آمار و احتمال

Year : Month: Date:

Subject:

آمار توصیفی:

علم آمار: علم جمع آوری و دسته بندی و تجزیه و تحلیل از اطلاعات

از جامعه آمار علم جمع آوری می کنیم

جامعه آماری: مجموعه ای از اشیاء که حداقل در یک صفت مشترک باشند (صفت مشخصه)

مثال: جامعه دانشجویان رشته نرم افزار، جامعه تولیدات سال ۹۵ ایران خودرو

جامعه کشاورزان شهر کار رفسنجان (لزوما همه از اسفناک دارند)

حجم جامعه: تعداد افراد جامعه

جامعه آماری: متناهی: تعداد افرادآن محدود است

نامتناهی: تعداد افرادآن خیلی زیاد و نامحدود است

صفت: صفتی است که معمولا از فردی به فرد دیگری تغییر می کند (متغیر، قابل اندازه گیری یا قابل اندازه گیری نباشد)

متغیر کمی: قابل اندازه گیری است مثل: نوع مشخص مرتب نزاد، نوع بیماری، مهارت، کیفیت خوبی و ... و ...

متغیر کمی: اندازه پذیر است

گسسته: (شمارشی) (اعشاری پذیر نیست) معادل پذیر است

پیوسته: نامعادل است

Scanned by CamScanner

ubject:

Year: Month: Date:

مثال کمی گسسته: تعداد تصادفات، تعداد مراجعین به یک سیستم، تعداد فرزندان و ...

مثال کمی پیوسته: وزن، قد، درآمد و ...

روش توصیفی

سرشماری: مطالعه همه افراد جامعه آماری

نمونه گیری: مطالعه قسمتی از جامعه که به صورت تصادفی انتخاب می شود

دسته بندی

خلاصه کردن داده ها:

۱) جدول فراوانی نوع متغیر

۲) نمودارهای آماری

۳) شاخص های عددی

جدول فراوانی متغیر کمی:

نمره خوبی ۲۰ دانشجو به شرح زیر است

A B a AB A

B A A a a

AB B a A A

B A A a B

$n = 25$ تعداد داده ها

$k = 4$ تعداد متغیرها (A و a و B و AB)

$\sum f_i = n$ (تعداد) مجموع فراوانی ها

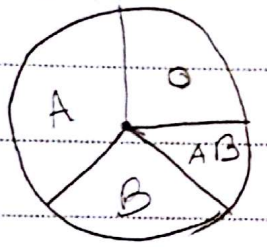
$\sum r_i = 1$ مجموع فراوانی نسبی

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

متغیر x_i	f_i	فراوانی (فراوانی مطلق) مقدار یا هر متغیر	فراوانی نسبی $r_i = \frac{f_i}{n}$
O		۵	$\frac{۵}{۲۰} = ٪۲۵$
A		۸	$\frac{۸}{۲۰} = ٪۴۰$
B		۵	$\frac{۵}{۲۰} = ٪۲۵$
AB		۲	$\frac{۲}{۲۰} = ٪۱۰$
جمع		۲۰	$۱ = ٪۱۰۰$

نمودار یک متغیر کیفی یا کمی گسسته متغیر یعنی است نمودار دایره ای است



درجه دایره

O : ٪۲۵ × ۳۶۰ = ۹۰

A : ٪۴۰ × ۳۶۰ = ۱۴۴

B : ٪۲۵ × ۳۶۰ = ۹۰

AB : ۰/۱ × ۳۶۰ = ۳۶

جدول فراوانی برای متغیر کمی گسسته :

تعداد دانشجویان غایب سر کلاس آمار طی ۶ هفته به شرح زیر است

۲ ۱ ۰ ۳

۱ ۱ ۲ ۰ ۱

۱ ۱ ۱ ۱

۰ ۰ ۲ ۳

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

فراوانی نسبی تجمعی

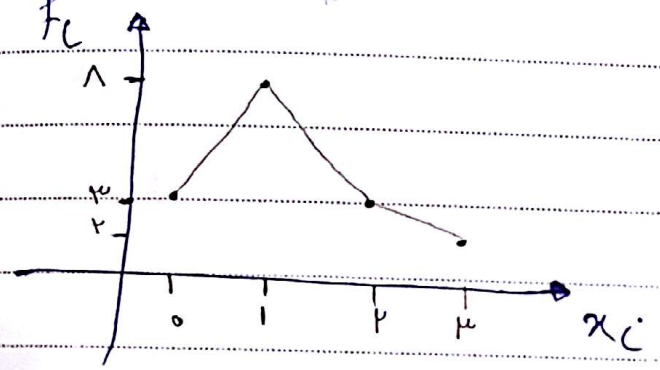
x_i	f_i	r_i	$F_i = f_1 + \dots + f_i$	$R_i = \frac{F_i}{n}$
۰	۳	$\frac{۳}{۱۶}$	۳	$\frac{۳}{۱۶}$
۱	۸	$\frac{۸}{۱۶}$	۱۱	$\frac{۱۱}{۱۶}$
۲	۳	$\frac{۳}{۱۶}$	۱۴	$\frac{۱۴}{۱۶}$
۳	۲	$\frac{۲}{۱۶}$	۱۶	۱
جمع	۱۶	۱		

