سیگنال ← هر چیزی که دارای اطلاعاتی از محیط اطراف خود باشد سیگنال نامیم، به عنوان

مثال سیگنال دمای اتاق، تعداد دانشجویان یک کلاس، میزان روشنایی اتاق. در صورتی که بخواهیم

رابطه‌ی بین این سیگنال ها پیدا کنیم نیاز به سیستمی به محیط اطراف خود خواهیم داشت.

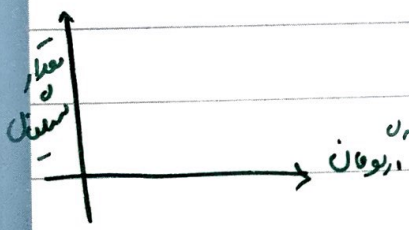
هر سیگنال ریاضی یک تابع ریاضی مخصوص یک سیگنال می‌باشد. هر تابع ریاضی از ۲ قسمت

آرگومان و مقدار تشکیل شده است. آرگومان که داخل پرانتز می‌باشد نشان دهنده‌ی این

است که تابع ریاضی وابسته به چه متغیری می‌باشد و مقدار سیگنال نشان دهنده اندازه‌ی

هر تابع چه آرگومان‌هایی مختلفی می‌باشد از طرفی هر سیگنال را می‌توان چه رسم نمودار نشان داد

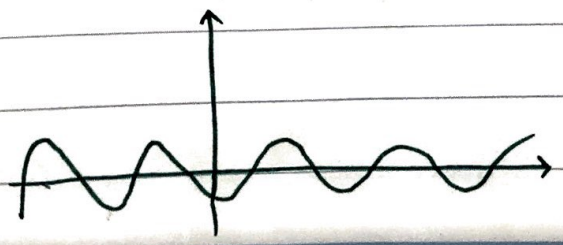
که محور افقی آن آرگومان بوده و محور عمودی آن مقدار سیگنال است.



آرگومان هر سیگنال یا تابع زمان است یا تابع فرکانس (ω) است.

سیگنال ها در حوزه‌ی زمان به ۲ نوع زمان پیوسته و زمان گسسته تقسیم بندی می‌شوند

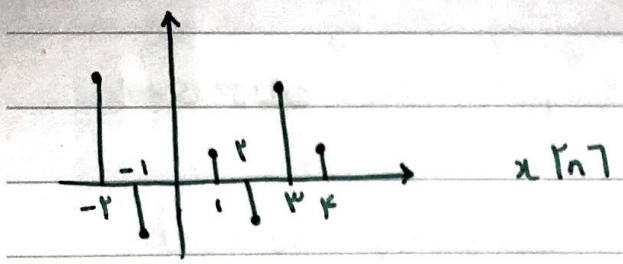
☒ سیگنال زمان پیوسته: $x(t)$، مقدار آرگومان می‌تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ هر عددی را به خود بگیرد



hirmandpaper

سیگنال زمان گسسته: آرگومان تابع یا n تنها مقادیر صحیح ۰ و ±۱ و ±۲ را می‌تواند به خود بگیرد.

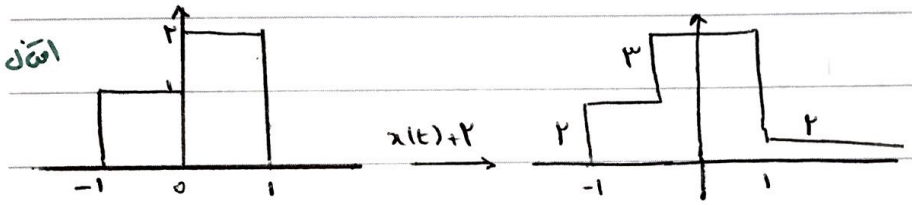
یعنی در حالت زمان گسسته $x[2.5]$ تعریف نمی‌شود ولی $x[1] = 2.5$ تعریف شده است.

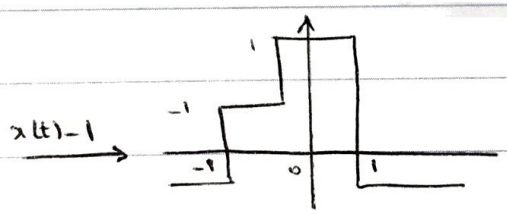


** عملیات بر روی سیگنال‌های زمان پیوسته:

۱. تغییر مقدار: وقتی a مثبت باشد سیگنال به اندازه a واحد به سمت بالا حرکت می‌کند.

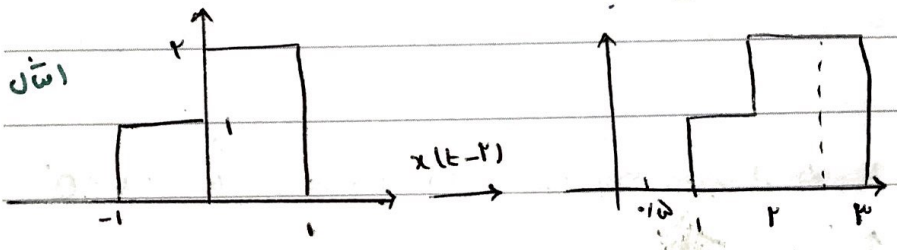
$x(t)+a$



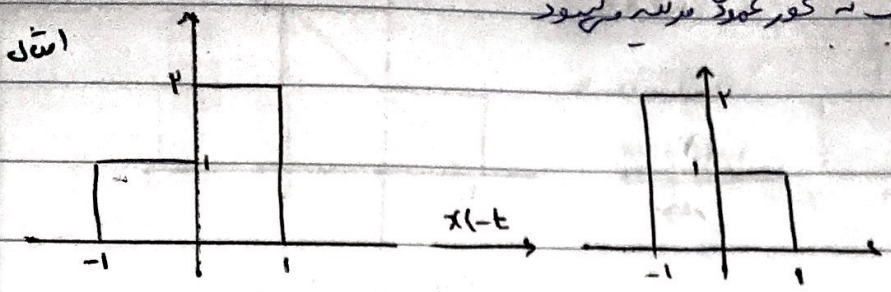


۲. شیفت زمانی: وقتی a مثبت باشد سیگنال به اندازه a واحد به سمت راست منتقل می‌شود.

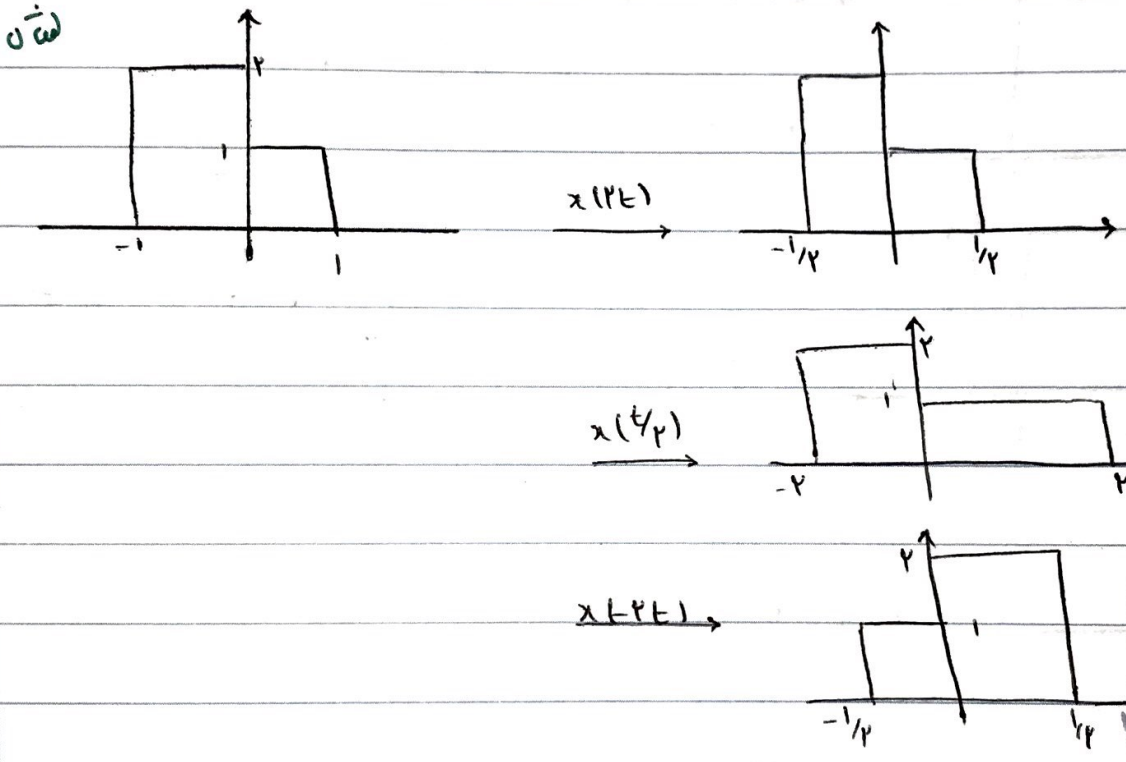
$x(t+a)$



۳. وارون زمانی: سیگنال نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود



۴. تغییر مقیاس: مقادیر زمان‌ها تقسیم بر a می‌شود ؟ $a>1$ ← سیگنال جمع می‌شود
$a<1$ ← سیگنال کش‌دار می‌شود

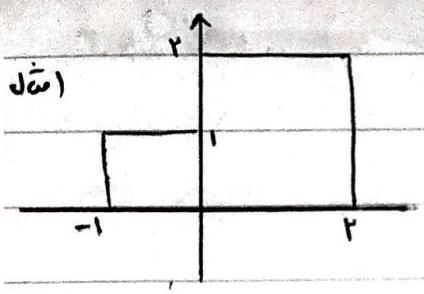


عملیات ترکیبی: در اینجا ابتدا شیفت را انجام می‌دهیم و سپس تغییر مقیاس را. اگر a و b

مثبت باشد ابتدا b واحد به سمت چپ شیفت می‌دهیم سپس مقادیر زمان را تقسیم بر a می‌کنیم

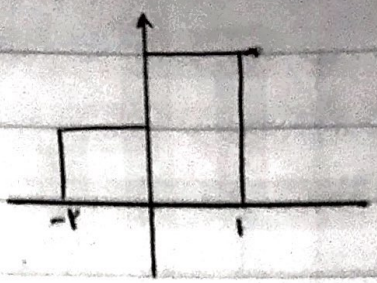
$x(at+b)$

مثال)

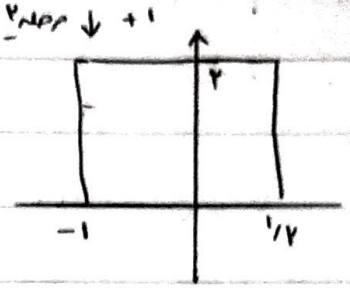


$x(2t+1)$

$(*2)$ مرحله ۱/۲



$+1$ مرحله ۲ ↓

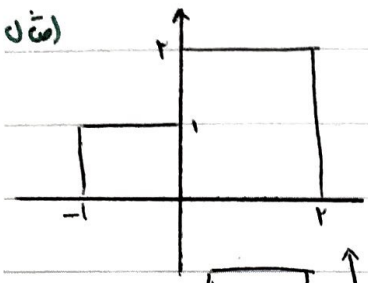


نهایی

مشتق‌گیری $y(t) = x(2t+1)$

$\xrightarrow{n=1} y(1) = x(3) = 0$ در نمونه ۱/۲

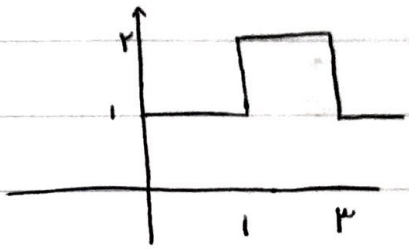
مثال)

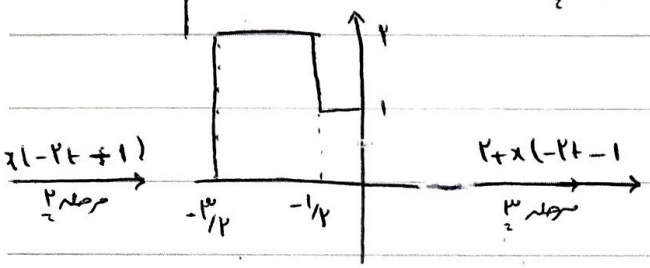


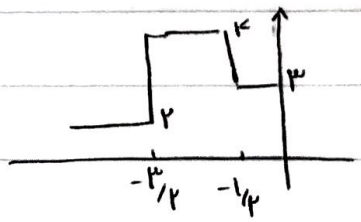
$2 + x(-2t+1)$

$x(t-1)$

مرحله ۱/۲

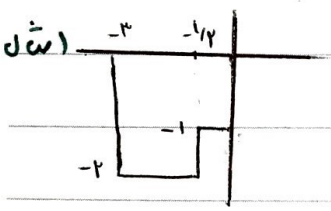






نهایی

مثال)

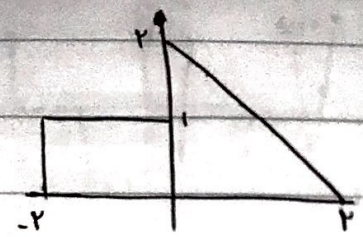


$-4\,x(-2t-1)$

مرحله ۱/۲

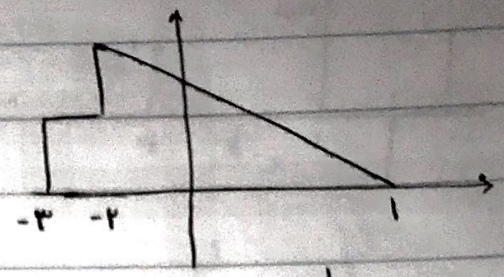
hirmandpaper

مثال

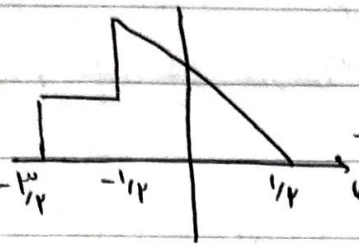


$x(2t+1)$ یک واحد انتقال به چپ

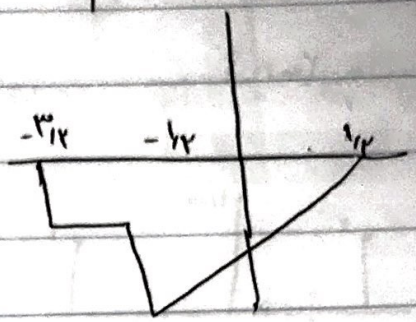
$x(t+1)$



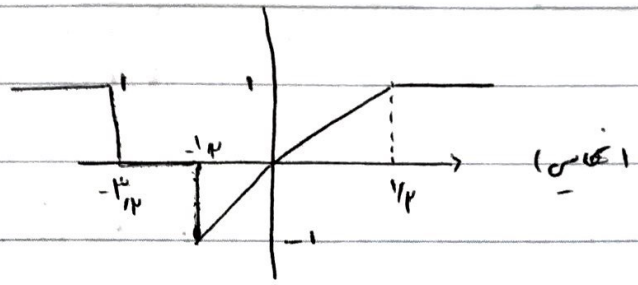
(۲) $x(2t+1)$ ۲ تقسیم بر ۲



(۳) $-x(2t+1)$ قرینه شدن نسبت به محور t



(۴)



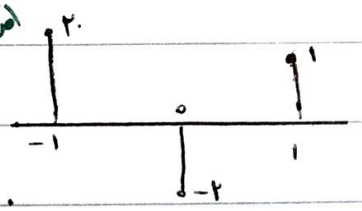
(۵ خاص)

عملیات بر روی سیگنال‌های زمان گسسته:

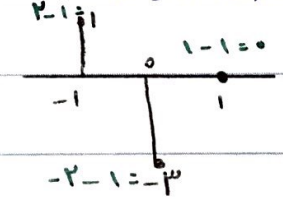
۱. تغییر مقدار: مقدار سیگنال $a>0$ واحد به سمت بالا جابجا می‌شود

$x[n]+a$

مثال



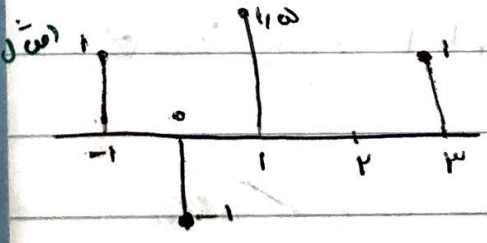
$x[n]-1$



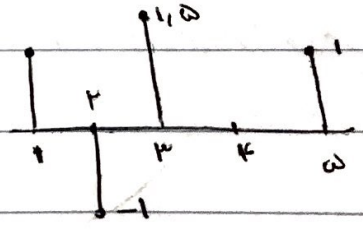
۲. شیفت زمانی: اگر a مثبت باشد مقدار سیگنال a واحد به سمت راست منتقل می‌شود

$x[n+a]$

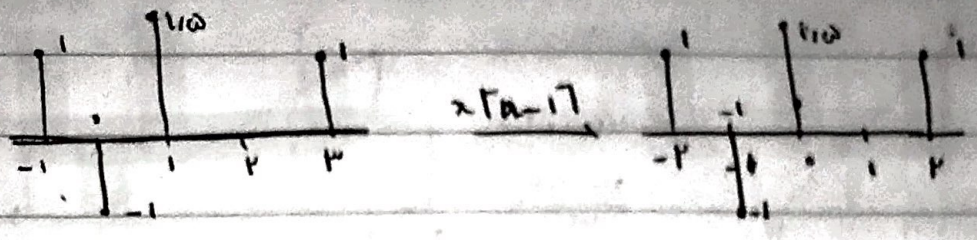
مثال



$x[2n+1]$

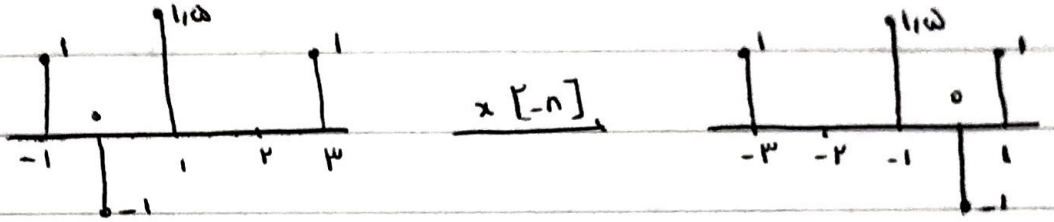


مثال



۳. واردن زمانی: سیگنال نسبت به محور عمودی با یک مقدار ثابت صفر قرینه می‌شود. ← $x[-n]$

مثال

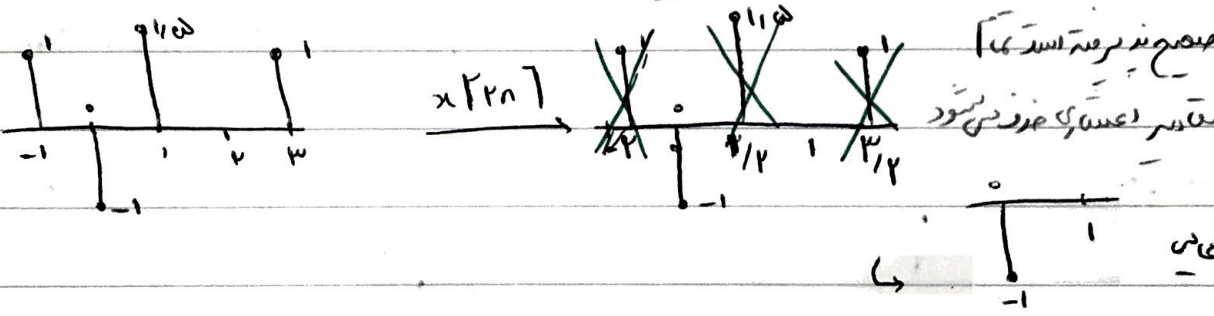


۴. تغییر مقیاس: اگر a مثبت باشد مقادیر سیگنال روی محور افقی تقسیم بر a می‌شود. $|a|>1$ ← فشرده (ضرب) | $|a|<1$ ← کشیده (تقسیم)

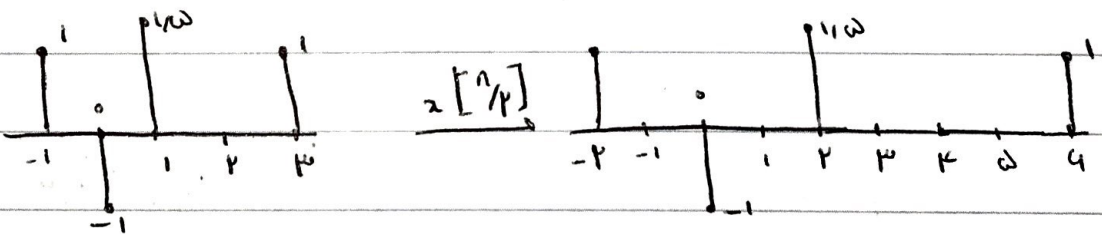
$x[an]$

حتماً عدد روی سیگنه است و روی سیگنه فقط مقادیر صحیح نیز مانده است، مثلاً مقادیر اعشاری حذف می‌شود

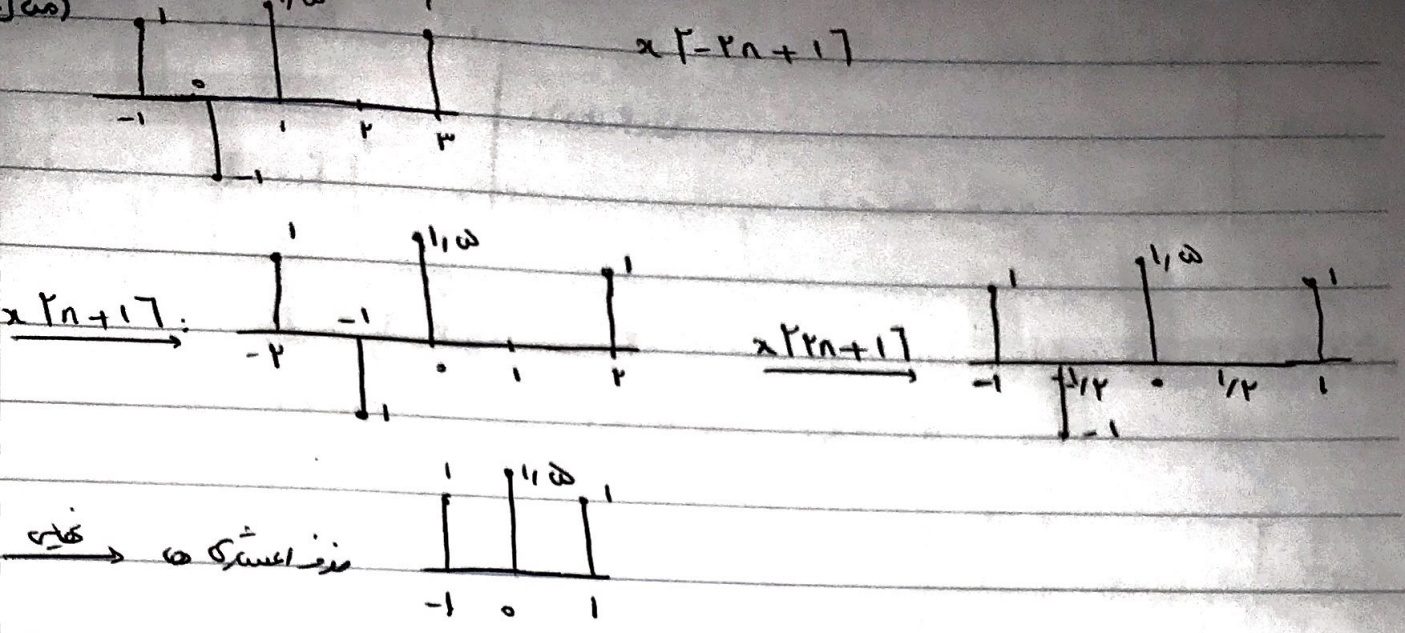
مثال



مثال



✓ عملیات ترکیبی: $x[an+b]$ ابتدا سیگنال به اندازه b واحد به سمت چپ و سپس اعداد روی محور افقی بر a تقسیم می‌شوند.



سیگنال های مهم در حوزه ی زمان:

۱: پله واحد (step):

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

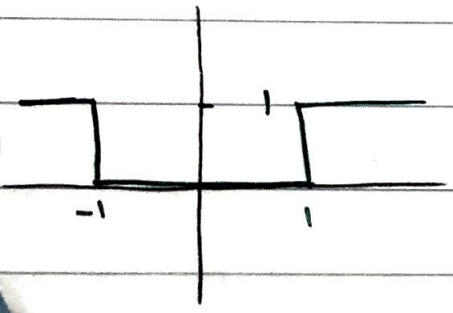
(پیوسته)

$$u(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t) > 0 \\ 0 & f(t) < 0 \end{cases}$$

مثال $u(t^2-1)$:

$t^2-1 > 0 \rightarrow t^2 > 1 \rightarrow t > 1$ یا $t < -1$

$t^2-1 < 0 \rightarrow t^2 < 1 \rightarrow -1 < t < 1$



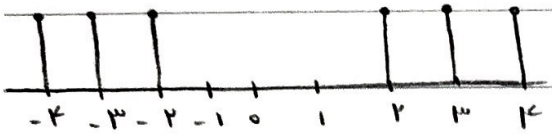
سوئیچ

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$u(F(n)) = \begin{cases} 1 & F(n) \geq 0 \\ 0 & F(n) < 0 \end{cases}$$

مثال $u(n^2-2)$ →

$$\begin{cases} 1 & n^2-2 \geq 0 \rightarrow n^2 \geq 2 \rightarrow n \geq 2 \text{ یا } n \leq -2 \\ 0 & n^2-2 < 0 \rightarrow n^2 < 2 \rightarrow -1 < n < 1 \end{cases}$$



۲. ضربه واحد (Impulse) نوارد کردن نیروی زیاد در زمان ناچیز (ضربه در لحظه)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



$$\delta(F(t)) = \begin{cases} \infty & F(t) = 0 \\ 0 & F(t) \neq 0 \end{cases}$$

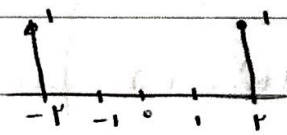


$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(F(n)) = \begin{cases} 1 & F(n) = 0 \\ 0 & F(n) \neq 0 \end{cases}$$

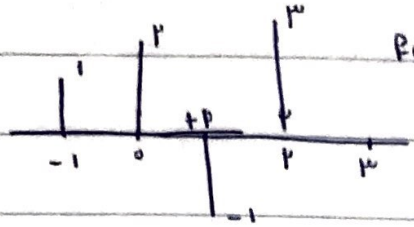
مثال

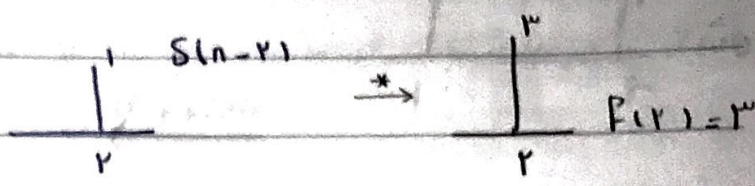
$$\delta(n^2-4) \rightarrow \begin{cases} 1 & n^2-4 = 0 \rightarrow n = \pm 2 \\ 0 & n^2-4 \neq 0 \end{cases}$$



$f(n) * \delta(n-a) = f(a)$: ۵۵ خاصیت غربالگری

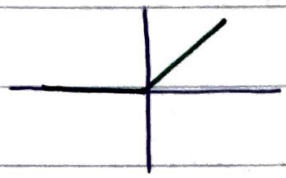
مثال)





۳. شیب واحد (Ramp) :

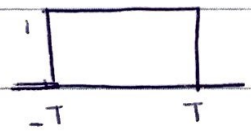
$$r(t) = tu(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$r(n) = nu(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

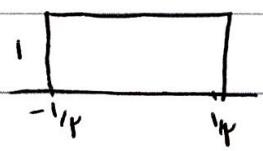
توابع خاص:

$rec\left(\frac{t}{2T}\right)$

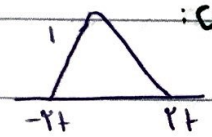


تابع مستطیل

$rec(t)$

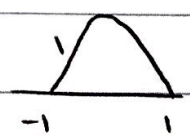


$tri\left(\frac{t}{2t}\right)$



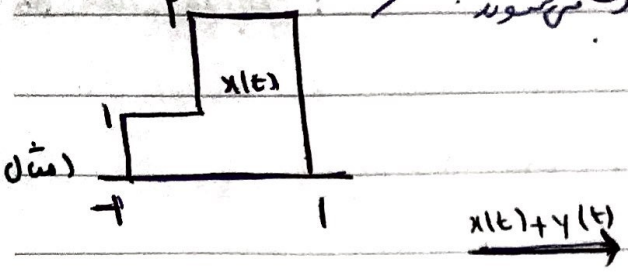
تابع مثلث

$tri(t)$

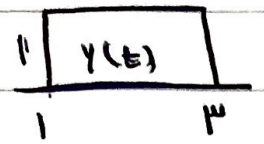


جمع و ضرب ۲ سیگنال: مقادیر ۲ سیگنال با هم جمع و ضرب می‌شوند.

مثال



$x(t)+y(t)$



سیگنال‌های متناوب: سیگنال $x(t)$ با دوره تناوب T متناوب است اگر برای هر t داشته باشیم

$x(t)=x(t+T)$ به کوچکترین T که در این معادله صدق کند دوره تناوب اصلی سیگنال

گوییم.

پیوسته

$\sin \omega_0 t$ ، $\cos \omega_0 t$ ، $e^{j\omega_0 t}$ $\rightsquigarrow$ $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$

$\tan \omega_0 t$ ، $\cot \omega_0 t$ ، $|\sin \omega_0 t|$ ، $|\cos \omega_0 t|$ $\rightsquigarrow$ $T=\frac{\pi}{|\omega_0|}$

گسسته

$\cos \omega_0 n$ ، $\sin \omega_0 n$ ، $e^{j\omega_0 n}$ $\rightsquigarrow$ $\frac{2\pi}{\omega_0}=$ عدد صحیح $=T$

$\frac{2\pi}{\omega_0}\neq$ عدد صحیح $\rightsquigarrow$ متناوب نیست

نکته: دوره تناوب اصلی مجموع یا ضرب ۲ سیگنال متناوب برابر کوچکترین مضرب مشترک دوره تناوب‌هاست.

$$T=\frac{\text{ک.م.م}(a,c)}{\text{ب.م.م}(b,d)}\quad \text{ک.م.م}\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)$$

نکته: دو عدد نه مضرب هم هستند ک.م.م آنها می‌شود عدد بزرگتر، اگر مضرب هم نبودند می‌شود ضرب آنها

ب.م.م دو عدد نه مضرب هم هستند می‌شود عدد کوچکتر، اگر مضرب هم بودند می‌شود عدد یک

مثال) دوره تناوب سیگنال‌های زیر را بیابید.

$$\left|\sin\frac{4}{3}\omega_0 T\right| + \cos\frac{3}{4}\omega_0 T \Big| = \begin{cases} T_1 = \pi/4/3 = \frac{3}{4}\pi \\ T_2 = 2\pi/3/4 = \frac{8}{3}\pi \end{cases}$$

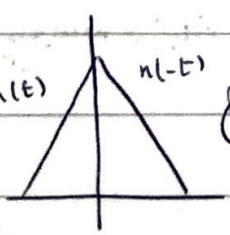
$$\rightarrow \text{ک.م.ب}(T_1, T_2) = \frac{\text{ک.م.ب}(3\pi, 8\pi)}{\text{ب.م.م}(3,4)} = \frac{24\pi}{1} = 24\pi \quad \text{جواب نهایی}$$

$$e^{j\frac{\pi}{3}n} \quad \omega_0 \rightarrow \frac{2\pi}{\pi/3} = 6 = \text{عدد صحیح} = T$$

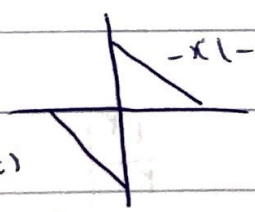
$$e^{j\frac{2}{3}n} \quad \omega_0 \rightarrow \frac{2\pi}{2} = \pi \neq \text{عدد صحیح} \Rightarrow \text{متناوب نیست}$$

سیگنال‌های زوج و فرد: سیگنال $x(t)$ را سیگنال زوج می‌نامیم اگر نسبت به محور عمودی متقارن باشد یعنی اگر $x(t) = x(-t)$ باشد

سیگنال $x(t)$ را سیگنال فرد می‌نامیم اگر نسبت به مبدا متقارن باشد به بیان دیگر $x(t) = -x(-t)$



سیگنال زوج



سیگنال فرد

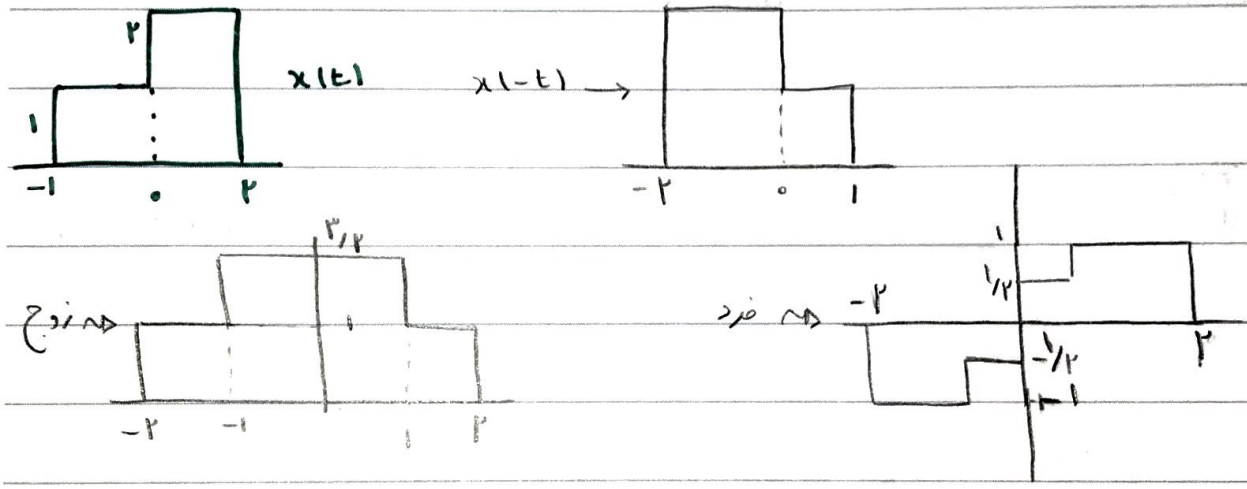
نکته: هر سیگنال دلخواه را می‌توان به مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد تجزیه کرد.

$$x(t) = \underbrace{\frac{x(t)+x(-t)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{x(t)-x(-t)}{2}}_{\text{فرد}}$$

$$\text{زوج: } z(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2} \qquad \text{فرد: } y(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$$

$$z(-t) = \frac{x(-t)+x(t)}{2} \qquad y(-t) = \frac{x(-t)-x(t)}{2}$$

مثال) سیگنال $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. مولفه زوج و فرد آن را رسم کنید.



سیگنال انرژی یا توان: سیگنالی که انرژی آن محدود و غیر صفر باشد سیگنال انرژی نوع یک سیگنالی که توان آن محدود و غیر صفر باشد سیگنال توان نوع یک.

$$E = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt = at\Big|_{t_1}^{t_2} = a(t_2 - t_1)$$

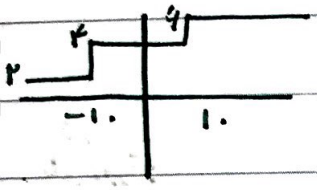
پیوسته در زمان ←

$$P = \int_{t_1}^{t_2} at\,dt = \frac{at^2}{2}\Big|_{t_1}^{t_2}$$

انرژی کل : $E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$

توان کل : $P_\infty = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$

مثال) انرژی و توان سیگنال زیر را بیابید.



$$E_\infty = \int_{-\infty}^{-10} 2^2 dt + \int_{-10}^{10} 4^2 dt + \int_{10}^{\infty} 9^2 dt = 4(-10+\infty) + 16(10+10) + 36(\infty - 10) = \infty$$

سیگنال انرژی نیست

$$P_\infty = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^{-10} 4 dt + \int_{-10}^{10} 16 dt + \int_{10}^{T} 36 dt \right] =$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left[4(-10+T) + 16(10+10) + 36(T-10) \right] =$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \left[-80 + 40T \right] = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{-80}{2T} + \frac{40T}{2T} \right] = 20$$

$$E=\sum_{n=n_1}^{n_2}|x(n)|^2 \qquad P=\frac{1}{n_2-n_1+1}\sum_{n=n_1}^{n_2}|x(n)|^2$$

لسته خروجی ← انرژی کل: $E_\infty=\sum_{n\to\infty}^{\infty}|x(n)|^2$

توان کل: $P_\infty \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{N\to\infty}^{N}|x(n)|^2=\frac{E_\infty}{2N+1}$

یادآوری: $\sum_{n=m_1}^{m_2}a^n=a^{m_1}+a^{m_1+1}+\dots+a^{m_2}=\frac{a^{m_1}-a^{m_2+1}}{1-a}$ ← خیلی مهم

خیلی زیاد مهم

$a+bj=\sqrt{a^2+b^2}$ مهم

مثال) انرژی و توان سیگنال زیر را بیابید.

$$x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

$$E_\infty=\sum_{n\to\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\sum_{n\to\infty}^{0}0+\sum_{n=0}^{\infty}\left|\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^n}\right|^2=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty+1}}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$$P=\frac{E}{\infty}=0$$

خواص سیستم‌ها:

تا الان به سراغ سیگنال‌ها رفتیم، حالا سیستمی به محیط اطراف خود

داریم مثلاً سیگنال $x(t-3)$ می‌توانیم به سیستم دهیم و خروجی آن $x(t)$

$y(t)=x(t-3)$



و خروجی آن $x(t-3)$ می‌باشد.

این سیستم‌ها دارای خواصی هستند که در این فصل به آن‌ها اشاره می‌کنیم:

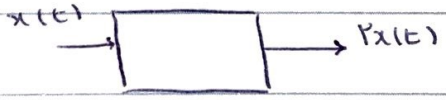
۱. خاصیت خطی: سیستمی که دارای خاصیت همگنی و جمع‌پذیری باشد، سیستم

خطی نامیم

الف) خاصیت همگنی: اگر ورودی α برابر شود فرض کنید α برابر خواهد شد.

$x(t) \longrightarrow y(t)$

$\alpha x(t) \longrightarrow \alpha y(t)$ $\qquad y(t)=2x(t)$



مثال $y(t)=\cos x(t) \Rightarrow \alpha x(t)=\cos\alpha x(t) \neq \alpha\cos x(t)$

$\cos\frac{\pi}{2}=0 \rightsquigarrow \cos 2\frac{\pi}{2}=-1 \neq +2n$

ب) خاصیت جمع‌پذیری: اگر ورودی $x_1(t)$ را به سیستم دهیم و خروجی $y_1(t)$ شود و

اگر ورودی $x_2(t)$ به هم خروجی $y_2(t)$ شود. حال اگر ورودی $x_1(t)+x_2(t)$

سیستم بیهم ـ خروجی $y_1(t)+y_2(t)$ شود

مثال) $y(t) = \cos x(t)$

$x_1 \longrightarrow \cos x_1(t) = y_1$

$x_2 \longrightarrow \cos x_2(t) = y_2$

$\longrightarrow x_1 + x_2 : \cos(x_1(t) + x_2(t)) \neq y_1 + y_2$

مثال) $y(t) = 2x(t) + 1$

$\alpha x(t) \longrightarrow 2\alpha x(t) + 1 = y_2$ ≠ خطی هلی ندارد.

$\alpha \cdot y(t) \longrightarrow 2\alpha x(t) + \alpha$

۲. سیستم‌های بدون حافظه: خروجی این سیستم در هر لحظه تنها به ورودی در همان لحظه بستگی دارد.

مثال) $y(t) = \cos x(t) \longrightarrow y(1) = \cos(x(1))$

$y(t) = x(t-2)$

$y(1) = x(-1)$ حافظه دار

سیستم‌های علی (یا بدون پیش‌بینی): سیستمی علی است که خروجی در هر لحظه تنها به ورودی در همان لحظه و ورودی لحظه‌های قبل بستگی داشته باشد.

مثال) $y(t) = x(t-1)$

$\longrightarrow y(t) = x(t+1)$

$y(1) = x(2)$ نیست

مثال) $y(n) = x(\frac{n}{2})$

فرض کنید ورودی ۱- را می خواهد این خروجی را بسازد $y(-2) = x(-1)$

علتی نیست.

سیستم های تغییر ناپذیر با زمان: سیستمی تغییر ناپذیر با زمان است که رفتار و مشخصات آن در طول زمان ثابت بماند یعنی اگر ورودی و خروجی مستقل از زمان باشند برای بررسی آن باید پاسخ به ورودی $x(t-t_0)$ را $y(t-t_0)$ شود.

مثال) $y(t) = t\,x(t)$

$x(t-t_0) \longrightarrow y(t) = x(t-t_0)$

$y(t-t_0) \longrightarrow (t-t_0)\,x(t-t_0)$ $\neq$

پس سیستم تغییر پذیر با زمان است.

نکته: برای بررسی تغییر ناپذیر بودن با زمان مقدار داخل پرانتز از t_0 کسر کرده، شما هم برای تستها $y(t-t_0)$ هر جا t دیدید $(t-t_0)$ بنویسید.

مثال) $y(t) = 2x(1-t^2)$

$2x(1-t^2-t_0) \neq 2x(-(t-t_0)^2)$

سیستم های پایدار: سیستمی را پایدار گوئیم که به ازای هر ورودی کران دار در همه زمان ها خروجی

کران دار بماند (بی نهایت نشود)

مثال) $y(t) = \frac{x(t)}{x(t-1)}$ $\longrightarrow x(t) = 1$

پایدار است

$$y(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

مثال) $y(n) = n\,x(n)$

$\xrightarrow{n=\infty}$ $y(\infty) = \infty\, x(\infty) = \infty$ پایدار است

سیستم وارون پذیر: به سیستمی گفته می‌شود که برای ورودی‌های متمایز خروجی‌های متمایز دهد

وارون پذیر نیست. برای بررسی وارون پذیری خواسته باید همه‌ی ورودی‌ها در همه‌ی زمان‌ها به خروجی

منتقل شود و در مرحله‌ی دوم بتوان از روی خروجی، ورودی را به دست آورد.

مثال) $y(t) = x^2(t)$

$x(t) \longrightarrow 2$

$x(t) \longrightarrow -2$ $\longrightarrow y(t) = 4$ وارون پذیر نیست.

مثال) $y(t) = 2x(t) + 5$

$x(t) = \frac{y(t) - 5}{2}$ وارون پذیر هست.

مثال) $y(t) = (t-1)\,x(t) + 2$

$t = 1$

ورودی منتقل نمی‌شود $\rightarrow y(t) = 0\,x(t) + 2$ وارون پذیر نیست

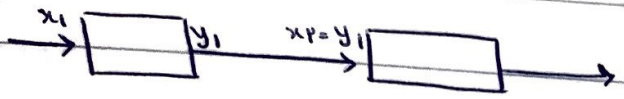
$y(t) = 2$

$y(t) = 2x(t)$

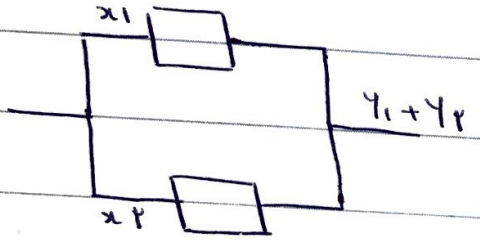
$y(0) = 2x(0) + 1$ وابسته پذیر هست

اتصال سیستم ها :

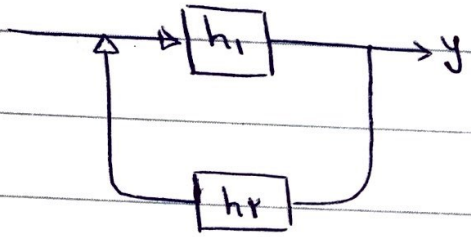
۱. اتصال سری :



۲. اتصال موازی :



۳. اتصال فیدبک :



سیستم های LTI

خطی + تغییر ناپذیر با زمان : خروجی سیستم های

انتگرال کانولوشن :

کانولوشن 2 سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

یعنی به جای متغیر مستقل یکی از سیگنال‌ها $x(t)$ τ قرار می‌دهیم و به جای دیگری $t-\tau$ قرار می‌دهیم، سپس 2 سیگنال را در هم ضرب کرده و حاصل انتگرال را به دست می‌آوریم.

مشتق گیری 2 سیگنال محاسبه می‌نمایم.

مثال) کانولوشن ۲ سیگنال زیر را بیابید

$x(t) = e^{-t}\,u(t)$

$y(t) = u(t+1)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau+1)}_{\text{بر واحد}} \cdot \underbrace{u(1+2-\tau)}_{\text{بر واحد}}\, e^{-2\tau}\, d\tau$$

$2 > 1+t \rightarrow 0 > 1+2-t \rightarrow 2 < 1+t \rightarrow 0 < 1+2-t$

$$\int_{0}^{1} u(1+2-\tau)\, d\tau \quad \xleftarrow{\text{بر واحد}} \quad \begin{cases} 1 & 0 < 2 \\ 0 & 0 > 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^{-2\tau}\, d\tau + \int_{0}^{1+t} 1 \times 1 \times e^{-2\tau}\, d\tau + \int_{1+t}^{\infty} 0 \times 1 \times e^{-2\tau}\, d\tau$$

$$= \int_{0}^{1+t} e^{-2\tau}\, d\tau \xrightarrow[\text{انتگرال}]{\text{با توجه به}} \boxed{1+t-e^{-1} = (e^{0} - e^{-1-t})}$$

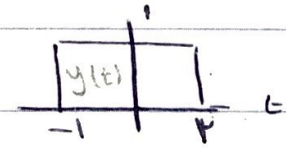
$$\int_{t_0}^{t_1} e^{at}\, dt = \frac{1}{a} e^{at} \Big|_{t=0}^{t_1} = \frac{1}{a}\left[e^{at_1} - e^{at_0}\right]$$

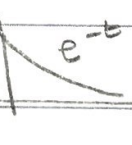
* با توجه به انتگرال

مثال) کانولوشن ۲ سیگنال زیر را در لحظه $t = \frac{1}{2}$ بیابید.

$x(t) = e^{-t}\,u(t)$

$y(t) = \pi\left(\frac{t}{2}\right)$





نکته: برای انجام راحت‌تر به صورت زیر

۲ تا شکل به ما داده شده باشد و کوا

کانولوشن آن را حساب کنیم. به یکی از

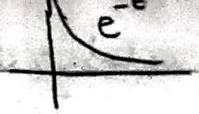
شکل‌ها دست نزنیم، شکل دیگر را انعکاس می‌دهیم

سپس کانولوشن آن را به اندازه t داده شده می‌کنیم سپس در

بازه‌ی مشترک انتگرال می‌گیریم.

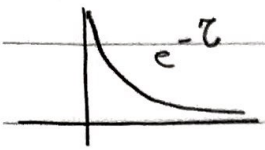
حل ←

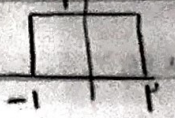
حل مثال صفحه پیش :



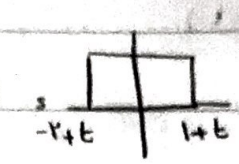
$x(t) = e^{-t}\,u(t)$

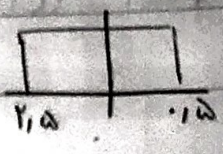
$x(2) = e^{-2}\,u(2)$





$t = -1/2$





برای رسم سیگنال حاصل از کانولوشن هر ۲ نمودار حواب داشته باشید. سپس چون $x(2)$ در کمتر از صفر مقدار ندارد در $y(t)$ نیز کمتر از صفر را پاک می‌کنیم و در نهایی رسم

$$\Rightarrow \int_{0}^{0.5} e^{-2} \times 1 \, d2 = -(e^{-0.5} - 1) = 1 - e^{-0.5}$$

کانولوشن در حوزه گسسته زمان :

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,y(n-k)$$

مثال ۱ کانولوشن ۲ سیگنال زیر را بیابید

$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$y(n) = 3^n u(n)$

به جای متغیر مستقل هر یک از سیگنال‌ها k قرار می‌دهیم و به جای سری $n-k$ و سپس در هم ضرب کرده، حاصل سری را جمع می‌بندیم.

$u(k)$: $\begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$ $\quad$ $u(n-k)$: $\begin{cases} 1 & n-k \geq 0 \rightarrow n \geq k \\ 0 & n-k < 0 \rightarrow n < k \end{cases}$

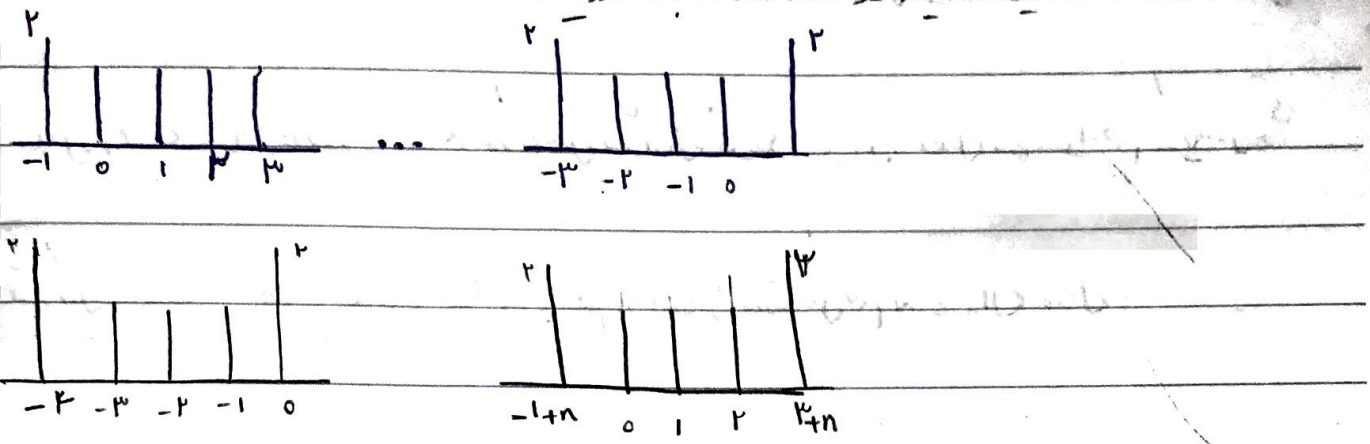
$$\rightarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k u(k) \cdot 3^{n-k}\, u(n-k)$$

$$\rightarrow 3^n \left[\sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 0 \times 3^{-k}\, u(n-k) + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1 \times 3^{-k} \times 1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 1 \times 3^{-k} \times 0 \right] = 3^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^k = 3^n \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{6}\right)^k =$$

یادآوری: $\sum_{n=m_0} a^n = \frac{a^{m_0} - a^{m_1+1}}{1-a}$

$\rightarrow$ با توجه به یادآوری $\cdots \quad 3^n \times \frac{(\frac{1}{4})^0 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = 3^n \times \left(\frac{1 - (\frac{1}{4})^{n+1}}{3/4}\right)$

مثال: نمونه‌برداری سیگنال زیر را در نرخ $\frac{1}{3}$ بدست آورید.



$$\sum x(k)\,y(n-k) = \underset{n=-4}{0\times 2} + \underset{n=-3}{0\times 1} + \underset{n=-2}{0\times 1} + \underset{n=-1}{2\times 1} + \underset{n=0}{1\times 2} + \underset{n=1}{1\times 0} = 4$$

سری فوریه :

تعریف فرکانس :

معمولاً فرکانس را به صورت تعداد نوسانات در ثانیه تعریف می‌کنند اما فرکانس تعریف گسترده‌تری دارد. سیگنال نمایی e^{at} را در نظر بگیرید که a می‌تواند یک عدد مختلط یعنی $a = \sigma + j\omega$ باشد. به a فرکانس سیگنال گویند. در این فصل می‌خواهیم فرکانس‌های تشکیل دهنده‌ی هر سیگنال را بیابیم و سپس آن‌ها را مشخص کنیم به عنوان مثال :

- در سیگنال $x(t) = \frac{1}{2}e^{j0t} + 2e^{j2t} + 1e^{j4t} + 1e^{j(1+j)t}$ فرکانس صفر با سهم $\frac{1}{2}$، فرکانس ۲ با سهم ۲ و فرکانس $(1+j)$ با سهم ۱ تشکیل شده است.

تمام سیگنال‌ها را با چشم نمی‌توان تجزیه فرکانسی کرد ولی با یک ابزار ریاضی داریم به فرکانس‌های تشکیل دهنده‌ی هر سیگنال را بدست آورد.

سری فوریه -

سری فوریه یک سیگنال متناوب را به نمایی‌ها موهومی تجزیه کرده و وزن هر کدام را مشخص می‌کند. یک سیگنال متناوب با دوره تناوب T دارای فرکانس‌های $k\omega_0$ که $\omega_0 = 2\pi/T$ و $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ تشکیل شده است

سری فوریه‌ی سیگنال زمان پیوسته

فرض کنید سیگنال $x(t)$ با دوره‌ی تناوب اصلی T متناوب است. می‌توان سیگنال $x(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \dots + a_{-2}e^{-2j\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \dots$$

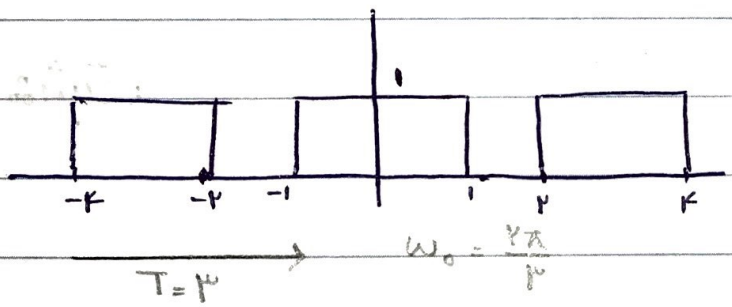
که در آن $jk\omega_0$ فرکانس‌های سیگنال بوده و a_k سهم هر فرکانس را مشخص می‌نماید که به a_k ضرایب فوریه گفته می‌شود.

از فرمول زیر محاسبه می‌شود

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt$$

مثال: سری فوریه سیگنال زیر را بیابید.



$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\frac{2\pi}{3}t}\,dt = \frac{1}{3}\times\frac{1}{-jk\frac{2\pi}{3}}\left[e^{-jk\frac{2\pi}{3}\times -2} - e^{-jk\frac{2\pi}{3}\times -4}\right]$$

$$a_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{-j\frac{4\pi}{3}}\left[e^{j8\pi/3} - e^{j\frac{14\pi}{3}}\right]$$

- سری فوریه‌ی سیگنال‌های زمان گسسته -

فرض کنید سیگنال $x[n]$ با دوره تناوب اصلی N متناوب باشد. در این صورت می‌توان

اثبات کرد که سیگنال متناوب $x[n]$ دارای سری فوریه‌ی زیر می‌باشد

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \ldots$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x_n$$

نکته: در سری فوریه گسسته در حالی که $a_k = a_{k+N}$ تنها در دوره تناوب $\frac{N}{2}$ باشد با حالت سری a_0 ، a_1 ، a_2 تا $a_{\frac{N}{2}}$ تمام جواب‌ها را داریم اما در دوم زیرا $a_0 = a_N$ است و $a_1 = a_{N+1}$.

اثبات:

$$a_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-j(k+N)\omega_0 N}$$

$$a_{k+N} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} \cdot \frac{e^{-jN\omega_0 n}}{1} \xrightarrow{\omega = \frac{2\pi}{N} \text{ می‌دانیم}} e^{jN\frac{2\pi}{N}n} = e^{j2\pi n}$$

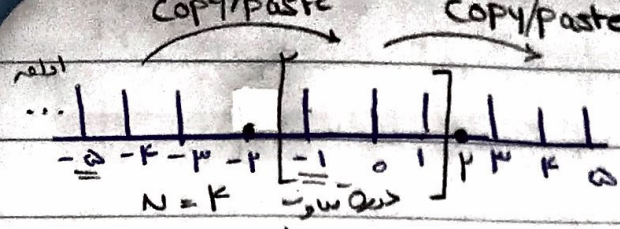
ساده می‌کنیم

طرفین: $e^{jan} = \cos an + j \sin an \xrightarrow{\text{سپس}} e^{j2\pi n} = \cos(2\pi n) + j \sin(2\pi n) = 1$

$$\xrightarrow{\text{سپس}} a_{k+N} = a_k$$

hirmand paper

مثال ۱



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x(n) = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

ضرایب:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega n} \rightarrow a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{1} 1 \times \left(e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)^n =$$

$$\frac{e^{jk\frac{\pi}{2}} - e^{-jk\frac{\pi}{2}\times 2}}{1 - e^{-jk\pi/2}} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{1} 1 = \frac{1}{4}(1+1+1) = \frac{3}{4} = a_0$$

چون هر ۳ تا یکی میشه!

مثال) ضرایب فوریه سیگنال زیر را بیابید

$$x(t) = 2j\sin\frac{3}{2}t + \cos t + 2$$

$\frac{4\pi}{3}$ ، 2π ، $\frac{4\pi}{3}$

$$\text{ب.م.م}\left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right) = \frac{4\pi}{1} = 4\pi$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

ضرایب: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \cdots + a_{-2}e^{-jk\omega_0 t} + a_{-1}e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$

$$a_k = \frac{1}{T}\int x(t) e^{-j\omega_0 t}\, dt$$

یادآوری: $\sin\omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ ، $\cos\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-jt}}{2} + 2$

$$\rightarrow x(t) = 2j\,\frac{e^{\frac{3}{2}jt} - e^{-\frac{3}{2}jt}}{2j} + \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} + 2$$

ادامه مسئله ←

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{4}jt} - e^{-\frac{3}{4}jt} + \frac{1}{2}e^{jt} + \frac{1}{2}e^{-jt} + 2 = \sum a_k e^{jk\frac{1}{4}t}$$

$$\downarrow \left[a_k e^{jk/4t} = \frac{1}{2} e^{3/4jt} \rightarrow \frac{k}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow k = 3\right]$$

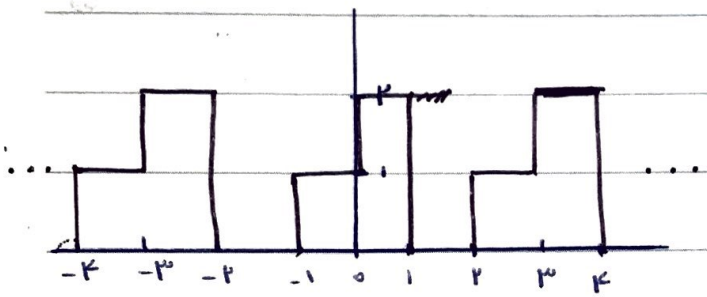
- پارسوال -

$$\frac{1}{T}\int |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

$$\frac{1}{T}\sum_{n=\langle k\rangle} |x(n)|^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} |a_k|^2$$

مثال) سیگنال $x(t)$ به شکل زیر داده شده است. حاصل $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$ را بیابید.

$= 0.4$



راه حل دوم: بر حسب دوره سری فوریه...

راه حل دوم: حل با فرمول پارسوال

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{3}\int_{-1}^{0} 1^2 + \int_{0}^{1} (2)^2 + \int_{1}^{2} (0)^2 = \frac{1}{3} \times (1+4) = \frac{5}{3}$$

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه مولفه های فرکانسی مختلف یک سیگنال در حالت کلی نامتناوب را استخراج می‌کند در واقع

تبدیل فوریه یک سیگنال زمان پیوسته مولفه های فرکانسی مختلف موجود در یک سیگنال را نشان می دهد.

تبدیل فوریه سیگنال زمان پیوسته

تبدیل فوریه سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jwt}\, dt$$

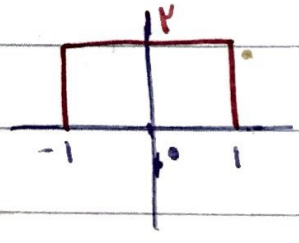
(مهم تر)

که $X(w)$ تابعی از w است و برای تبدیل فوریه $x(t)$ می‌نامیم همچنین یک سیگنال را می‌توان گرفت تبدیل

فوریه آن به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)\, e^{jwt}\, dw$$

مثال! تبدیل فوریه‌ی سیگنال زیر را بیابید.



به کمک تابع پله یا توابع زیر و حاصل Sin و کسینوس.

$$X(w) = \int_{-1}^{1} 2e^{jwt}\, dt = \frac{2}{-jw}\left[e^{-jw} - e^{jw}\right] = \frac{2\times 2}{w}\,\frac{e^{jw} - e^{-jw}}{2\times j} = \frac{4\sin w}{w}$$

همانطور که از روی شکل تبدیل فوریه متوجه می‌شویم سیگنال صفر تشکیل سیگنال $\frac{\pi}{2}$

بوده و سیگنال فرکانس بالاتر صفر می‌باشد به عنوان مثال سیگنال فرکانس اره مرغ شکل ۳,۹

یعنی تمام فرکانس‌های موجود را می‌توان از روی شکل سیگنال آن را حدس زد.

- تبدیل فوریه سیگنال زمان گسسته -

تبدیل فوریه‌ی $x[n]$ به صورت زیر تعریف می‌شود و $X(\omega)$ تابعی از ω است و آن را تبدیل فوریه‌ی $x[n]$ می‌نامیم از طرف $x[n]$ را می‌توان برحسب $X(\omega)$ نوشت.

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

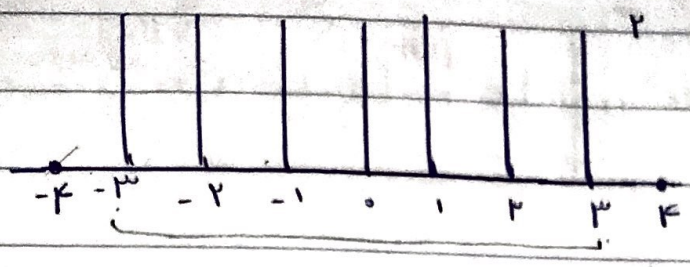
نکته: در تبدیل فوریه‌ی گسسته در ازای تغییرات تبدیل فوریه با دوره‌ی تناوب 2π مساوی است زیرا:

$$X(\omega+2\pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j(\omega+2\pi)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \cdot e^{-j\omega 2\pi}$$

$$\frac{\cos 2\pi + j\sin}{1}$$

$$= X(\omega)$$

مثال: تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید و دامنه‌ی تبدیل فوریه را رسم کنید.



$x(n) = 2$ برای $-3 \le n \le 3$ و در بقیه‌ی نقاط صفر شده

توضیح *

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{+j\omega n} = \sum_{n=-3}^{+3} 2e^{-j\omega n} = 2 \times \frac{e^{3j\omega} - e^{-4j\omega}}{1 - e^{-j\omega}}$$

صورت و مخرج را در $e^{-j\omega/2}$ ضرب می‌کنیم

$$\frac{2e^{-j\omega/2}\left(e^{7j\omega/2} - e^{-7j\omega/2}\right)}{e^{-j\omega/2}\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right)} = \frac{2\sin\frac{7}{2}\omega}{\sin\omega/2}$$

چون طرح

$$\sin\omega = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}$$

* کلی ساده سازی توان‌های $e^{j\omega}$ ها را با هم جمع کرده، تقسیم بر $2j$ (سینوس) و دامنه‌ی آن را بدست می‌آوریم

مشاهده می‌کنیم که با هر چه توانی جمع شود تا توان صفر حاصل شود.

مثال - تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های $x(t) = e^{at}u(t)$ و $x(n) = a^n u(n)$ را بیابید.

* سیگنالی تبدیل فوریه دارد که سیگنال توان دار باشد.

$$x(t) = e^{at}u(t)$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} e^{at}e^{-j\omega t}dt =$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{(a-j\omega)t}dt = \frac{1}{a-j\omega}\left[e^{(a-j\omega)t}\right]_{0}^{\infty} = \begin{cases} \text{if } a-j\omega < 0 \rightarrow \frac{1}{a-j\omega}[0-1] = \frac{1}{-a+j\omega} \\ \text{if } a-j\omega < 0 \end{cases}$$

تبدیل فوریه نداریم

$x[n] = a^n u[n]$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} =$$

تا عبارت صدق کند!

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j\omega n})^n = \frac{1 - (a e^{-j\omega})^{\infty+1}}{1 - a e^{-j\omega}} \quad \text{اگر } |a e^{-j\omega}| < 1 \quad \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$|a$

شرط همگرایی تبدیل فوریه $\Leftarrow |a| < 1$

- همگرایی تبدیل فوریه -

بسیاری از سیگنال‌ها تبدیل فوریه ندارند و یا تبدیل فوریه‌ی آن‌ها همراه با محدودیت‌هایی نیز هستند. مثال

با آن‌که برای برخی سیگنال‌ها تبدیل فوریه دارد ولی برای برخی ندارد. شرط داشتن تبدیل

فوریه به صورت زیر است:

پیوسته در زمان: اگر $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

گسسته در زمان: اگر $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

یعنی سیگنال انرژی و صحیح باشد.

رابطه پارسوال ـ

پیوسته ـ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\omega)|^2 \, d\omega$$

گسسته ـ

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

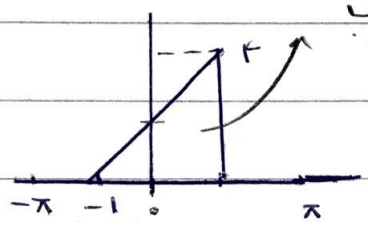
مثال) انرژی موج سینوسی $x(n)$ که $x(\omega)$ باشد حاصل مجموع زیر را بیابید.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$$

شیب : متغیر y / متغیر ω

$y = 2x + \alpha \rightarrow 0 = -2 + \alpha$

$y = 2x + 2$



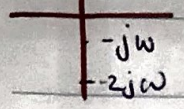
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} |X(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-1}^{1} (2\omega + 2)^2 \, d\omega = \int_{-1}^{1} 4\omega^2 + 8\omega + 4 \, d\omega$$

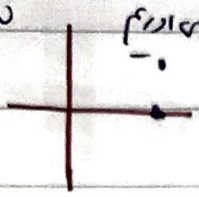
$$\frac{4\omega^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + 4\omega^3\Big|_{-1}^{1} + 4\omega\Big|_{-1}^{1}$$

تبدیل لاپلاس

در سری فوریه سیگنال متناوب ها صفرهای بسته ($\pm j\omega_0$ و $\pm 2j\omega_0$) را بدست می آوردیم



و در تبدیل فوریه سیگنال عام صفرهای روی محور موهومی ($j\omega$) را بدست می آوردیم



حال اگر بخواهیم سیگنال هایی مثل e^{at} را بدست آوریم

باید از تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-st}\, dt$$

که متغیر s مختلط می باشد و به صورت $s = \sigma + j\omega$ تعریف می شود. انتگرال فوق بسته

به سیگنال $x(t)$ بسته به مقادیر همگرا کند و برخی دیگر نا محدود. ناحیه ای همگرایی انتگرال فوق را

ناحیه همگرایی یا ROC سیگنال می نامیم. $x(t)$ را می توان بر حسب $X(s)$ به صورت زیر گفت:

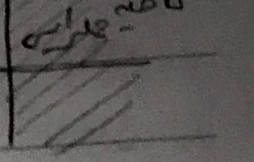
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{st}\, dt$$

مثال) تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرایی $x(t) = u(t)$ / $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{st}\, dt$ ؟

$x(t) = u(t)$ ← تابع پله واحد

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot e^{-st}\, dt + \int_{0}^{\infty} 1 \times e^{-st}\, dt =$$

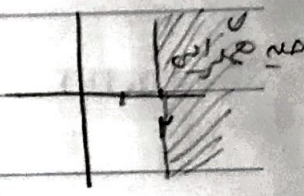
$$-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{s}\left[e^{-s\infty} - e^{0}\right] \xrightarrow{s>0} \frac{1}{s}$$



مثال $x(t) = e^{2t}u(t)$

$$x(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2t}u(t)e^{-st}dt \Rightarrow x(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-t(s-2)}dt = \frac{1}{-s+2}e^{-t(s-2)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{-s+2}\left[e^{-\infty(s-2)} - e^{0}\right] \xrightarrow{-s+2<0} \frac{1}{-s+2}\left[0-1\right] = \frac{1}{s-2}$$



مثال $x(t) = -e^{-2t}u(-t-1)$

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{2t}u(-t-1)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-t(s-2)}\times 1\,dt = -\frac{1}{-s+2}\left[e^{-(-s+2)\times 0} - e^{-(-s+2)\infty}\right]$$

$$-(-s+2)<0 \xrightarrow{s<2} \frac{1}{s-2}$$



مثال کلاس سیگنال‌های مهم

$x(t)$	$X(s)$	ناحیه همگرایی
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s>0$
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$s<a$
$\cos\omega t\, u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$s>0$
$\sin\omega t\, u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$s>0$
$-\cos\omega t\, u(-t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$s<0$

خواص ناحیه همگرایی

سیگنالی که برای $t<a$ برای صفر یا سمت راستی توکم و ROC این نوع سیگنال‌ها

نزدیکترین عدد است. به سیگنالی که برای $t>a$ برای صفر یا سمت چپ سیگنال است

صفر توکم و ROC آن نزدیکترین عدد است.

مثال) $x(t)=\cos\omega t\, u(t)$ با استفاده از این سوال

یا $\sin\omega t\, u(t)$

یادآوری: $\cos\omega t=\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega t\, u(t)\, e^{-st}\,dt=\int_{0}^{\infty}\cos\omega t\, e^{-st}\,dt=\int_{0}^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2}e^{-st}\,dt$$

$$\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}e^{(j\omega-s)t}+e^{(-j\omega-s)t}\,dt$$

hirmandpaper

$$\underset{\text{Re}(s)>0}{s>0} = \frac{1}{2}\left[\frac{1(0-1)}{j\omega-s} + \frac{1(0-1)}{-j\omega-s}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{Re}(s)>0$$

مثال) $\sin \omega t\, u(t)$ یادآوری: $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{0}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} e^{-st}\,dt = \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{(j\omega - s)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_{0}^{\infty} e^{(-j\omega - s)t}\,dt = \frac{1}{2}\frac{1}{j\omega - s} e^{(j\omega - s)t}\Big|_{0}^{\infty} - \frac{1}{2j}\frac{1}{-j\omega - s} e^{(-j\omega - s)t}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2j}\frac{1}{j\omega - s}\left[e^{(j\omega - s)\infty} - e^{(j\omega - s)0}\right] \xrightarrow{s>0} -\frac{1}{2j}\frac{1}{-j\omega - s}\left[e^{(-j\omega - s)\infty} - e^{(-j\omega - s)0}\right] = \frac{1}{2j}\frac{1}{j\omega - s}[0 - 1] - \frac{1}{2j}\frac{1}{-j\omega - s}[0 - 1] =$$

$$\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

خواص تبدیل لاپلاس

1. خطی بودن:

if $x(t) \to X(s)$, $y(t) \to Y(s)$ آنگاه $Ax(t)+By(t) \to AX(s)+BY(s)$

2. انتقال زمانی:

if $x(t) \to X(s)$ آنگاه $x(t+t_0) \to X(s)e^{st_0}$

مثال) $U(t) \to \frac{1}{s}$ آنگاه $U(t+1) = ? \Rightarrow U(t+1) = \frac{1}{s}e^{s}$

حل بدون خواص (اثبات): $U(t+1) \to X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t+1)e^{-st}dt = \int_{-1}^{\infty} 1 \times e^{-st}dt = \frac{-1}{s}\left[e^{-s(\infty)} - e^{s}\right] = \frac{e^{s}}{s}$

3. انتقال در حوزه s:

if $x(t) \to X(s)$ آنگاه $X(t)e^{s_0 t} \to X(s-s_0)$ ، s_0 یک عدد!

مثال) $e^{(Pt)}U(t) \to \frac{1}{s-?}$ (s_0: $P \to 1/s$)

4. وارونگی:

if $x(t) \to X(s)$ آنگاه $x(-t) \to X(-s)$

5. مقیاس دهی:

if $x(t) \to X(s)$ آنگاه $x(at) \to \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$ ، a یک عدد!

مثال) $U(\frac{P}{a}t) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s}\right) = \frac{1}{s}$

hirmandpaper

6. مشتق گیری زمانی:

if $x(t) \to X(s)$ داریم $\mathcal{L}$ $\quad x'(t) = sX(s)$

مثال) $u(t) \rightsquigarrow \frac{1}{s}$ پس $\delta(t) = \delta \times \frac{1}{\delta} = 1$

7. انتگرال گیری زمانی:

if $x(t) \to X(s)$ داریم $\mathcal{L}$ $\quad \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{s} X(s)$

8. کانولوشن: δ_{imp}

if $x(t) \to X(s)$ داریم $\mathcal{L}$ $\quad x(t) * y(t) \to X(s).Y(s)$

9. مشتق گیری در حوزه s

if $x(t) \to x(s)$ داریم $\mathcal{L}$ $\quad -t\,x(t) \to x'(s)$

مثال)

$x(t)$	$X(s)$
$U(t)$	$1/s$

مشتق $\xrightarrow{}$ $-t\,U(t) \to -\frac{1}{s^2}$ $\quad \otimes \quad tU(t) = \frac{1}{s^2}$

قضیه مقدار اولیه: اگر $x(t)$ برای t های نزدیک از صفر، صفر باشد و فقط ضربه و یا مشتقات ضربه نداشته باشد، آنگاه داریم:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

مثال) $U(t) \to U(0^+) = 1$

اثبات $\lim_{s \to \infty} s \times \frac{1}{s} = 1$

قضیه مقدار نهایی: اگر $x(t)$ برای tهای بزرگتر از 0 برای صفر باشد (سگنال دست راستی) و همگرا شود $X(s)$ در سمت چپ محور $j\omega$ باشد داریم: $x(\infty)=\lim_{s\to 0} sX(s)$

- تعریف صفر و قطب - مربوط به زیل است!

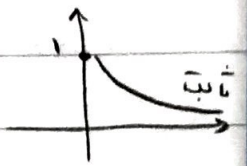
به ریشه‌های صورت تابع تبدیل صفر و به ریشه‌های مخرج تابع تبدیل قطب می‌گوییم. برای مثال

سیستم پایدار باشد باید تمام قطب‌ها منفی باشد

$$y(t)\xrightarrow{\text{ل}}\frac{s-1}{s^2+5s+6}\quad \text{صفر} \leftarrow s-1=0\rightarrow s=1$$

$$s^2+5s+6\rightarrow s^2+5s+6=0\rightarrow s=-2,-3 \quad \text{قطب}$$

$$\rightarrow Y(t)=\frac{-3}{s+2}+\frac{4}{s+3}\xrightarrow[\frac{1}{s+a}\to e^{-at}u(t)]{\text{دارم}}-3e^{-2t}+4e^{-3t}$$



سیستم پایدار

← از روی قطب‌ها تابع تبدیل تشخیص می‌دهند یعنی اگر قطب‌ها منفی باشند پایدار و اگر حداقل یکی از قطب‌ها مثبت باشد سیستم ناپایدار است.

مثال) با استفاده از خواص لاپلاس تبدیل لاپلاس سیگنال $e^{(-1+j)t}\cos 3t\,u(t)$ را بیابید

با فرض اینکه می‌دانیم $\cos t\,u(t)=\frac{s}{s^2+1}$

$$\text{طرف}: x(at)\to\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)\quad \text{سمت}: \cos 3t\to\frac{1}{3}\left(\frac{\frac{s}{3}}{(\frac{s}{3})^2+1}\right)=\frac{s}{s^2+9}$$

$$\text{طرف}: x(t)e^{s_0 t}\longrightarrow X(s-s_0)$$

$$\text{سمت}\rightarrow e^{(-1+j)t}\cos 3t\,u(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{s-(-1+j)}{\frac{3}{2}}\right)$$

hirmandpaper

مثال) $e^{2t}\sin 2t\,u(t)$

$\sin \omega_0 t\,u(t) = \frac{1}{s^2+1} \xrightarrow{\text{مشتق}} \sin 2t\,u(t) \to \frac{2}{s^2+4}$

$\sin -2t\,u(-t) \to \frac{2}{(-s)^2+4} \xrightarrow{\text{تغییر}} -\sin 2t\,u(-t) = \frac{-2}{s^2+4}$

$e^{2t}\sin 2t\,u(-t) = \frac{-2}{(s-2)^2+4}$

تبدیل Z

در این فصل با تبدیل Z در سیگنال‌های زمان گسسته حوالم پرداخت. تبدیل Z سیگنال $x(n)$

به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

متغیر Z یک متغیر مختلط است که به صورت $z = re^{+j\omega}$ تعریف می‌شود. سیگنال‌های موج

نیست به سیگنال $x(n)$ به ازای بعضی مقادیر Z همگرا و به ازای برخی دیگر واگرا می‌شود

ناحیه‌ی همگرایی را ROC سیگنال می‌نامیم.

مثال) تبدیل Z سیگنال زیر را بدست آورید.

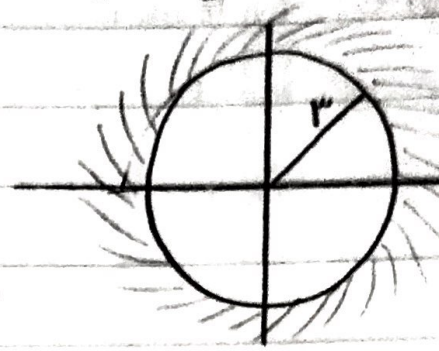
$x(n) = 3^n u(n)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 3^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z^{-1})^n =$$

hirmandpaper

$$\xrightarrow{\text{ارلمه}} \frac{(3z^{-1})^{0} - (3z^{-1})^{\infty+1}}{1-3z^{-1}} \xrightarrow{\text{if } |3z^{-1}|<1} \frac{1-0}{1-3z^{-1}} = \frac{z}{z-3}$$

$$\frac{3}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > 3$$

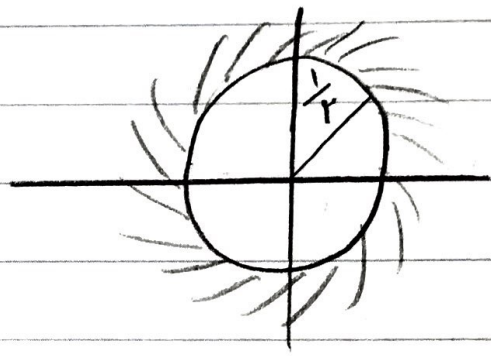


یادآوری: $\sum_{n=m_0}^{m_1} a^n = \frac{a^{m_0} - a^{m_1+1}}{1-a}$

مثال $\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1) z^{-n} = \sum_{-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n = \frac{\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-\infty} - \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\xrightarrow{\text{if } \frac{1}{2}z > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} > z} \frac{0 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$



نکته: باتوجه به اینکه عبارت $z = re^{jw}$ به ازای $r=1$ برای است با e^{jw} پس آن ROC شامل دایره واحد باشد آن سیگنال تبدیل فوریه‌ی دسته هم خواهد داشت و اگر ROC شامل دایره واحد نباشد آن سیگنال تبدیل فوریه‌ی دسته نخواهد داشت، و تنها تبدیل z خواهد داشت