^\circ$ جواب

1) $\tan 45^\circ$
2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $\tan 65^\circ$
4) $\tan 25^\circ$

(T) حاصل $\tan\alpha+\tan(\alpha+\frac{\pi}{3})+\tan(\alpha+\frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

راه حل اول: استفاده از بسط $\tan(\alpha+\beta)$ که طولانی است

راه حل دوم: عددگذاری هوشمندانه

$\alpha=0$ فرض $\Rightarrow 0+\sqrt{3}-\sqrt{3}=0$

نزدیک صحیح است که ضرب صفر را بدهد اگر صفر را بخورد

1) $3\tan 3\alpha$ ✓
2) $3\tan(\alpha-\frac{\pi}{4})$
3) $3\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$
4) $\cot(\alpha+\frac{\pi}{3})$

(T) خلاصه شده‌ی عبارت $\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})+\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

راه حل اول:

$\Rightarrow \sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \cos\alpha$ جواب

($\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{3}$ هر کدام $\frac{1}{2}\cos\alpha$)

راه حل دوم:

$\alpha=0$ فرض $\rightsquigarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

نزدیک صحیح است که از ای $\alpha=0$ خروجی (1) را تحویل دهد.

1) $\sin\alpha$
2) $\sqrt{3}\sin\alpha$
3) $\sqrt{3}\cos\alpha$
4) $\cos\alpha$ ✓

(T) اگر $3\sqrt{3}\sin\alpha+9\cos\alpha=4\sqrt{3}$ باشد آنگاه حاصل $\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

$\sin(\alpha+\frac{\pi}{3}) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = ?$ خواسته قسمتی

$\Rightarrow 3\sqrt{3}\sin\alpha+9\cos\alpha = 4\sqrt{3} \xrightarrow[\text{تقسیم بر } 9\sqrt{3}]{\text{طرفین}} \frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{4}}{9}$ جواب

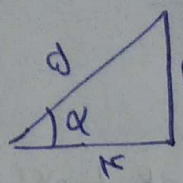
1) $\frac{\sqrt{4}}{12}$
2) $\frac{\sqrt{4}}{9}$
3) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
4) $\frac{2\sqrt{4}}{9}$

① اگر $\alpha$ زاویه‌ی منفرجه و $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ باشد مقدار $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)$ کدام است؟

$$\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}}=\boxed{\frac{1}{7}}$$ جواب

نکته: این عبارت یعنی $\cos\alpha<0$

۱) $-7$
۲) $-\frac{1}{7}$
۳) $\frac{1}{7}$
۴) $7$




$\tan\alpha=-\frac{3}{4}$

$\tan=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (+ / −) منفی خواهد بود

② اگر $\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{2}{3}$ باشد حاصل $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)$ کدام است؟

$\cot\alpha=\frac{2}{3}$

$\tan\alpha=\frac{3}{2}$

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\boxed{-\frac{1}{5}}$$ جواب

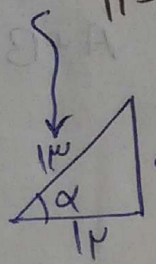
۱) $-5$
۲) $-\frac{1}{5}$
۳) $5$
۴) $\frac{1}{5}$

③ اگر $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ و $\tan\beta=\frac{3}{4}$ باشد و $\alpha$ و $\beta$ زاویه‌های حاده باشند مطلوب است محاسبه‌ی $\sin(\alpha+\beta)$؟

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow(\frac{5}{13}\times\frac{4}{5})+(\frac{12}{13}\times\frac{3}{5})=\frac{20}{65}+\frac{36}{65}=\boxed{\frac{56}{65}}$$



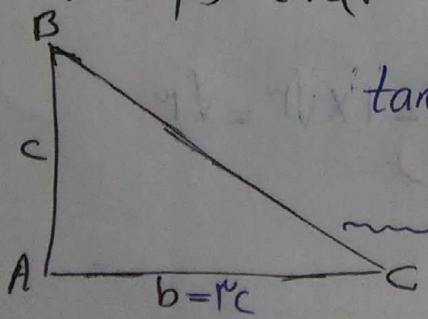




④ اگر $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{1}{4}$ باشد حاصل $\sin\alpha+\cos\alpha$ کدام است؟

$$\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}}$$

⑤ اگر $\hat{A}=90$، $b=3c$ باشد حاصل $\tan(\beta-c)$ کدام است؟




$$\tan(\beta-c)=\frac{\tan\beta-\tan c}{1+\tan\beta\tan c}=\frac{3-\frac{1}{3}}{1+1}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\boxed{\frac{4}{3}}$$

$\tan\alpha=\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

$\tan\beta=\frac{3c}{c}=3$

$\tan c=\frac{c}{3c}=\frac{1}{3}$

۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $\frac{2}{3}$

T) اگر حاصل $\cos\alpha+\tan 2\alpha\sin\alpha=\frac{\cos m\alpha}{\cos n\alpha}$ باشد مقدار $\frac{m}{n}$ کدام است؟

۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$ ✓
۳) $\frac{3}{2}$
۴) $\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \cos\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}\sin\alpha=\frac{\cos 2\alpha\cos\alpha+\sin 2\alpha\sin\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos(2\alpha-\alpha)}{\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{\cos m\alpha}{\cos n\alpha}\rightsquigarrow \begin{matrix} m=1 \\ n=2 \end{matrix}\rightsquigarrow \frac{m}{n}=\frac{1}{2}$$

T) حاصل $\tan 10^\circ+\tan 50^\circ+\sqrt{3}\tan 10^\circ\tan 50^\circ$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\sqrt{3}$ ✓
۳) ۱
۴) ۳

یادآوری: $\tan\alpha+\tan\beta+$ یک ضریب ثابت $\tan\alpha\tan\beta$ ؛ آن ضریب ثابت

جواب تست $=\sqrt{3}$

T) اگر $\tan(\underbrace{\alpha-\beta}_{B})=3$ ، $\tan(\underbrace{\alpha+\beta}_{A})=2$ باشد مقدار $\tan\underbrace{2\alpha}_{A+B}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) $-1$ ✓
۳) ۲
۴) $-2$

$$A+B=2\alpha\rightsquigarrow \tan A+B=\frac{\tan A+\tan\beta}{1-\tan A\cdot\tan\beta}=\frac{5}{-5}=-1$$

T) حاصل عبارت $\frac{\tan^2 82/5^\circ-\tan^2 7/5^\circ}{1-\tan^2 82/5^\circ\cdot\tan^2 7/5^\circ}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۳
۳) $\sqrt{3}$
۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