فراوانی تجمعی (از چپ فراوانی مطابق مقابل بدست می‌آید)

کمتر از ۲ نیست (۰ و ۱)

(دو طبق ۱۴ هفتم ۲ نیست کروایی)

غودار یک معمولاً مناسب این متغیر است غودار چند ضلعی می‌باشد که هر چه که از دایره‌ای هم می‌توان استفاده کرد)



غودار چند ضلعی فراوانی

جدول فراوانی متغیر کمی پیوسته:

برروش طبقه‌بندی انجام می‌شود مراحل طبقه بندی عبارت است از:

۱) تعیین دامنه تغییرات:

$$R = Max - Min$$

۲) تعیین تعداد طبقات (بطور اختیاری)

$$۵ \leq k \leq ۲۰$$

Scanned by CamScanner

۱۴ تعیین فاصله طبقات

$$C = \frac{R}{K}$$

نمرات آمار ۲۰ دانشجویان نرم افزار به شرح زیر است تا فرض $K = 5$ داده ها را طبقه بندی کنید

۱۴ ۱۱ ۹٫۵ ۸

۱۵٫۲۵ ۱۷ ۹٫۷۵ ۱۳

۱۵٫۵ ۱۲٫۵ ۱۳ ۱۴٫۲۵

۱۵٫۷۵ ۱۴٫۵ ۱۴٫۲۵ ۱۱

۱۵٫۲۵ ۸٫۷۵ ۱۲٫۵ ۱۲٫۷۵

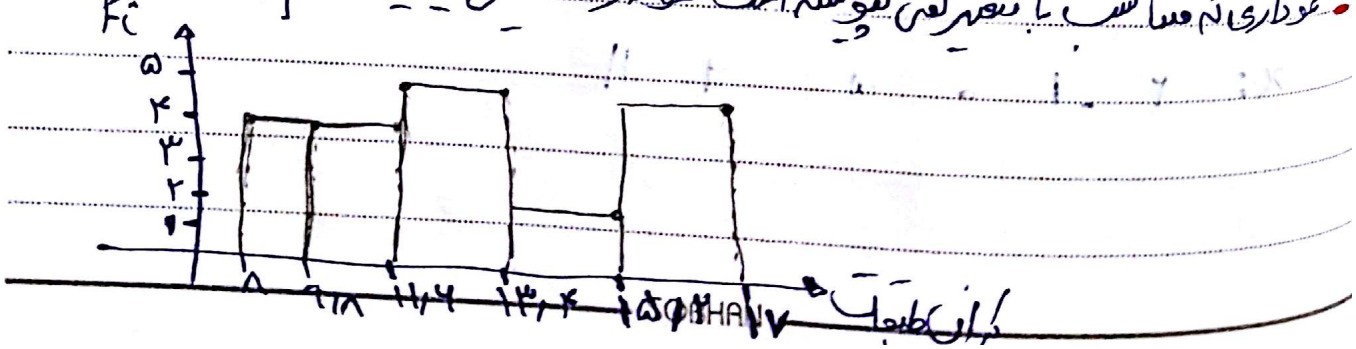
$R = 17 - 8 = 9$

$K = 5$

$$\Rightarrow C = \frac{R}{K} = \frac{9}{5} = \underbrace{1.8}_{\text{اختلاف}}$$

کران طبقات L_i — L_{i+1}	وسط هر طبقه (نماینده طبقات) $x_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}$	تعداد هر طبقه F_i	r_i	F_i	R_i
$+1.8 \Rightarrow 8 - 9.8$	$\frac{8+9.8}{2} = 8.9$	۴	۴/۲۰	۴	۴/۲۰
$9.8 - 11.6$	۱۰٫۷	۴	۴/۲۰	۸	۸/۴۰
$11.6 - 13.4$	۱۲٫۵	۵	۵/۲۰	۱۳	۱۳/۲۰
$13.4 - 15.2$	۱۴٫۳	۲	۲/۲۰	۱۵	۱۵/۲۰
$15.2 - 17$	۱۶٫۱	۵	۵/۲۰	۲۰	۱
جمع		۲۰	۱		

• نموداری که مناسب با تغییرات پیوسته است نمودار مستطیلی یا هیستوگرام است

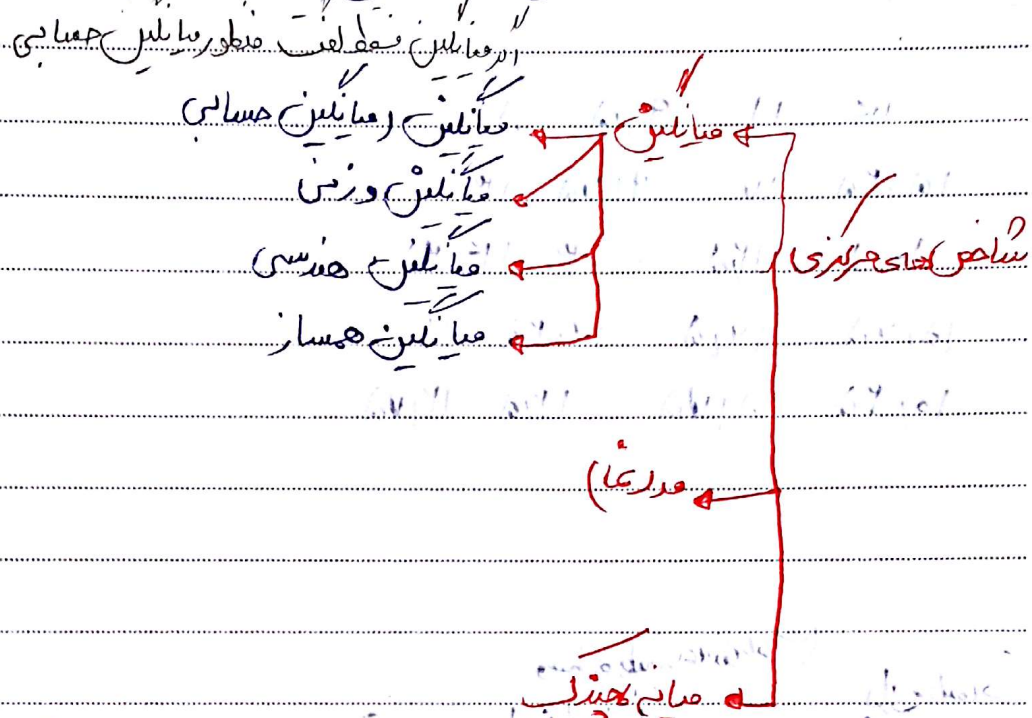


Scanned by CamScanner

شاخص‌های عددی:

اعدادی هستند که متغیر را به صورت خلاصه تبیین می‌کنند.

شاخص‌های مرکزی و شاخص‌های پراکندگی دو نوع شاخص‌های عددی هستند.



میانگین (حسابی): مهم‌ترین نوع میانگین است که از $\bar{x}$ یا متغیر مورد مطالعه باید و میانگین مشاهدات را با $\bar{x}$ نشان می‌دهند.

$$\text{میانگین} = \frac{\text{جمع مشاهدات}}{\text{تعداد مشاهدات}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مشاهدات x: ۲ ، ۱- ، ۰ ، ۵ ، ۹ ، ۱۱

$$\bar{x} = \frac{2 - 1 + 0 + 5 + 9 + 11}{6} = \frac{26}{6}$$

Scanned by CamScanner

فراوانی مطلق

x_i	F_i
-۱	۵
۱	۴
۲	۲
۳	۷
جمع	۱۸

$$\bar{x} = \frac{۵(-۱) + ۴(۱) + ۲(۲) + ۳(۷)}{۱۸}$$

فراوانی نسبی

x_i	r_i
۱	۰/۵
۲	۰/۴
۳	۰/۱
جمع	۱

$$\bar{x} = \frac{۰/۵(۱) + ۰/۴(۲) + ۰/۱(۳)}{۱}$$

① همواره ۱ می‌باشد

عدد ۱ برای مشخص کردن تقسیم

$L_i - L_{i+1}$	F_i	x_i^*
۰ - ۲	۴	$\frac{۰+۲}{۲} = ۱$
۲ - ۴	۳	۳
۴ - ۶	۷	۵
۶ - ۸	۲	۷
۸ - ۱۰	۵	۹
جمع	۲۱	

$$\bar{x} = \frac{۴(۱) + ۳(۳) + ۵(۷) + ۲(۷) + ۵(۹)}{۲۱}$$

مثال ۴ ۲ -۱ ۵

$$\bar{x} = \frac{۴ + ۲ - ۱ + ۵}{۴} = \frac{۱۲}{۴}$$

Scanned by CamScanner

x_i	f_i
۱	۲
۲	۵
۳	۳
۴	۴
	۱۴

$$\bar{x} = \frac{۱(۲) + ۲(۵) + ۳(۳) + ۴(۴)}{۱۴}$$

$c_i - c_{i+1}$	f_i	x_i
۱ – ۳	۲	$\frac{۳+۱}{۲} = ۲$
۳ – ۵	۴	$\frac{۳+۵}{۲} = ۴$
۵ – ۷	۳	$\frac{۵+۷}{۲} = ۶$
۷ – ۹	۵	$\frac{۷+۹}{۲} = ۸$
	۱۴	

$$\bar{x} = \frac{۲(۲) + ۴(۴) + ۶(۳) + ۸(۵)}{۱۴}$$

نکته:

اگر $x \longrightarrow y = ax + b$

آنگاه $\bar{x} \longrightarrow \bar{y} = a\bar{x} + b$

اگر میانگین x ها برابر ۵ باشد میانگین $\frac{-۵x+۶}{۷}$ چند است؟

هرجا در صورت سوال دیدید میانگین اعمال می‌شود

$\bar{y}$ جدید $= \frac{-۵ \times ۵ + ۶}{۷}$

نکته: اگر میانگین m عدد برابر $\bar{x}$ و میانگین n عدد برابر $\bar{y}$ باشد میانگین این $m+n$ عدد

عبارت است از:

$$\frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m+n}$$

Scanned by CamScanner

میانگین ۶ عدد برابر ۱۰ و میانگین ۸ عدد دیگر برابر ۵ است میانگین این ۱۴ عدد چیز است

$$\frac{6\times 10 + 8\times 5}{14}$$

میانگین ۵ عدد برابر با ۸ است و میانگین ۴ عدد دیگر برابر ۵ است میانگین این ۹ عدد چیز است

$$\frac{5\times 8 + 4\times 5}{9}$$

x : ۴ -۱ ۰ ۳ ۹ ۷ ۱۲

$$\bar{x} = \frac{4+(-1)+0+3+9+7+12}{20}$$

x_i	f_i
-۱	۴
۰	۲
۱	۱
۲	۵
۳	۳
جمع	۱۵

$$\bar{x} = \frac{4(-1)+2\times 0+1\times 1+5\times 2+3\times 3}{15}$$

x : ۱ ۴ ۵ ۷

$$\bar{x} = \frac{1+4+5+7}{4}$$

Scanned by CamScanner

جدول ساده

x_i	f_i
۱	۵
۲	۴
۳	۲
۴	۱
جمع	۱۲

$$\bar{x} = \frac{5(1) + 4(2) + 2(3) + 1(4)}{12}$$

جدول طبقات

$l_i - l_{i+1}$	f_i	x_i (وسط) $= \frac{l_i + l_{i+1}}{2}$
۰ – ۳	۴	۱/۵
۳ – ۶	۲	۴/۵
۶ – ۹	۵	۷/۵
۹ – ۱۲	۷	۱۰/۵
جمع	۱۸	

$$\bar{x} = \frac{4(1.5) + 2(4.5) + 5(7.5) + 7(10.5)}{18}$$

$l_i \to l_{i+1}$	f_i	x_i به صورت استاری بین دو سر
۱ – ۴	۳	$\frac{4+1}{2} = 2.5$
۴ – ۷	۲	$\frac{7+4}{2} = 5.5$
۷ – ۱۰	۵	$\frac{7+10}{2} = \frac{17}{2} = 8.5$
۱۰ – ۱۳	۷	$\frac{10+13}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$
جمع	۱۷	

$$\bar{x} = \frac{3(2.5) + 2(5.5) + 5(8.5) + 7(11.5)}{17}$$

مد (نما): مقداری که دارای بیشترین تکرار یا فراوانی باشد (M_0)

۴ ۵ – ۱ ۴ ۳ ۷ $\quad M_0 = 4$

۲ ۵ – ۱ ۳ ۴ ۲ ۹ $\quad M_0 = 2, 3$

SOGHAN

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

M_0 = ندارد

: a b c d e

M_0 = ندارد (تعداد یکی است)

: a b c b c a c a b

x_i	f_i
a	۵
b	۲
c	۸
d	۳
e	۴

$M_0 = C$

x_i	r_i
۰	۰/۴
۱	۰/۲
۲	۰/۱
۳	۰/۲
۴	۰/۱

$M_0 = 0$

L_i — L_{i+1}	f_i
۰ - ۲	۵
۲ - ۴	۲
۴ - ۶	۹
۶ - ۸	۶
۸ - ