وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveTamrin

scan me🧐!!

www.wtiau.net

"ریاضی پیش"

- حساب دیفرانسیل و انتگرال (ریاضی عمومی ۱ و ۲) - (دکتر خلیل پایاب)
* جلد دهم که پیشنهاد میشود

تابع - حد و پیوستگی - دنباله و سری - اعداد مختلط / + کوئیز

* تابع:
فرض کنید $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به صورت $y = f(x)$ داده شده باشد.
اگر این تابع می‌نامیم هرگاه $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ، $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

$A = \{1, 2, 4\}$ $\quad A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ $\quad$ تعداد اعضا $= 2 \times 3 = 6$ (عضو B، عضو A)

$B = \{a, b\}$ $\quad A \times B = \{(1,a)(1,b)(2,a)(2,b)(4,a)(4,b)\}$

تعداد زیرمجموعه $= 2^6 = 64$ (ضرب دکارتی)

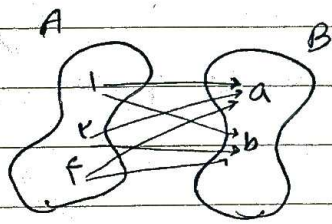
هر زیرمجموعه از حاصل ضرب دکارتی = رابطه (R)

چون دو عضو اول با هم برابرند تابع نیست $\Rightarrow \{(1,a)(1,b)(4,b)\} \neq$ رابطه

تابع متغیر: $\{(1,b)(2,a),(4,a)\}$ * لزوماً یک به یک نیست

$\{(1,a)(4,b)\}$ * یک به یک است * پوشا هم هست

$R = \{(1,a)\} = C$ *



* گاهی هم تابع محدود می‌شود.

(Domain) (Df)
- دامنه: تمام عضوهای اول. مثلاً: $D(C) = \{1\}$

(Range) (Rf)
- برد: تمام عناصر دوم. مثلاً: $R(C) = \{a\}$

* اگر عناصر دوم با هم برابر نباشند می‌گوییم یک به یک است.

* اگر برد یک تابع دقیقاً برابر مجموعه دوم باشد می‌گوییم پوشا است.

* سؤال در صفحه بعد.

Subject ..... Date .....

الف) ثابت کنید عبارت روبه‌رو تابع است. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$

* پس تابع است $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow y_1 = y_2$



ب) دامنه؟ $D_f = \mathbb{R}$ برد؟ $R_f = \mathbb{R}^+$

ج) پوشاست؟ $y_1 = y_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \quad x_1 = \pm x_2$ د) یک‌به‌یک است؟

* اگر یک خط افقی بکشیم باید بیش از یک نقطه قطع کند ← تابع یک‌به‌یک نیست

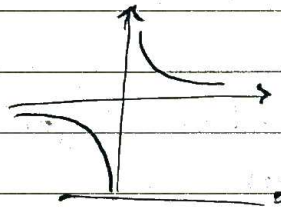
* اگر " " تابع " " " " " "

یک‌به‌یک است؟ به چون بقیه‌ی اعداد هر عدد متحصر به فرد است.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x} \quad R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

پوشاست؟ خیر ← چون عدد نمی‌دهد.



اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند ← آنگاه $f \pm g$ نیز تابع است.

$f \cdot g$ و f/g نیز تابع است.

* اگر f و g دو تابع باشند ← آنگاه دامنه‌ی مجموعه‌ی $f \pm g$ برابر است با $D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$

مثال: $h(x) = \sqrt{x} \to D_f = \mathbb{R}^+ \quad h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x} \to D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_h = \mathbb{R}^+ - \{0\}$

$D_{f/g} \to D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

عمودکها تابع:

اگر عمودکها تابع $f(x) + b$ نسبت به $f(x)$ به چه سمت زیر عمل میکند

f, b واحد به سمت تابع جابه جا میشود.

اگر $b > 0$ باشد به سمت بالا

" $b < 0$ " " پایین

clips TIM

Subject ..... Date .....

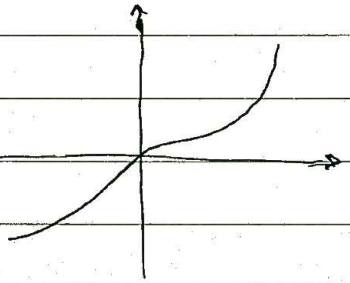
نمودار تابع $f(x+a)$:

f را a واحد به سمت افق جابجا میکنیم.

اگر $a>0$ به سمت چپ

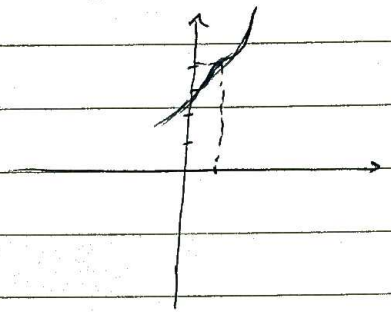
اگر $a<0$ به سمت راست

$f(x) = x^3$



$f(x) = (x-1)^3 + 4$ ← یک واحد راست

چهار واحد بالا

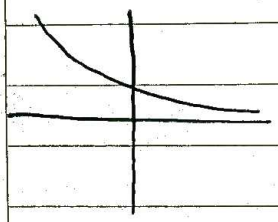


$f(x) = x^3 - 3x$

توابع نمایی

$y = a^x$

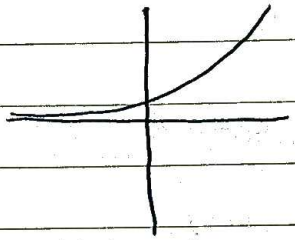
$0 < a < 1$



$D_{a^x} = \mathbb{R}$

$R_{a^x} = (0, +\infty)$

$a > 1$



$$\lim_{x \to +\infty} a^x \begin{cases} 0 & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ 0 & a > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{x+1} + 5}{3^{x-2} + 5^{x+1}} \to = \frac{3^x \times 3^1 + 5^x \times 5^{-2}}{3^x \times 3^{-2} + 5^x \times 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3 \times (\frac{3}{5})^x + 5^{-2}}{3^{-2} \times (\frac{3}{5})^x + 5} = \frac{5^{-2}}{5} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$$

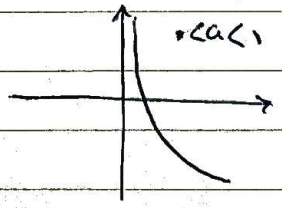
وقتی پایه بین ۰ و ۱ است با بزرگترین پایه و وقتی پایه بیشتر از ۱ است با کوچکترین پایه رسیدگی می‌کنیم

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^{x+1} + 5}{3^{x-2} + 5^{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{x-2}}{5^{x+1}} = \lim_{x \to +\infty} 5^{x-2-x-1} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x-3} + 5^{x+2}}{e^{x+1} + 5^{x-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{x+2}}{5^{x-1}} = 5^3 = 125$$

$y = a^x \iff \log_a^y = x$

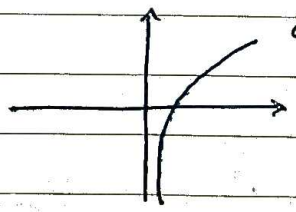
$0 < a < 1$



$D_{\log_a^x} = (0, +\infty)$

$R_{\log_a^x} = \mathbb{R}$

$a > 1$

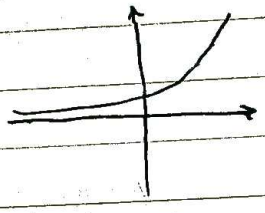


$$\lim_{x \to +\infty} \log_a^x \begin{cases} -\infty & 0 < a < 1 \\ +\infty & a > 1 \end{cases}$$

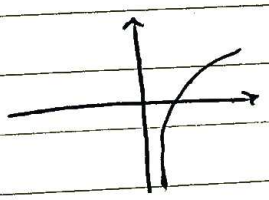
$$\lim_{x \to 0^+} \log_a^x \begin{cases} +\infty & 0 < a < 1 \\ -\infty & a > 1 \end{cases}$$

Subject ..... Date .....

$y = e^x$



$y = \ln x$



$\ln x =$ توان e که x شود

$e^{\ln x} = x \quad x \in (0, +\infty)$

$\ln e^x = x \quad x \in \mathbb{R}$

$\log_a^x \rightarrow$ تابع لگاریتم با پایه a و آرگومان x

$\log_a^b = \frac{\log_b^b}{\log_b^a} \rightarrow \log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\log_a^{x^n} = n \log_a^x$

$\log_{a^m}^x = \frac{1}{m} \log_a^x$

ویژگی‌های تابع لگاریتم

ثبت ← تابع لگاریتم برای $a > 1$ ← تابع لگاریتم بین صفر و یک

ثبت ← تابع لگاریتم برای $0 < a < 1$ ← تابع لگاریتم بین صفر و یک

مثال ۴ / صفحه ۱۴۰:

$2^{n-1} = 3^n$

$\ln 2^{n-1} = \ln 3^n \quad (n-1)\ln 2 = n \ln 3$

$n(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2$

$n = \frac{\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}}^2$

مثال ۴ [خوانده شود]

مثال اضافی:

معادله‌ی لگاریتمی زیر را حل کنید.

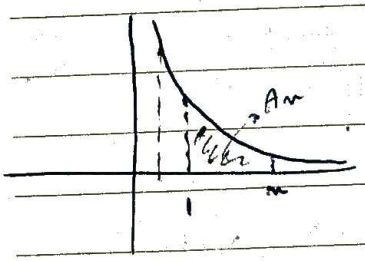
$\log(n+4) = \frac{1}{2} \log(2n+11)$

$\log(n+4) = \log\sqrt{2n+11} \rightarrow n+4 = \sqrt{2n+11} \rightarrow n^2 + 8n + 16 = 2n + 11$

$n^2 + 6n + 5 = 0 \rightarrow (n+5)(n+1) = 0 \rightarrow n = -5$ ق ق

$\rightarrow n = -1$ ✓

صفحه ۱۴۲ /



$\ln n = \begin{cases} Am & n > 1 \\ -Am & n < 1 \end{cases}$

$\exp \rightarrow e^x$

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ ؟

clips TTM

Subject ..... Date .....

* تمرین با صفحه ۱۴۶

$a^n = e^{n \ln a}$

$d/dx(a^n) = \ln a \cdot a^n$

* ص ۱۴۶ تمرین
* ص ۲۲۲ ضمیمه

$d/dx(a^u) = u' a^u \ln a$

$\infty^0 \cdot 0^0 \cdot 1^\infty$ ← در ریاضی ۱ سوال بیش باید این ها را بلدیم

* حل سوال ریاضی ۱

$\lim_{x \to a} h(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) \ln h(x)}$

$\lim_{n \to 0^+} n^n = e^0 = 1 \quad y = n^n \Rightarrow \ln y = n \ln n$

$\lim_{y \to 0^+} y = \lim_{n \to 0^+} n \ln n \overset{0 \times -\infty}{=} \lim_{n \to 0^+} \frac{\ln n}{1/n} \overset{\frac{\infty}{\infty} \text{ HOP}}{=} \lim_{n \to 0^+} \frac{1/n}{-1/n^2} = \lim_{n \to 0^+} n = 0$

$\lim (1 + \sin 3/n)^n = 1^\infty$ نکته

$y = (1 + \sin 3/n)^n \Rightarrow \ln y = n \ln(1 + \sin 3/n) \rightarrow \lim_{n \to +\infty} \ln y = \lim_{n \to +\infty} n \ln(1 + \sin 3/n)$ ×∞

$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(1 + \sin 3/n)}{1/n} \overset{\text{HOP}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{-3/n^2 \cos 3/n}{1 + \sin 3/n}}{-1/n^2} = +3$

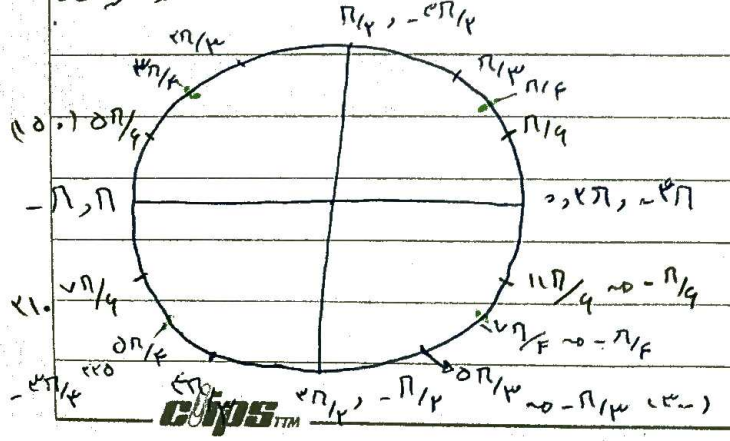
$\lim_{n \to +\infty} \ln y = 3 \rightarrow \lim_{n \to +\infty} y = e^3$

■ عکس های شناختی ؟

- رادیان : طول کمانی از دایره که با شعاع دایره برابر است.

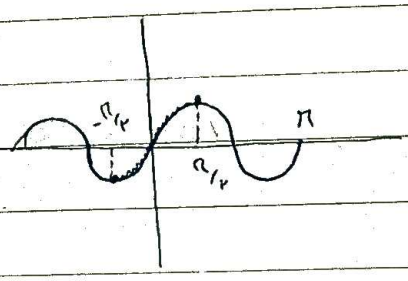
کمان دایره برحسب رادیان $= \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$

π رادیان $= 180^\circ$



Subject ..... Date .....

$y = \sin^{-1} x$ $y = \text{Arc}\sin$



$\sin^{-1}(\sin x) = x$

$\sin(\sin^{-1} x) = x$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

$\sin^{-1}(0) = 0$

$\sin^{-1}(1) = \pi/2$

$\sin^{-1}(-1/2) = -\sin^{-1}(1/2) = -\pi/6$

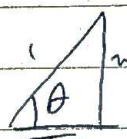
مثال ص ۲ / ص ۱۵۹

$\cos(\sin^{-1} 0.4) \rightarrow \sin^{-1} 0.4 = \theta \rightarrow \sin\theta = 0.4$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-0.16} = \sqrt{0.84} = 0.18$

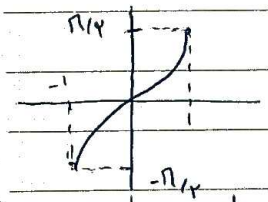
* سوال امتحان ؟

$\tan(\sin^{-1} x)$



$\sin^{-1} x = \theta \rightarrow \sin\theta = x \rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

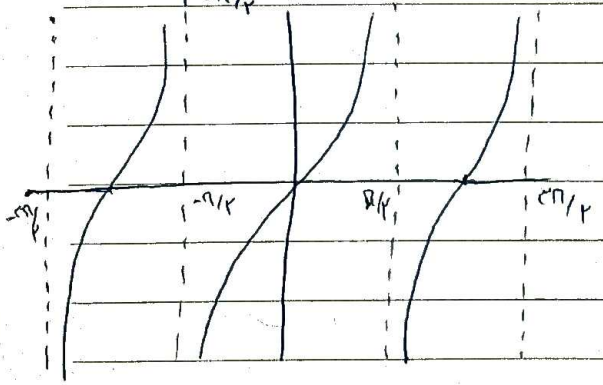
$\cos\theta = \sqrt{1-x^2} \rightarrow \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



$\rightarrow \sin^{-1}$ نمودار

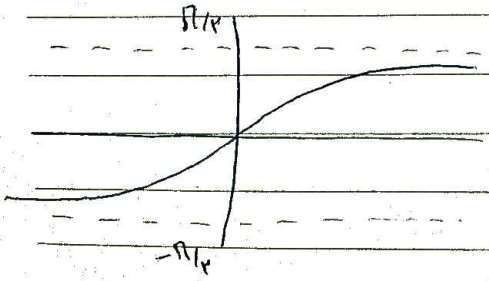
$D_{Tan} = (-\pi/2, \pi/2)$

$y = \tan^{-1} x \leftrightarrow x = \tan y$



$D_{\tan^{-1} x} = \mathbb{R}$ $R_{\tan^{-1} x} = (-\pi/2, \pi/2)$

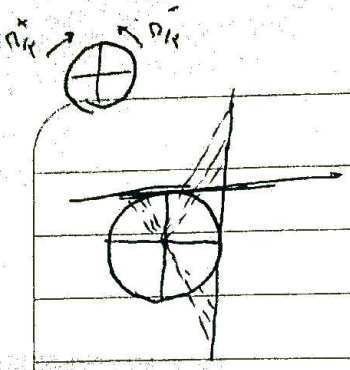
$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$



$y = \tan^{-1} x$

clips™

Subject ..... Date .....



$\lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = -\infty$

$\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$

$\cot \pi/2 = 0$

$\lim_{x \to \pi/2^+} \tan x = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to \pi^+} \cot x = +\infty \qquad \lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$

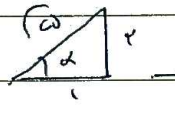
$\therefore$ حد ندارد $\frac{1}{0}$ ★



۱) $\tan(\tan^{-1} 2) = 2$

۲) $\tan^{-1}(\tan 3\pi/4) = -\pi/4$

۳) $\cos(\tan^{-1} 2) = \tan^{-1} 2 = \alpha \rightarrow \tan\alpha = 2$



$\rightarrow \cos\alpha = 1/\sqrt{5}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \rightarrow \cot^2 x \cdot \csc^2 x - 1 \,/\, \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$\int u' \sec^2 u \, dx = \tan u + C$

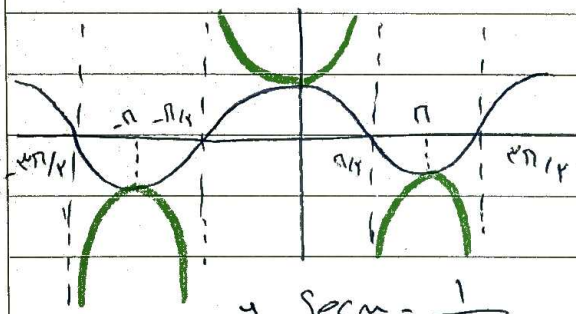
$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

$\int \sin ax \, dx = \frac{1}{a} \cos ax + C$

$\int u' \csc^2 u \, dx = -\cot u + C$

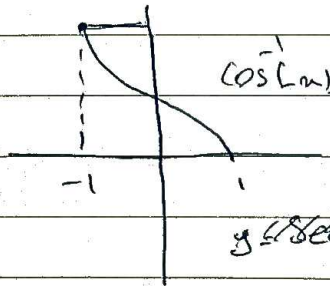
$\int u' \sin u \, dx = -\cos u + C$



$\cos^{-1} x = \pi/2 - \sin^{-1} x \qquad -1 \le x \le 1$

$\sec^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1}{x} \qquad |x| \ge 1$

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

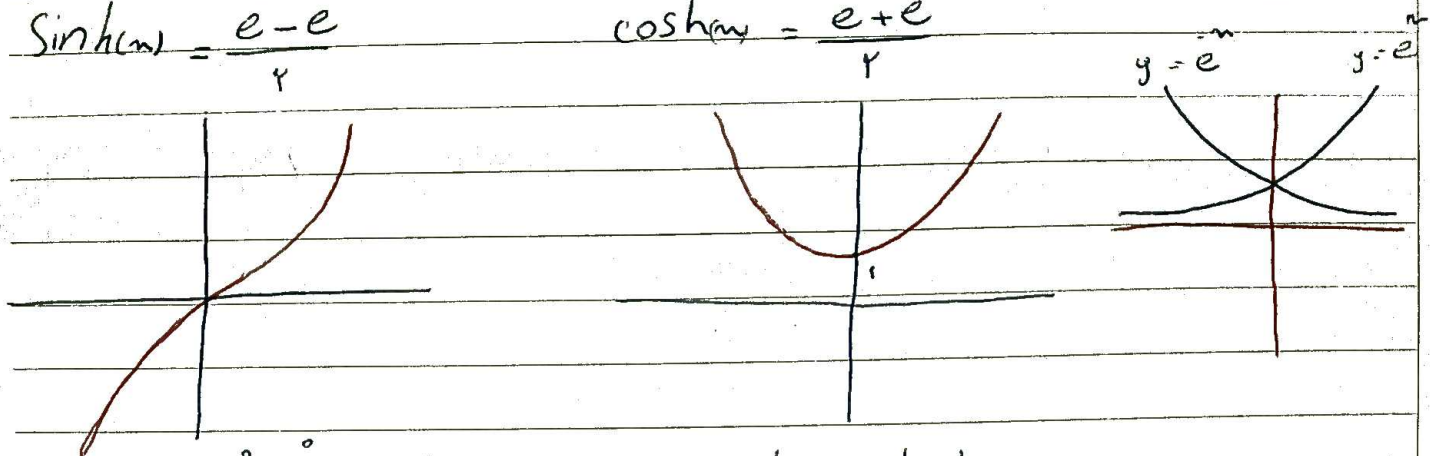
$y = \sec^{-1} x$

"صعودی ۱۶۳" و صفحه "۱۶۲"

Subject ..... Date .....

■ توابع هذلولوی:

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$ $\quad \sinh(0) = \frac{1-1}{2} = 0$

$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{(e^x - e^{-x})}{2} = -\sinh(x)$ $\quad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh(x)$

تابع زوج $\quad$ تابع فرد

صفحه ۱۶۳ سئوال ۱ بالا:

$\boxed{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$ $\rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + \underbrace{2e^x e^{-x}}_{1} - e^{2x} - e^{-2x} + \underbrace{2e^x e^{-x}}_{1}) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$

$\rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$

$\sinh^2 x = 1 + \cosh^2 x$

$\sinh(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3 - 1/3}{2} = 8/9 = 4/3$

$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$

$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$

* تعریف: دامنه تابع $\tanh x$ مجموعه اعداد حقیقی است و برد آن $(-1, 1)$ می‌شود.

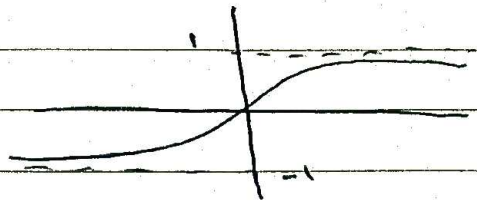
$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\xrightarrow{\times \frac{e^{-x}}{e^{-x}}}$ $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

$\xrightarrow{\times \frac{e^{-2x}}{e^{-2x}}}$ $\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Subject ..... Date .....

$$\lim_{x\to+\infty}\tanh x=\lim\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh x=\lim\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$$



$$\operatorname{sech}x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}\qquad \operatorname{csch}x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$$

تمرین صفحه ۱۶۴

■ توابع هذلولوی معکوس

$\sinh x$ ، $\tanh x$ ... را معکوس پذیرند.

$y=\sinh^{-1}x \Longleftrightarrow x=\sinh y$

مثال: $\sinh^{-1}x$ ، $\tanh^{-1}x$ را حساب کنید.

* مثال ۲ سؤال امتحان ص ۱۶۳

A با یکی از عکس‌های $\tanh x$ یا $\sinh x$

B با

B معکوس تابع $\sinh x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ را بیابید.

$$y=\sinh^{-1}x\Longrightarrow x=\sinh y=\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\xrightarrow{\times\frac{e^{y}}{e^{y}}}x=\frac{e^{2y}-1}{2e^{y}}$$

$$2xe^{y}=e^{2y}-1\Longrightarrow(e^{y})^{2}-2xe^{y}-1=0\xrightarrow[\text{بر حسب } e^{y}]{\text{معادله درجه دوم}}e^{y}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^{2}+4}}{2}$$

$$=x\pm\sqrt{x^{2}+1}\xrightarrow[\sqrt{x^{2}+1}>x]{e^{y}>0}e^{y}=x+\sqrt{x^{2}+1}\Longrightarrow y=\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})$$

$$y=\tanh^{-1}x\Rightarrow x=\tanh y\Rightarrow x=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}\xrightarrow{-1<x<1}xe^{2y}+x=e^{2y}-1\quad -1<x<1$$

$$xe^{2y}-e^{2y}=-x-1\Rightarrow e^{2y}(x-1)=-x-1\Rightarrow e^{2y}=\frac{-x-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}\Rightarrow 2y=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Rightarrow y=\tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

clips TTM

* سوال امتحانی

Subject ..... Date .....

۱- حد در بی‌نهایت:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-\sqrt{x+2}} \overset{\%\text{ Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{1/2}{3/4} = 2/3$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right) \overset{\infty-\infty}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} \overset{\%\text{ Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \overset{\%\text{ Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cot x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$= \frac{-2+8}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2\cos 2x}{2e^x - 2 - 2x} \overset{\%\text{ Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 4\sin 2x}{2e^x - 2} \overset{\%\text{ Hop}}{=\!=} \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 8\cos 2x}{2e^x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-x\cos x} \overset{\%\text{ Hop}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-(\cos x + x\sin x)}$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x-3}{x^2-2x-3} = \frac{-5}{0^-} = +\infty \qquad 2x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$$

	-1		3	
	$+$	0	$-$	0

$$\sqrt[n]{a_n x^n + b x^{n-1} + \cdots + c} \simeq \sqrt[n]{a}\left|x + \frac{b}{na}\right|$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} 3x - \sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 3\left|x - \frac{-6}{18}\right| = 3x + 1 = \begin{cases} x\to+\infty, x>0 \Rightarrow = +\infty \\ x\to-\infty = -\infty \end{cases}$$

* از این به بعد sin و tan به صورت صفر در نظر گرفته نشود.

$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} \qquad 1-\cos u = u^2/2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 3x}{x^2} = \frac{9x^2}{x^2} = 9$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{2-2\cos 2x}} = \frac{2x}{\sqrt{2(2\sin^2 x)}} \cdot \frac{\sin 2x}{2|\sin x|} \simeq \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2|x|} \begin{matrix} x\to 0^+ \to +1 \\ x\to 0^- \to -1 \end{matrix}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2-2x}{\cot \pi x/2} \overset{0/0}{=\!=} \lim_{t\to 0} \frac{2-2(t+1)}{\cot \pi/2(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{2-2t-2}{\cot(\pi/2+\pi t/2)} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t}{-\tan \frac{\pi t}{2}} \simeq \frac{-2t}{-\frac{\pi t}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

$t = x-1 \to x = t+1$

$x\to 1 \Rightarrow t\to 0$

$* R_{\sin^{-1}x} = [-\pi/2, \pi/2]$ ، $* R_{\cos^{-1}x} = [0, \pi]$

Subject ..... Date .....

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}} \overset{\%}{=} \lim_{x\to 1} \frac{t}{\sqrt{1-\cos^2 t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{(1+\cos^2 t)(1-\cos^2 t)}} \sim \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{2}t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos^{-1}\sqrt{x} = t \Rightarrow \sqrt{x} = \cos t \to x = \cos^2 t$ ، $x \to 1^- \to t \to 0^+$

* مثال اول: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر همه جا پیوسته باشد.

$$f(x) \begin{cases} ax - 2^x & x < -2 \\ ax^2 - bx & -2 \le x \le 1 \\ ae^{x-1} + b & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^+} f(x) = f(-2) \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \end{cases}$$

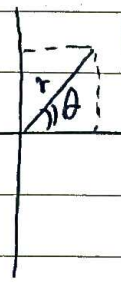
$$\begin{cases} -2a - 2^{-2} = 4a + 2b \xrightarrow{b=0} -2a - \frac{1}{4} = 4a \Rightarrow 6a = -\frac{1}{4} \to a = -\frac{1}{24} \\ a - b = a + b \Rightarrow b = 0 \end{cases}$$

* مثال دوم: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x) \begin{cases} a[x] - 2b & x < 1 \\ 4 & x = 1 \\ ax - b\frac{|x-1|}{x-1} + 2 & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \end{cases} \begin{cases} -2b = 4 \Rightarrow b = -2 \\ a - b + 2 = 4 \xrightarrow{b=-2} a = 0 \end{cases}$$

* مبحث ۲۸۲ و ۲۸۳ "مختصات قطبی"



* r را نسبت به θ ، زاویه‌ای که شعاع $(+)$ ox با r می‌سازد، طوری که r همواره مثبت می‌شود.

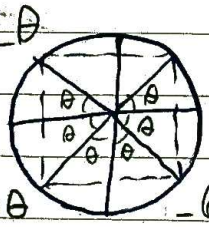
$$r = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = y/x \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1} y/x$$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = y/x \Leftrightarrow \theta = \tan^{-1} y/x \end{array}\right\} \Rightarrow \text{دیاگرام}$$

"$x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$"

* مختصات قطبی نقطه‌ای نیست که نقطه منحصر به فرد باشد.

"مبدأ = نقطه $r=0$ = کوتاهی"

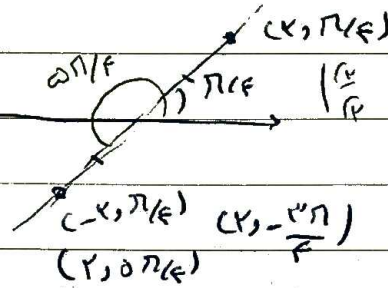


clips TTM

Subject ..... Date .....

$\rightarrow$ تبدیل $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\begin{matrix} 2\cos\pi/4 = \sqrt{2} \\ 2\sin\pi/4 = \sqrt{2} \end{matrix}$

۰	۰
۰	۰



$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

مختصات قطبی $A(-2\sqrt{3},1)$ را در دستگاه قطبی بیابید.

$(1,-2\sqrt{3})$ در ناحیه دوم است. $\frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = \tan\pi/6$ $\quad r = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ $\quad (-2\sqrt{3},1) = [2, \frac{5\pi}{6}]$

$(-3,-\sqrt{3})$ در ۳ $\quad r = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ $\quad \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\theta \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

نقطه در ربع سوم است. $\theta = \pi + \pi/6 = 7\pi/6$ $\quad [2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}] = (-3,-\sqrt{3})$

■ نمودهای قطبی:

"دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است" $\rightarrow$ چیست؟ $\rightarrow r = 2$

$\Rightarrow r = c \rightarrow$ دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع c است

$r = c \Rightarrow r^2 = c^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = c^2$

"یک خط است" $\rightarrow$ چیست؟ $\rightarrow \theta = \pi/4$

$\tan\theta = 1$ $\quad \frac{x}{y} = 1 \rightarrow x = y$ اسم خط

"خطی است با جهت (+) محور xها که با محور xها زاویه c می‌سازد" $\rightarrow \theta = c$

* مثال:

معادله‌ی خط راست $5 = 3x - 4y$ را در دستگاه قطبی بیابید. $x = r\cos\theta \;/\; y = r\sin\theta$

$3r\cos\theta - 4r\sin\theta = 5$

$\rightarrow r = \frac{5}{3\cos\theta - 4\sin\theta}$

معادله‌ی منحنی قطبی زیر را در دستگاه دکارتی بیابید. $r = 2(\cos\theta - \sin\theta)$

$\times r \rightarrow r^2 = 2r\cos\theta - 2r\sin\theta$

$\rightarrow x^2 + y^2 = 2x - 2y \xrightarrow{\text{مربع کامل}} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2$

$\rightarrow$ دایره‌ای به مرکز $(1,-1)$ و شعاع $\sqrt{2}$ $\quad (x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$

clips

Subject ..... Date

[مبانی انسجام صفحه‌ی ۳۸۴ ، تا ۳۸۷] سؤالات امتحانی

معادله دکارتی منحنی مقابل را بدون استفاده از مختصات قطبی بیابید؟ $r=2a\cos\theta$

$r^2=2ar\cos\theta \rightarrow x^2+y^2=2ax \rightarrow x^2-2ax+a^2+y^2=a^2$

$(x-a)^2+y^2=a^2$ / a شعاع، $(a,0)$ مرکز ← دایره‌ای به

فرض باطل بالا اینکه مرکز دایره به اندازه θ_0 جابجا شده $r=2a\cos(\theta-\theta_0)$

■ نمودار قطبی به معادله‌ی $r=f(\theta-\theta_0)$ نمودار قطبی به معادله‌ی $r=f\theta$ است که به اندازه‌ی θ_0 حول مبدأ دوران یافته است.

$r=a(1-\cos\theta)$ $r=a(1-\sin\theta)$

$a>0$

★ صفحه‌ی ۳۸۵ - ۳۸۶ (دلتون دسته خطی کتاب)

θ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	0	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	2	1	

■ نکته: منحنی‌های $r=\sin n\theta$ و $r=\cos n\theta$ دارای n برگ هستند اگر n عددی صحیح فرد باشد و $2n$ برگ خواهد بود.

مثال: $r=\cos 4n\theta$ ← گل چهارپر است و متقارن است

$r^2=\cos 2\theta$ $r=\sin 3\theta$ $r=\theta$

معادلات دکارتی زیر را در مختصات قطبی بنویسید.

۱) $y=\frac{x}{x^2+1}$ ۲) $x^2-y^2=12$ ۳) $x^3=4y^2$ ۴) $x^2+y^2-4x=0$

clips TTM

Subject ..... Date .....

$r^2\cos^2\theta + r\sin^2\theta - 4r\cos\theta = 0 \rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \rightarrow r^2 = 4r\cos\theta$: کلاس ⇐

$r = 4\cos\theta$ ⇐ جواب (A)

۱) $r = 2\sin\theta$ ۲) $r = 1 - \sin\theta$ ۳) $r = 2\csc\theta$ ۴) $r = \frac{4}{3 - 2\cos\theta}$

۳ $\Rightarrow r = \frac{2}{\sin\theta} \Rightarrow r\sin\theta = 2 \Rightarrow y = 2$

• نمودار معادلات داده شده را رسم کنید.

۱) $r = 3$ ۲) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ۳) $r\sin\theta = 1$ ۴) $r = \theta$

۵) $r = 1 + \cos\theta$ ۶) $r = 1 + \sin\theta$ ۷) $r = 3\cos\theta$ ۸) $r = -2\sin\theta$

■ اعداد مختلط

$a + ib$; $a, b \in \mathbb{R}$ — Re: قسمت حقیقی، Im: قسمت موهومی

$a + bi$

$i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$

$n^2 + 1 = 0 \Rightarrow n^2 = -1 \Rightarrow n^2 = i^2 \Rightarrow n = \pm i$

$n^2 = 3 \Rightarrow n = \pm\sqrt{3}$

$n^4 - 4 = 0 \rightarrow n = \pm 2$

* به اندازه‌ی درجه‌اش جواب دارد * مثلاً n^3 ، ۳ تا جواب دارد / n^2 ، ۲ تا جواب دارد /

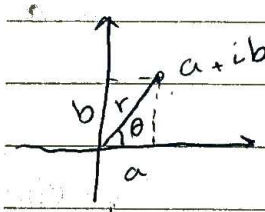
هر جا سینی زیر رادیکال بود به جایش "ن" بنویسیم مثلاً $\sqrt{-3}$ ← $i\sqrt{3}$ / زیر دلتای

- حتی شد میتوانیم به جایش "ن" بنویسیم.

$n^2 + n + 1 = 0$

$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$n_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ $n_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$



$Re(3 - 5i) = 3$, $Im(3 - 5i) = -5$

$Re(3) = 3$, $Im(3) = 0$ → عدد حقیقی

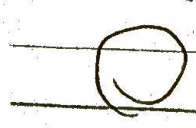
$Re(5i) = 0$, $Im(5i) = 5$ → موهومی محض

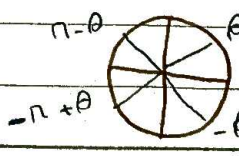
$r = |w| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ → "قدر"

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan\theta = \frac{b}{a}$ θ → سینوس

آرگومان → $\arg(w) = \theta$ $Arg(w) = \theta$

$0 < \theta \leq \pi$ $-\pi < \theta \leq \pi$





clips TTM

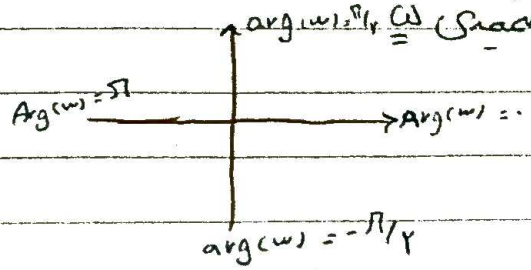
Subject ..... Date .....

مثال: صفحی $w=2$ $|w|=2$ $\arg(w)=0$

$w=-2$ $|w|=2$ $\arg(w)=\pi$

$w=2i$ $|w|=2$ $\arg=\pi/2$

$w=-2i$ $|w|=2$ $\arg=-\pi/2$



$w=1+i$ $|w|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\arg(w)=\pi/4$

$w=-1+i$ $|w|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\arg(w)=\pi-\pi/4=\frac{3\pi}{4}$

$w=-2-2i$ $|w|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ $\arg(w)=-\pi+\pi/4=-3\pi/4$

$w=-2-2(-1-i)$ $\rightarrow w=\sqrt{3}-\sqrt{3}i$ $|w|=\sqrt{6}$ $\arg(w)=-\frac{\pi}{4}$

مزدوج اعداد مختلط:

$w=a+ib$ $\quad \bar{w}=\overline{(a+ib)}=a-ib$

$\bar{3}=3$ $\quad \overline{3i}=-3i$ $\quad$ مثال: $\overline{3+2i}=3-2i$

عدد حقیقی $w=\bar{w}$ $\quad$ عدد موهومی $w=-\bar{w}$

i $\quad i^2=-1$ $\quad i^3=-i$ $\quad i^4=1$ $\quad i^5=i$ $\quad i^6=-1$ $\quad i^7=-i$ $\quad i^8=1$ ...

جمع و تفریق اعداد مختلط:

$w=a+ib$ $\quad z=x+iy$

$w+z=(a+x)+(b+y)i$

$w-z=(a-x)+(b-y)i$

$i^2=-1$

$wz=(a+ib)(x+iy)=ax+iay+ibx+iby$

$\rightarrow (ax-by)+i(ay+bx)$

$\star$ $w\bar{w}=(a+bi)(a-bi)=a^2-iab+iab-i^2b^2=a^2+b^2$

$|w\bar{w}=|w|^2|$ $\quad |\overline{(w\pm z)}=\bar{w}\pm\bar{z}|$ $\quad |\overline{wz}=\bar{w}\bar{z}|$

clips TTM

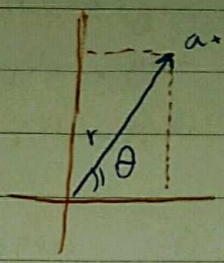
Subject ..... Date .....

$(2+3i)(1-2i) = (2+6)+(-4+3)i = 8-i$ ★ ! نیاز ضرب ★

① $w = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,cis\,\theta$

② $z = s(\cos\theta + i\sin\theta) = s\,cis\,\theta$

③ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$



$a = r\cos\theta$

$b = r\sin\theta$

$a+ib = r\cos\theta + ir\sin\theta =$

★ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ★

$wz = rs(\cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi))$

$|wz| = |w||z|$ $\quad \arg(wz) = \arg(w) + \arg(z)$

$|w_1 w_2 \dots w_n| = |w_1||w_2| \dots |w_n|$

$\arg(w_1 w_2 \dots w_n) = \arg(w_1) + \arg(w_2) + \dots + \arg w_n$

$\rightarrow w_1 = w_2 = \dots = w_n \rightarrow |w^n| = |w|^n \quad \arg(w^n) = n\arg(w)$

قضیه دموآور $\rightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

مثال $\rightarrow (1+i)^8 \quad b/a = 1$

★ سپس از آن ریشه n ام بگیرید + قسم + از اینجا ↑ از آن بازدن آن ریشه ★

$|w^8| = |w|^8 \rightarrow w = \sqrt{2} \rightarrow \arg(w^8) = 8\arg(w)$

$\rightarrow$ سپس ضرب $\rightarrow a(1+i) = \sqrt{2} \quad \arg(1+i) = \pi/4 \quad (1+i)^8 = (\sqrt{2})^8(\cos\frac{8\pi}{4} + i\sin\frac{8\pi}{4})$

$= 16(-1 - i0) = -16$

تقسیم دکارتی ★

$w^{-1} = \frac{1}{w} = \frac{1}{ai+bi} = \frac{1}{ai+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{\bar{w}}{|w|^2} \qquad |\frac{1}{w}| = 1/w$

$\arg(1/w) = -\arg(w)$

$z/w = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(x+iy)(a-bi)}{a^2+b^2} = \frac{ax+by}{a^2+b^2} + \frac{ay-bx}{a^2+b^2}i$

$|z/w| = \frac{|z|}{|w|} \quad \arg|z/w| = \arg z - \arg w$

clips TTM

مثال ۹ حاصل $\left(\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$ را بدست آورید.

$$|i|=1 \quad \arg(i)=\pi/2 \qquad |1+i\sqrt{3}|=2 \quad \arg(1+i\sqrt{3})=\pi/3$$

$$\left|\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right|=1/2 \qquad \arg\left(\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right)=\pi/2-\pi/3=\pi/6$$

$$\left(\frac{i}{1+i\sqrt{3}}\right)^5=(1/2)^5\left(\cos 5\pi/6+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=(1/2)^5\left(-\sqrt{3}/2+i\,1/2\right)$$

ریشه‌های اعداد مختلط

- فرض کنید z یک عدد مختلط باشد (ناصفر) ـ n عدد صحیح مثبت دلخواه

می‌دانیم $w^n=z$ یک صورت است. این n عدد را ریشه‌های nام z می‌نامیم.

هرگاه z یک عدد مختلط ناصفر، θ یک سنبله اصلی z $(-\pi<\theta\le\pi)$ آنگاه:

ریشه اصلی
$$w_1=|z|^{1/n}\left(\cos\theta/n+i\sin\theta/n\right)$$

$$w_2=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{2\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2\pi+\theta}{n}\right)$$

$$w_3=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{4\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{4\pi+\theta}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_n=|z|^{1/n}\left(\cos\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi+\theta}{n}\right)$$

ریشه‌های سوم عدد ۱ را بیابید.

$$1=1(\cos 0+i\sin 0)$$

ریشه اصلی $w_1=\sqrt[3]{1}\left(\cos 0/3+i\sin 0/3\right)=1$

$$w_2=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{2\pi+0}{3}+i\sin\frac{2\pi+0}{3}\right)=-1/2+i\sqrt{3}/2$$

$$w_3=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{4\pi+0}{3}+i\sin\frac{4\pi+0}{3}\right)=-1/2-i\sqrt{3}/2$$

مثال ۱۰ ریشه‌های چهارم (-4) را بیابید.

$$-4=4(\cos\pi+i\sin\pi)$$

clips

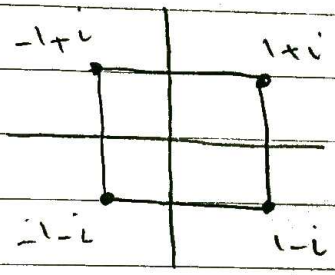
Subject ..... Date .....

$$w_1 = \frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt{2}}\left(\cos \pi/4 + i\sin \pi/4\right) = 1+i$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{2\pi+\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi+\pi}{4}\right) = -1+i$$

$$w_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{4\pi+\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi+\pi}{4}\right) = -1-i$$

$$w_4 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{6\pi+\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi+\pi}{4}\right) = 1-i$$



توضیح دستور (فرمول) دموآور:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$w_1 = \sqrt{z} = \sqrt{r}\left(\cos \theta/2 + i\sin\theta/2\right) \qquad w_2 = -\sqrt{z}$$

مثال:

$$\sqrt{4} \rightarrow 4 = \sqrt{4(\cos 0 + i\sin 0)} = 2(\cos 0/2 + i\sin 0/2) = 2$$

$$\star\sqrt{i} = \sqrt{1(\cos \pi/2 + i\sin \pi/2)} = 1\left(\cos \pi/4 + i\sin \pi/4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۲ ارتوماتس را حل کنید؟

$$\sqrt{-1/2 + i\sqrt{3}/2} = \sqrt{1(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)}$$

$$= \cos \pi/3 + i\sin \pi/3 = 1/2 + i\sqrt{3}/2$$

روش دوم

$$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} = \tan \pi/3$$

مثال:

$$z^6 + z^3 + 1 = 0$$

$$z^3 = t \qquad t^2 + t + 1 = 0$$

$$z^3 = -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1(\cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3)$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \frac{2\pi/3}{3} + i\sin \frac{2\pi/3}{3}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \frac{2\pi/3 + 2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi/3 + 2\pi}{3}\right)$$

$$\vdots$$

$$z^4 + z^2 + 1 = 0$$

$$z^2 = t \qquad t^2 + t + 1 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\star = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}^2}{2} = -1/2 \pm i\sqrt{3}/2$$

$$z^2 = -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{matrix} w_1 = 1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ w_2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{matrix}$$

$$z^2 = -1/2 - i\sqrt{3}/2 \quad \begin{matrix} w_3 = -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ w_4 = 1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{matrix}$$

Subject ..... Date .....

$$z^{q} = \frac{-(1-\sqrt{3}i)^{5F}}{(-2+2i)^{3q}} \rightarrow 1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)\right)$$

$$-2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos 3\pi/4 + i\sin 3\pi/4\right)$$

$$z^{q} = \frac{2^{5F}\left(\cos\frac{-15\pi}{3} + i\sin\frac{-15\pi}{3}\right)}{(2\sqrt{2})^{3q}\left(\cos\frac{3\times 3\pi}{4} + i\sin\frac{3\times 3\pi}{4}\right)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$z^{q} = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = 1\left(\cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}\right) = \sqrt{3}/2 + i/2$$

$$w_3 = \left(\cos\frac{4\pi}{7} + i\sin\right) = -\sqrt{3}/2 + i/2$$

$$w_4 = \left(\cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\right) = -1$$

$$w_5 = \left(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\right) = -\sqrt{3}/2 - i/2$$

$$w_6 = \left(\cos\frac{10\pi}{7} + i\sin\right) = \sqrt{3}/2 - i/2$$