یادآوری: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

اصل کاربری: $\frac{\overbrace{\tan^2 82/5^\circ}^{a}-\overbrace{\tan^2 7/5^\circ}^{b}}{a'\underbrace{(1-\tan^2 82/5^\circ\cdot\tan^2 7/5^\circ)}_{b'}}=\frac{a^2-b^2}{a'^2-b'^2}$

$$\Rightarrow \frac{\tan 82/5^\circ-\tan 7/5^\circ}{1-\tan 82/5^\circ\cdot\tan 7/5^\circ}\times\frac{\tan 82/5^\circ+\tan 7/5^\circ}{1+\tan 82/5^\circ\cdot\tan 7/5^\circ}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

نکته دیگر: $\tan 70^\circ\times\tan 25^\circ=\sqrt{3}\times 1=\sqrt{3}$

دستی سوم: روابط $2\alpha$

① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

تبدیلی: $\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha$

مثال: $\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ = \dfrac{1}{2}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

تبدیلی:
$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2} \longrightarrow 1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \\ \tan^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} \end{cases}$$

③ $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

توانی: $\sin^2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

اتحادهای کمکی:
$$\begin{cases} \sin\alpha+\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin\alpha-\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan\alpha+\cot\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha} \\ \tan\alpha-\cot\alpha = -2\cot 2\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \\ \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \end{cases}$$

ساده شده‌ی $\dfrac{(1+\tan^2\alpha)(1+\cot^2\alpha)}{1-\sin^2\alpha-\cos^4\alpha}$ برابر است با:

① $8\cos^{-2}2\alpha$
② $8\sin^{-2}2\alpha$
③ $16\cos^{-2}2\alpha$
④ ✓ $16\sin^{-2}2\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2\alpha}\times\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)} \quad (1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\cot^2\alpha}\times\frac{1}{\sin^2\alpha}}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \frac{1}{(\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha)^2} = \frac{1}{(\sin\alpha\cdot\cos\alpha)^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)^4} = \frac{1}{16}\sin^4 2\alpha$$
$$= 16\sin^4 2\alpha$$

(۱) حاصل عبارت $\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$ برابر چیست؟

$\cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ \xrightarrow{\frac{1}{2}\sin 80^\circ \quad \frac{1}{2}\sin 160^\circ \quad \frac{1}{2}\sin 40^\circ} \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} \times \cos 20^\circ \times \cos 40^\circ \times \cos 80^\circ$

* $\sin 20^\circ$ را در خودش ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$\Rightarrow \frac{\frac{1}{8}\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{16}$ ۴) $\frac{1}{32}$

(۲) از عبارت $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha + \cos\alpha$ مقدار $\tan\alpha$ کدام است؟

یادآوری: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\Rightarrow \underbrace{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}_{\frac{1}{2}\sin\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\sin\alpha = -\cos\alpha \xrightarrow[\cos\alpha]{\text{طرفین} \div} \frac{1}{2}\tan\alpha = -1 \Rightarrow \tan\alpha = -2$

۱) ۲ ۲) $-2$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

(۳) اگر $\cos\alpha + 2\cos\alpha\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0$ باشد بر این اساس $\sin 2\alpha$ کدام است؟

$\Rightarrow \cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \Rightarrow 2\sin\alpha = -\cos\alpha \xrightarrow[\cos\alpha]{\text{طرفین} \div} 2\tan\alpha = -1 \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \longrightarrow \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2(-\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{4}{5}$

۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $-\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{3}{5}$ ۴) $-\frac{3}{5}$

(۴) حاصل $\sin 190^\circ \sin 10^\circ$ کدام است؟

$\sin 190^\circ = \sin(110^\circ + 10^\circ) = -\sin 10^\circ$

$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ + 10^\circ) = +\cos 10^\circ$

یادآوری: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \Longrightarrow -\sin 10^\circ \cdot \cos 10^\circ = -\frac{1}{2}\sin 20^\circ = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{2}{4}$ ۴) $-\frac{2}{4}$

(۵) حاصل $\left(\sin\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{8}\right)^2$ کدام است؟

یادآوری: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow (a-b)^2 - (a+b)^2 = -2ab \Rightarrow -2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = -2 \times \frac{1}{2} \times \sin\frac{\pi}{4}$

$= -2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

۱) $-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) $2$ ۴) $-2$

T) اگر $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3}{5}$ باشد مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

برای حل چنین سئی طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = ?$

طرفین توان ۲ $\longrightarrow$ $\underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{9}{25}$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{9}{25}-1$

$\Rightarrow \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin 2\alpha=\boxed{\frac{-16}{25}}$

۱) $-\frac{4}{5}$
۲) $\frac{-8}{25}$
۳) ✓ $\frac{-16}{25}$
۴) $\frac{-24}{25}$

T) اگر $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$ باشد در چنین شرایطی $\tan 2\alpha$ را بیابید.

طرفین توان ۲ $\longrightarrow$ $\underbrace{\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha}_{1}+2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=-\frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2(2\alpha)=\sin 4\alpha$

$\Rightarrow \sin 4\alpha=-\frac{3}{4}$

$1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \rightsquigarrow 1+\cot^2 4\alpha=\frac{1}{\sin^2 4\alpha}=\frac{16}{9}$

$\Rightarrow \cot^2 4\alpha=\frac{16}{9}-1=\frac{7}{9}$

$\Rightarrow \cot 4\alpha=\pm\frac{\sqrt{7}}{3} \rightsquigarrow \tan 4\alpha=\boxed{\pm\frac{3}{\sqrt{7}}}$

۱) $+\frac{\sqrt{7}}{3}$
۲) ✓ $\pm\frac{3}{\sqrt{7}}$
۳) $-\frac{\sqrt{7}}{3}$
۴) $2\cos\alpha$

T) حاصل عبارت $A=\cos 2\alpha+\frac{-1}{1+\tan^2\alpha}+\frac{2}{1+\cot^2\alpha}$ کدام است.

($\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $\frac{1}{\sin^2\alpha}$)

روش اول: $\Rightarrow A=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=\boxed{\sin^2\alpha}$

روش دوم: عددگذاری هوشمندانه $\alpha=\frac{\pi}{6}$ فرض $\longrightarrow A=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{4}}$

۱) $\cos^2\alpha$
۲) ۱
۳) ✓ $\sin^2\alpha$
۴) $-1$

نسبتی صحیح است به ازای همه‌ی $\alpha$ ها ضروری $\frac{1}{4}$ را برابر $\frac{\pi}{6}$

T) اگر $\alpha=\frac{\pi}{12}$ باشد آنگاه حاصل $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ کدام است؟

صورت و مخرج: روش سریع: بر $\cos\alpha$ تقسیم می‌کنیم

$\Rightarrow \frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=-\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=\boxed{-\sqrt{3}}$

۱) $2-\sqrt{3}$
۲) $2\sqrt{3}$
۳) ✓ $-\sqrt{3}$
۴) ۱

(T) اگر $\cos(x+\frac{\pi}{3})+\cos(x-\frac{\pi}{3})=\frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x=\frac{2}{3} \qquad \cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\frac{4}{9}-1=\boxed{-\frac{1}{9}}$$ جواب

۱) $-\frac{2}{9}$
۲) $-\frac{1}{9}$
۳) $\frac{1}{9}$
۴) $\frac{2}{9}$

(T) ساده شده‌ی عبارت $\frac{\cos 2x+3\cos x+1}{3\sin x+\sin 2x}$ کدام است؟

$$A=\frac{2\cos^2 x-1+3\cos x+1}{3\sin x+2\sin x\cdot\cos x}=\frac{\cos x(2\cos x+3)}{\sin x(3+2\cos x)}=\frac{\cos x}{\sin x}=\boxed{\cot x}$$ جواب

۱) $\frac{1}{2}\cos x$
۲) $\cot x$ ✓
۳) $\frac{\cos 2x}{\sin x}$
۴) $\cot 2x$

عددگذاری هوشمندانه و روش دوم ⟸ فرض $x=\frac{\pi}{4}$ ⟿ $A=\frac{0+3\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{3\frac{\sqrt{2}}{2}+1}=1$

= نزدیک‌ای درست است ← جوابی ① برمی‌گردد.

(T) اگر $\tan\frac{x}{2}=\sqrt{2}$ باشد حاصل $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ کدام است.

$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ ← $2\alpha$

یادآوری: $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\tan^2\alpha$

$$\tan^2\frac{x}{2}=\boxed{2}$$ جواب

۱) $2\sqrt{2}$
۲) $\sqrt{2}$
۳) $2$ ✓
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(T) ساده شده‌ی عبارت $\frac{2\sin 20-\sin 40}{2\sin 20+\sin 40}$ کدام است.

$*\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{2\sin 20-(2\sin 20\cdot\cos 20)}{2\sin 20+2\sin 20\cos 20}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin 20(1-\cos 20)}{2\sin 20(1+\cos 20)}=\frac{1-\cos 20}{1+\cos 20}=\tan^2 10$$

۱) $\tan^2 20$ ✓
۲) $\tan 10$
۳) $\tan 20$
۴) $\tan^2 40$

(T) حاصل $A=\frac{\tan\alpha}{2}\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)^2$ به ازای $\alpha=\frac{\pi}{12}$ کدام است.

$$A=\frac{2\tan\alpha\left(1-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 4\alpha=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ✓
۲) $\frac{\sqrt{2}}{8}$
۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

یادآوری: $\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan^2\alpha$

مثال: $\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \tan^2 15^\circ$ * $\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ} = \tan^2 22.5^\circ$

مثال: حاصل $\frac{1+\cos 50^\circ}{1-\cos 50^\circ}$ برابر چیست؟

$$\frac{1+\cos 50^\circ}{1-\cos 50^\circ} = \frac{1}{\tan^2 25^\circ} = \cot^2 25^\circ$$

مثال: حاصل $\frac{2\sin 45^\circ + \sin 10^\circ}{2\sin 45^\circ - \sin 10^\circ}$ کدام است؟

یادآوری: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\Rightarrow \frac{2\sin 45^\circ + 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ}{2\sin 45^\circ - 2\sin 45^\circ \cos 45^\circ} = \frac{2\sin 45^\circ (1+\cos 45^\circ)}{2\sin 45^\circ (1-\cos 45^\circ)}$$

$$= \frac{1+\cos 45^\circ}{1-\cos 45^\circ} = \frac{1}{\tan^2 22.5^\circ} = \cot^2 22.5^\circ$$

تمرین: مقادیر زیر را حساب کنید.

یادآوری: $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ $\tan^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

* $\sin^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

* $\cos^2 22.5^\circ = \frac{1+\cos 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

* $\tan^2 22.5^\circ = \frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

* $\cot^2 22.5^\circ = \frac{1}{\tan^2 22.5^\circ} = \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$

(۲) اگر $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1}{5}$ باشد $\tan 2\alpha$ کدام است.

$$\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha) = \frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow 1+\tan\alpha = 5-5\tan\alpha \Rightarrow 6\tan\alpha = 4$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{2}{3}}{1-(\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

(۱) $\frac{5}{12}$ (۲) $\frac{12}{119}$ (۳) $2.4$ (۴) $\frac{5}{24}$

پاسخ: از طرفین $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را می‌خواهیم جواب حاصل شود

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2(\frac{2}{3})}{1+(\frac{2}{3})^2} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{13}{9}} = \frac{12}{13} \quad / \quad \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{4}{9}}{1+\frac{4}{9}} = \frac{5}{13}$$

① اگر $\tan\alpha - \cot\alpha = 4$ باشد حاصل $\tan 2\alpha - \cot 2\alpha$ کدام است؟

$$\tan 2\alpha - \cot 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} - \frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} \xrightarrow{\tan\alpha = t} \frac{2t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{2t} = ?$$

$$\tan\alpha - \cot\alpha = 4 \longrightarrow t - \frac{1}{t} = 4 \Rightarrow \frac{t^2-1}{t} = 4 \Rightarrow t^2 - 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 - t^2 = -4t$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{1-t^2} - \frac{1-t^2}{2t} = \frac{2t}{-4t} - \frac{-4t}{2t} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

جواب

① اگر $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = 2$ باشد حاصل $\tan\alpha$ کدام است؟

یادآوری: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2} = 2$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\left(2\times\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

($\alpha$)

جواب

۱) $-\frac{3}{4}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $-\frac{3}{2}$
۴) $-2$

① اگر $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = 2\sin\alpha$ باشد آنگاه مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است.

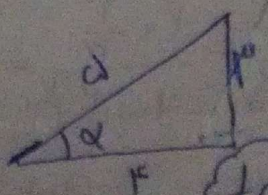
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = ? \rightsquigarrow \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}$$

جواب

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\alpha = 2\sin\alpha \xrightarrow[\cos\alpha]{\text{طرفین تقسیم بر}} -1 = 2\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{2}$$

① اگر $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\alpha$ منفرجه باشد حاصل $\tan 2\alpha$ کدام است؟

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{24}{7}$$




$\tan\alpha = -\frac{3}{4}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ (+ / −)

(−)

۱) $-\frac{24}{7}$
۲) $-\frac{7}{24}$
۳) $-\frac{24}{25}$
۴) $-\frac{7}{25}$

① اگر $\tan\alpha=3$ باشد آنگاه مقدار عددی $\tan(2\alpha-\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

یادآوری: $\tan(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$ ، $\tan(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

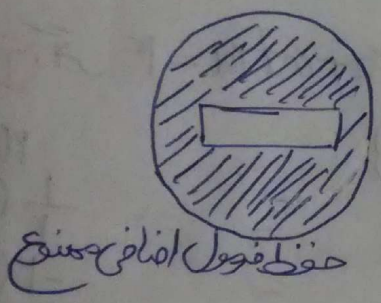
یادآوری: توابع فرد: $\sin\alpha$، $\tan\alpha$، $\cot\alpha$ (منفی را بیرون می‌دهد) — تابع زوج: $\cos\alpha$ (منفی را می‌بلعد)

۱) ۷
۲) $\frac{1}{7}$
۳) $-7$
۴) $-\frac{1}{7}$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha-\frac{\pi}{4})=-\tan(\frac{\pi}{4}-2\alpha)=-\frac{1-\tan2\alpha}{1+\tan2\alpha}=\frac{\frac{7}{4}}{-\frac{1}{4}}=-7$$ (جواب)

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4}$$

② اگر $\frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{1}{2}$ باشد مقدار $\tan3\alpha$ کدام است؟




۱) ۵
۲) ۵/۵
۳) ۶
۴) ۶/۵

$$\tan3\alpha=\tan(\underbrace{2\alpha}_{A}+\underbrace{\alpha}_{B})$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=?$$

$$*\ \frac{\sin2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha=\frac{1}{2}\ *$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}=\frac{4}{3}\ (*)=\tan2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{4}{3}+(\frac{1}{2})}{1-(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2})}=\frac{11}{2}=5/5$$ (جواب)

پرسش: اگر طراح $\cot3\alpha$ را می‌خواست جواب چه بود؟

$$\cot3\alpha=\frac{1}{\tan3\alpha}=\frac{2}{11}$$

③ اگر $\frac{2\cos x}{\sin x+3\cos x}=2$ باشد حاصل $\cot2x$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$
۲) $-\frac{4}{3}$
۳) $\frac{3}{4}$
۴) $-\frac{3}{4}$

$$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2x}=\frac{2(-2)}{1-(-2)^2}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$$ (جواب)

$$\Rightarrow \frac{2\cos x}{\sin x+3\cos x}=2\Rightarrow 2\cos x=2\sin x+6\cos x\Rightarrow -4\cos x=2\sin x\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}=-2$$

$$\Rightarrow \tan x=-2$$

① حاصل $\frac{1}{\tan 22.5^\circ - \cot 22.5^\circ}$ برابر است

$\tan\alpha - \cot\alpha = -2\cot 2\alpha$

$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$\Rightarrow \frac{1}{\tan 22.5^\circ - \cot 22.5^\circ} = \frac{1}{-2\cot 45^\circ} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

۱) ۱
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $-1$
۴) $-\frac{1}{2}$

② حاصل $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$ برابر است

$\tan 15^\circ + \cot 15^\circ = \frac{2}{\sin(2\times 15^\circ)} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$

۱) ۴
۲) ۳
۳) ۲
۴) ۱

③ اگر $\tan 2\alpha + \cot 2\alpha = 4$ باشد حاصل $\sin 4\alpha$ برابر است.

$\tan 2\alpha + \cot 2\alpha = \frac{2}{\sin 4\alpha} = 4 \Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

۱) ۲
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $-2$
۴) $-\frac{1}{2}$

④ مقدار عددی $9\sin^2\alpha - 24\sin^4\alpha + 16\sin^6\alpha$ برابر است با؟ $\alpha = \frac{\pi}{18}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a = 3\sin\alpha$, $b = 4\sin^3\alpha$

$\Rightarrow (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)^2 = (\sin 3\alpha)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha$

دو اتحاد مهم (حفظ باشید)

$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

۳) اگر $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$ باشد حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x + \sin^4 x + \cos^4 x$ برابر است با:

$\frac{\sqrt{5}}{9}$ (۱
$\frac{4}{9}$ (۲
$\frac{8}{9}$ (۳
$\frac{12}{9}$ (۴

$\underbrace{\sin^6 x + \cos^6 x}_{A} + \underbrace{\sin^4 x + \cos^4 x}_{B}$

$A = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{7}{4}$

$B = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{7}{9}$

$\Leftarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \xrightarrow[\text{طرفین}]{\text{توان ۲}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow A + B = \frac{7}{4} + \frac{7}{9} = \frac{63+28}{36} = \boxed{\frac{91}{36}}$ جواب

۴) اگر $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{5}$ باشد حاصل $\sin^6 x + \cos^6 x$ برابر است با:

$\frac{1}{5}$ (۱
$\frac{2}{5}$ (۲
$\frac{3}{5}$ (۳
$\frac{4}{5}$ (۴

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{5}$

$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 3\left(\frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{2}{5}}$ جواب

۵) حاصل $A = \left[\tan \frac{x}{5}\right] + \left[\tan \frac{4x}{5}\right]$ برابر است با:

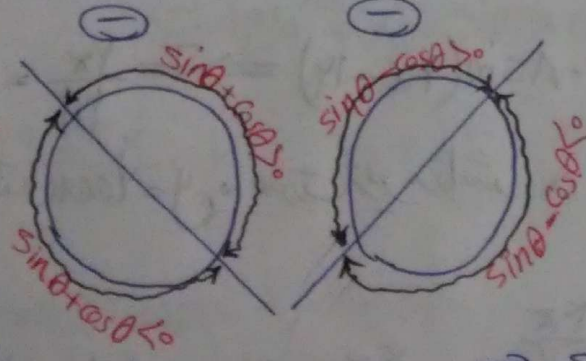
$A = \left[\tan \frac{x}{5}\right] + \left[-\tan \frac{x}{5}\right] \xrightarrow{u \notin Z} \text{جواب} = \boxed{-1}$

$\tan\left(x - \frac{x}{5}\right) = -\tan \frac{x}{5}$

یادآوری: $[u] + [-u] = \begin{cases} 0 & u \in Z \\ -1 & u \notin Z \end{cases}$

۶) اگر $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{4\pi}{3}$ باشد آنگاه حاصل $|\sin x - \cos x| + |\sin x + \cos x|$ برابر است با:

$2\cos x$ (۱
$-2\cos x$ (۲
$2\sin x$ (۳
$-2\sin x$ (۴




نتیجه:

$\Rightarrow -\sin x + \cos x - \sin x - \cos x = \boxed{-2\sin x}$ جواب

۷) اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ باشد حاصل $\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}}$ برابر است با:

$\sqrt{\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}} = \sqrt{\frac{(\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}} = \frac{|\sin x + \cos x|}{|\sin x - \cos x|} = \frac{\sin x + \cos x}{-\sin x + \cos x} \xrightarrow[\div \cos x]{\text{صورت و مخرج}} \frac{\tan x + 1}{-\tan x + 1}$

$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ جواب

نتیجه:
$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$
$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$

دوره‌ی تناوب $T$ :

$\text{if } T>0 \text{ و } f(x+T)=f(x) \longrightarrow$ $T$ دوره‌ی تناوب تابع $f$ می‌باشد

مثال: $f(x)=\sin x \longrightarrow T=2\pi$

$\underbrace{\sin(x+2\pi)}_{f(x+T)}=\underbrace{\sin x}_{f(x)}$

برای توابع مثلثاتی:

$$\begin{cases} y=k\sin(ax+b)+c \\ y=k\cos(ax+b)+c \end{cases} \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} y=k\tan(ax+b)+c \\ y=k\cot(ax+b)+c \end{cases} \Longrightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

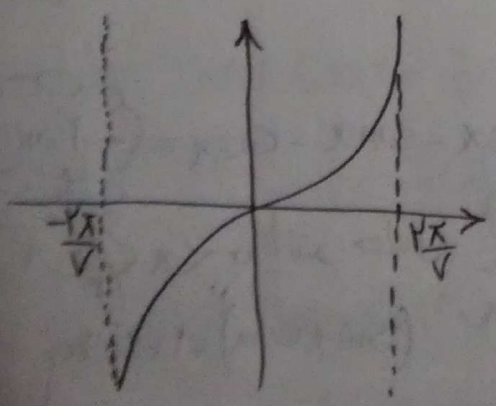
نکته: تنها عامل موثر در تعیین دوره‌ی تناوب توابع مثلثاتی ضریب $x$ موجود در بیان تابع مثلثاتی است

مثال: $y=A\sin(2x+a) \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

$y=4\sin(2x+10)$

$y=-A\sin(4x-14) \Longrightarrow T=\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$

① قسمتی از شکل $y=\tan x$ به صورت زیر می‌باشد $a$ را بیابید.




$T=\frac{4\pi}{7}$

$T=\frac{\pi}{|a|}$

$\Longrightarrow \frac{4\pi}{7}=\frac{\pi}{|a|} \Rightarrow |a|=\frac{7}{4} \rightarrow a=\pm\frac{7}{4}$

## نکات

① دوره‌ی تناوب دو تابع باید هم سنخ و هم جنس باشند تا مضرب و تفاضل آن‌ها متناوب باشد.

مثال: $y = \sin 2x + \cos \pi x$

$T_1 = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ ، $T_2 = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$

$\Rightarrow 2$ و $\pi$ هم جنس نیستند

تابع $y$ متناوب نمی‌باشد.

② برای محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب جمع یا تفاضل چند تابع ابتدا دوره‌ی تناوب تک تک آن‌ها را بدست می‌آوریم و در صورت هم جنس بودن دوره‌ی تناوب برای محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب کلی داریم:

$T_{\text{کلی}} = \text{ک م م آهای بدست آمده}$

مثال: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y = \underbrace{\cos 3x}_{①} + \underbrace{\sin \frac{x}{2}}_{②} + \underbrace{\tan x}_{③}$ کدام است؟

$T_1 = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

$T_2 = \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = \frac{\pi}{2}$

$T_3 = \frac{\pi}{1} = \pi$

مضرج ها را کپسل می‌کنیم

$T_1 = \frac{4\pi}{6}$

$T_2 = \frac{3\pi}{6}$

$T_3 = \frac{6\pi}{6}$

$\Rightarrow T_{\text{کلی}} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$

③ برای پیدا کردن دوره‌ی تناوب توابع تا جایی که ممکن است عبارت را به صورت ساده‌تری درمی‌آوریم اگر این کار را نکنیم ممکن است دوره‌ی تناوب بدست آمده اصلی نباشد.

مثال: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $f(x) = \sin 2x \cos 2x$ کدام است.

روش غلط $\Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$ ، $T_2 = \frac{2\pi}{|2|} = \pi \Rightarrow$ اصلی $T = \pi$ ع

روش صحیح $\Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$

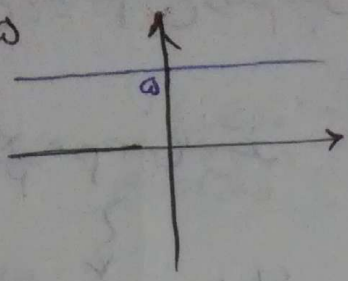
$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2(2x) = \frac{1}{2}\sin 4x \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ من

مثال: دوره‌ی تناوب اصلی تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \tan 2x - \cot 2x$ کدام است؟

$f(x) = -2\cot 4x \Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{4}$

④ توابع ثابت متناوب می‌باشند ولی دوره‌ی تناوب اصلی ندارند.

مثال: $y=5$

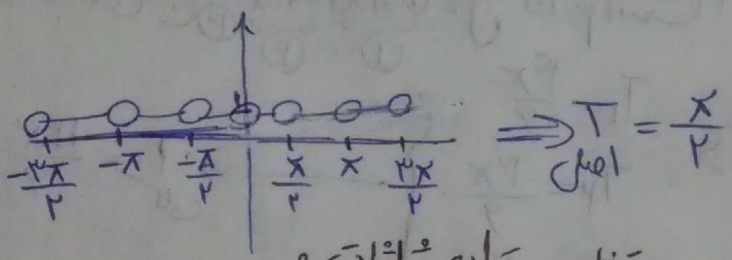



دوره‌ی تناوب دارند ولی دوره‌ی تناوب اصلی ندارد چون کوچکترین مقدار تکرار شونده معلوم نیست.

مثال: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=\tan x \cdot \cot x$ کدام است.

روش غلط $\Rightarrow y=1 \longrightarrow$ تابع ثابت $\longrightarrow$ دوره‌ی تناوب اصلی ندارد ع

روش درست $\Rightarrow \tan x \cdot \cot x = 1 \quad x \neq \frac{k\pi}{2}$




$\Rightarrow T_{\text{اصلی}} = \frac{\pi}{2}$

⑤ اثر توان و قدرمطلق روی دوره‌ی تناوب توابع مثلثاتی:

* اگر توابع sin و cos به توان یک عدد فرد برسند دوره‌ی تناوبشان تغییر نمی‌کند.

مثال: $y=\sin x \longrightarrow T=2\pi$

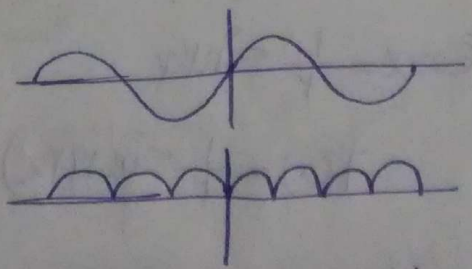
$y=\sin^9 x \longrightarrow T=2\pi$

* دوره‌ی تناوب توابع $\sin^{2n}(ax)$ و $\cos^{2n}(ax)$ و $|\sin ax|$ و $|\cos ax|$ برابراست با $\frac{\pi}{|a|}$

* توان های زوج و قدرمطلق دوره‌ی تناوب sin و cos را نصف می‌کنند.

مثال: $y=\sin x \longrightarrow T=2\pi$

$y=|\sin x| \Rightarrow T=\pi$



* توابع tan و cot به هرتوانی برسند (چه فرد چه زوج) دوره‌ی تناوبشان تغییر نمی‌کند اگر داخل قدرمطلق هم بروند دوره‌ی تناوبشان تغییر نمی‌کند

مثال: دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=\underbrace{|\cos\pi x|}_{①}+\underbrace{\tan^2\frac{\pi x}{2}}_{②}+\underbrace{2\cos^3 x}_{③}$ کدام است.

$T_1=\frac{2\pi}{\pi}$

$T_2=\frac{\pi}{|\frac{1}{2}|}=2\pi$

$T_3=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

مضرب ها را یکسان می‌نویسیم

$T_1=\frac{2\pi}{\pi}$

$T_2=\frac{9\pi}{\pi}$

$T_3=\frac{4\pi}{\pi}$

$\Rightarrow T=18\frac{\pi}{\pi}=\frac{\pi}{4}$ جواب

* توابع غیرمثلثاتی نیز می‌توانند متناوب باشند.

معروف‌ها (حفظ باشید) =

① $y=ax-[ax] \longrightarrow T=\frac{1}{|a|}$

② $y=[ax]+[-ax] \longrightarrow T=\frac{1}{|a|}$

③ $y=(-1)^{[ax]} \longrightarrow T=\frac{2}{|a|}$

① دوره‌ی تناوب اصلی $y=\underbrace{\pi x-[\pi x]}_{①}+\underbrace{\cos^4\pi x}_{②}$ کدام است.

۱) $2\pi$
۲) $1$
۳) $\frac{\pi}{2}$
۴) $-2\pi$

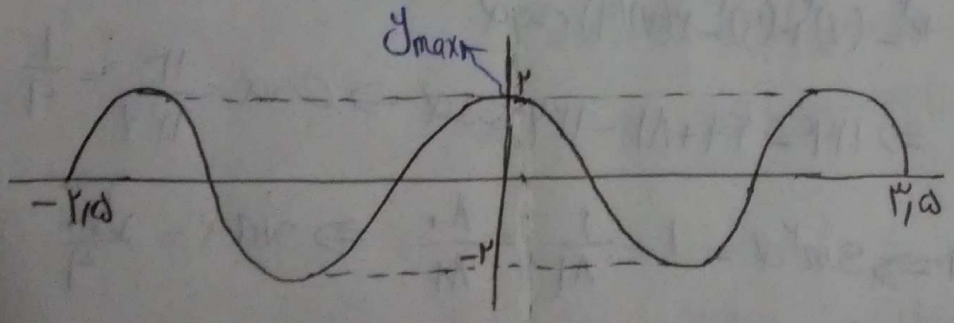
① $T_1=\frac{1}{|\pi|}=\frac{1}{\pi}$

② $T_2=\frac{2\pi}{4\pi}=1$

$\Longrightarrow T=$ ① جواب اصلی

① نسل مقابل مربوط به تابع $y=a\sin(\frac{1}{2}+bx)x$ است $a.b$ کدام است.

۱) $1$
۲) $2$
۳) $3$
۴) $4$




تابع ۳ بار تناوب کرده است $\quad x=0 \longrightarrow y_{max}=2$

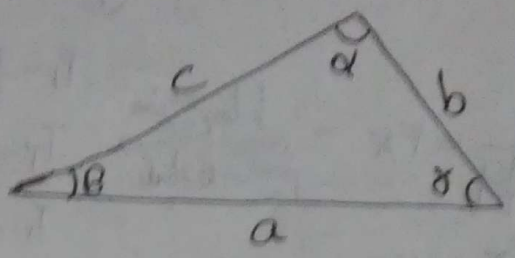
$\Rightarrow 2=a\sin\frac{\pi}{2} \longrightarrow 2=a\times 1 \Rightarrow a=2$

$2T=4 \longrightarrow T=2=\frac{2\pi}{|b|\times 1} \Rightarrow b=1$

$a.b=1\times 2=$ ② جواب

# کاربرد مثلثات

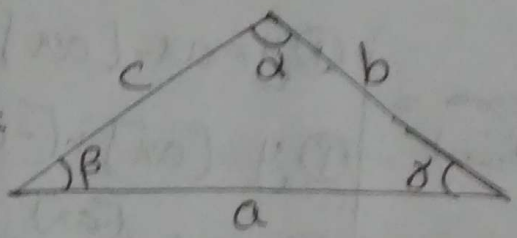
①



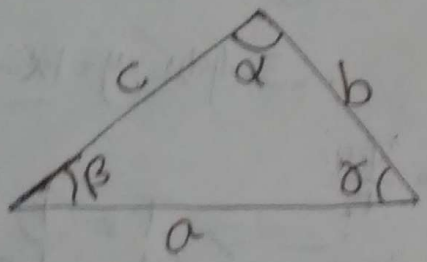

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

②

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma \end{cases}$$



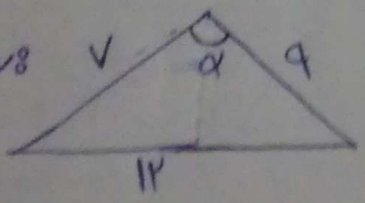

③




$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma=\frac{1}{2}ac\sin\beta=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

ⓐ مساحت مثلثی به اضلاع ۱۲، ۹ و ۷ واحد کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

روش اول




$$12^2=(7)^2+(9)^2-2(7)(9)\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 144=49+81-126\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{16}{126}=\frac{1}{9}$$

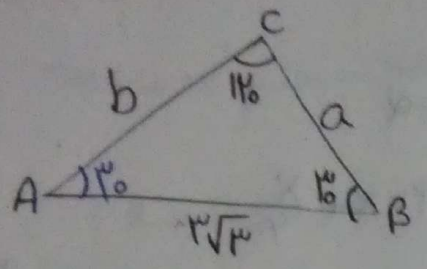
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{80}}{9}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{1}{2}\times 9\times 7\times\frac{\sqrt{80}}{9}=\frac{7\sqrt{80}}{2}=\underline{\underline{14\sqrt{5}}}$$ جواب

روش دوم و تکنیک if نصف محیط $p$ مثلث باشد $\longrightarrow$ $S_{\text{مثلث}}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\text{محیط}\Rightarrow p=\frac{12+9+7}{2}=16 \qquad S_{\text{مثلث}}=\sqrt{16\times 7\times 5\times 2}=\sqrt{16^2\times 5}=16\sqrt{5}$$

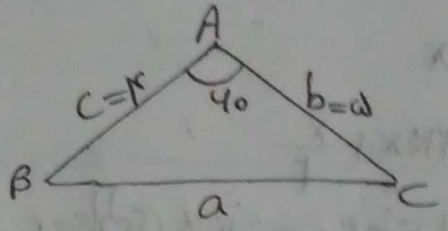
① در مثلث زیر اگر $\hat{B}=30^\circ$ و $\hat{C}=120^\circ$ و اندازه‌ی ضلع $AB$ برابر $2\sqrt{3}$ باشد مقادیر a و b را بیابید




$a=b \longrightarrow$ مثلث متساوی الساقین است

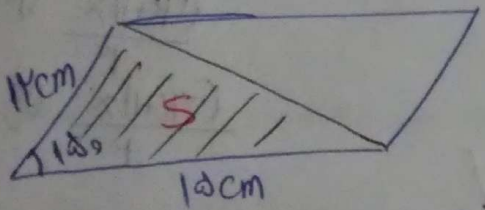
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120} = \frac{b}{\sin 30} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow b=2 \quad a=2$$

① اندازه‌ی ضلع a را بدست آورید.




$$a^2=25+16-2(4)(5)\cos 60 \Rightarrow a^2=21 \Rightarrow a=\sqrt{21}$$

① اضلاع مجاور یک متوازی الاضلاع 12cm و 15cm است اندازه‌ی یک زاویه‌ی آن 150 درجه است مساحت متوازی الاضلاع را بدست آورید.

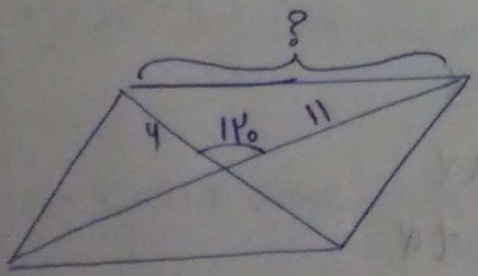



$$S=\frac{1}{2}\times 15\times 12\times \sin 150 = \frac{1}{2}\times 15\times 12\times \frac{1}{2} = 45$$

$$S' = 2S = 2\times 45 = 90$$ متوازی الاضلاع

جواب

① قطرهای یک متوازی الاضلاع 12 و 22 سانتی‌متر است و تقاطع این دو قطر زاویه‌ی 120 درجه می‌سازد طول اضلاع بزرگتر متوازی الاضلاع را بدست آورید.




$$?^2 = 11^2+6^2-2(6)(11)\cos 120$$

$$\Rightarrow ?^2 = 121+36+66 = 223 \Rightarrow ? = \sqrt{223}$$

$*\cos 120 = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$

① یک پیست دوچرخه سواری دایره‌ای به شعاع 1km را در نظر بگیرید اگر علی از نقطه A در خلاف جهت عقربه‌های ساعت شروع به رکاب زدن کند و مسافت $\frac{7\pi}{2}$ کیلومتر را طی کند مقدار زاویه‌ای که چرخیده است را برحسب درجه بدست آورید.

مسافت طی شده

نکته: $\theta = \frac{L}{r}$ (شعاع) $\Rightarrow \theta = \frac{\frac{7\pi}{2}}{1} = \frac{7\pi}{2}$ rad




| | |
|---|---|
| 1 درجه | $\frac{\pi}{180}$ rad |
| ? درجه | $\frac{7\pi}{2}$ rad |

$$\Rightarrow ? = \frac{\frac{7\pi}{2}}{\frac{\pi}{180}} = 630^\circ$$

## معادلات مثلثاتی:

① $\sin x = a = \sin\alpha \xrightarrow{\text{دو دسته جواب داریم}} \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$

مثال: $\sin x = \frac{1}{2} \longrightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$

حالت خاص: $\begin{cases} \sin x = 0 \longrightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \longrightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$

② کدام گزینه زیر نقیضی از جواب معادله‌ی $\sin 3x = \sin x$ است.

تذکر بسیار بسیار مهم:

if $\sin(\text{بابک}) = \sin(\text{حسن})$

$\begin{cases} \text{بابک} = 2k\pi + \text{حسن} \\ \text{بابک} = 2k\pi + \pi - \text{حسن} \end{cases}$

1) $\frac{k\pi}{2}$
2) $\frac{k\pi}{4}$
3) $\frac{(2k+1)\pi}{4}$
4) $\frac{(2k+1)\pi}{2}$

حالت: $\begin{cases} 3x = 2k\pi + x \longrightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \checkmark \\ 3x = 2k\pi + \pi - x \longrightarrow 4x = 2k\pi + \pi = \pi(2k+1) \Rightarrow x = \frac{2k+1}{4}\pi \checkmark \end{cases}$

③ دو معادلات مثلثاتی باید طرفین مساوی هم‌ضمن باشند.

$\longrightarrow \begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha \\ \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha \\ \cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha \end{cases}$

④ جواب‌های معادله‌ی $\sin 4x = \cos 2x$ را بیابید.

$\sin 4x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)$

جواب: $\begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x \longrightarrow 6x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 6} x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} + 2x \longrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$

مثال: معادله‌ی مثلثاتی $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin\alpha = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} \alpha = 2k\pi + \left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ \alpha = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ \alpha = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

حالت دوم: ② $\cos\alpha = a = \cos\alpha \longrightarrow \alpha = 2k\pi \pm \alpha$

مثال: $*\cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \longrightarrow \alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$*\underbrace{\cos 3\alpha}_{\text{باتک}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \underbrace{\cos\frac{\pi}{4}}_{\text{حسن}} \longrightarrow 3\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \xrightarrow{\div 3} \alpha = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{12}$$

حالت خاص: $\cos\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$

مثال $*\cos 4\alpha = 0 \longrightarrow 4\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 4} \alpha = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{8}$

③ معادله‌ی $2\cos 2\alpha = 2\cos 2\alpha\cos\alpha$ در فاصله‌ی $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد.

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶ ✓
۴) ۷

*تذکر مهم: آخرین دسته‌ای که در معادلات مثلثاتی می‌توانی ساده کنی فقط و فقط اعداد ثابت و پارامتر هایی $\alpha$ دار را ساده نمی‌کنیم.

$$\Rightarrow \cos 2\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha = 0 \longrightarrow \cos 2\alpha(\cos\alpha - 1) = 0 \begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos\alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos 2\alpha = 0 \longrightarrow 2\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 2} \alpha = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \begin{array}{l} k=0 \longrightarrow \frac{\pi}{4} \\ k=1 \longrightarrow \frac{3\pi}{4} \\ k=2 \longrightarrow \frac{5\pi}{4} \\ k=3 \longrightarrow \frac{7\pi}{4} \end{array}$$

$$\longrightarrow \cos\alpha - 1 = 0 \longrightarrow \cos\alpha = 1 \longrightarrow \alpha = 2k\pi$$

$$\downarrow$$

$k=0 \longrightarrow 0$
$k=1 \longrightarrow 2\pi$

مثال: جواب معادله‌ی $\cos 3\alpha = -\frac{1}{2}$ کدام است.

$$\cos 3\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$3\alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 3} \alpha = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$$

حالت سوم: $\tan x = a = \tan\alpha \longrightarrow x = k\pi + \alpha$

(۳) $\cot x = a = \cot\alpha \longrightarrow x = k\pi + \alpha$

حالت خاص: $\begin{cases} \tan x = 0 \longrightarrow x = k\pi \quad \text{عین سینوس} \\ \cot x = 0 \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \text{عین کوسینوس} \end{cases}$

(۲) مجموعه جواب معادله‌ی $\tan 4x \tan 3x = 1$ را بیابید.

$$\xrightarrow[\tan 3x]{\text{طرفین تقسیم بر}} \tan 4x = \frac{1}{\tan 3x} = \cot 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$$

$$\Rightarrow \tan 4x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 3x$$

$$\Rightarrow 7x = k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 7} x = \frac{k\pi}{7} + \frac{\pi}{14}$$

(۱) جواب معادله‌ی $\frac{\cos 2x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ کدام است

نکته‌ی مهم: در صورتی که معادله‌ی مثلثاتی به صورت کسری باشد حتماً پس از ساده‌سازی اقدام به حل معادله کنید.

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۲) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۳) $k\pi + \frac{\pi}{4}$
۴✓) $k\pi - \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)} = 0$$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \sin x = -\cos x \xrightarrow{\div \cos x} \tan x = -1 = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

(۲) جواب کلی معادله‌ی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2\frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است

۱) $2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۲) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
۳) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$
۴✓) $k\pi \pm \frac{\pi}{3}$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sin^2\frac{5\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2 x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{2} \Rightarrow -\cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\div 2} x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

① جواب کلی معادله‌ی $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$ کدام است.

$\cos x = t \Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$ $\begin{cases} t = \cos x = -1 = \cos\pi \rightsquigarrow x = 2k\pi \pm \pi \checkmark \\ t = \cos x = -\frac{c}{a} = \frac{1}{2} = 1/50 \text{ غ غ} \end{cases}$

↓ چون $-1 \le \cos x \le 1$

1) $k\pi$
2) $2k\pi + \pi$
3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
4) $k\pi + \frac{\pi}{2}$

② جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\sin(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} + x) - 2\sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است.

$\Rightarrow (-\sin x).(\sin x) - 2\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow (\sin x - 1)^2 = 0 \longrightarrow \sin x - 1 = 0 \longrightarrow \sin x = 1$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

1) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
2) $2k\pi + \frac{\pi}{6}$
3) $2k\pi - \frac{\pi}{2}$
4) $2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

③ جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \sqrt{3}$ به کدام صورت است؟

$\Rightarrow \tan 2x = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \tan 2x = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{\div 2}$

$\Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$

1) $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$
2) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$
3) $k\pi + \frac{\pi}{6}$
4) $k\pi - \frac{\pi}{6}$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

1) $\cot x + \tan x = 2$

$\Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2 \longrightarrow \sin 2x = 1 \longrightarrow 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

2) $\sin\frac{4x}{\alpha}\sin\frac{x}{\beta} + \cos\frac{4x}{\alpha}\cos\frac{x}{\beta} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

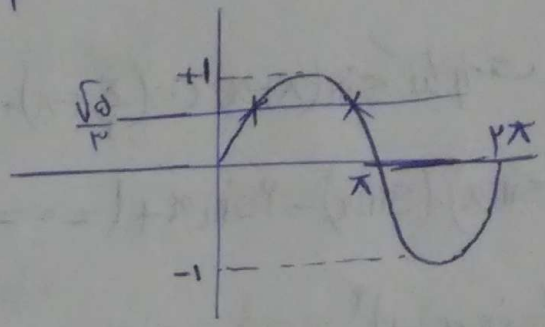
$\Rightarrow \cos(4x - x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow 3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

$\xrightarrow{\div 3} x = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{18}$

(T) معادله‌ی $(2\cos x-\sqrt{7})(3\sin x-\sqrt{5})=0$ در بازه‌ی $[0,2\pi]$ چند جواب دارد.

$$\begin{cases} 3\sin x-\sqrt{5}=0 \longrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{5}}{3} \longrightarrow \text{دو جواب دارد} \\ 2\cos x-\sqrt{7}=0 \longrightarrow \cos x=\frac{\sqrt{7}}{2}>1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

طبق نمودار دو جواب دارد




(T) معادله‌ی $\tan 5x\cdot\tan 2x=1$ در بازه‌ی $[0,\pi]$ دارای چند جواب است.

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

$$\xrightarrow[\tan 2x \text{ بر}]{\text{طرفین تقسیم}} \tan 5x=\frac{1}{\tan 2x}=\cot 2x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\Rightarrow 5x=k\pi+\frac{\pi}{2}-2x \Rightarrow 7x=k\pi+\frac{\pi}{2} \xrightarrow{\div 7} x=\frac{k\pi}{7}+\frac{\pi}{14}$$

$k=0 \longrightarrow \frac{\pi}{14}$
$k=1 \longrightarrow \frac{3\pi}{14}$
$k=2 \longrightarrow \frac{5\pi}{14}$
$k=3 \longrightarrow \frac{7\pi}{14}$ غ ق ق
$k=4 \longrightarrow \frac{9\pi}{14}$
$k=5 \longrightarrow \frac{11\pi}{14}$
$k=6 \longrightarrow \frac{13\pi}{14}$

این معادله ۶ جواب دارد.

دست علی یارتون
خدا نگهدارتون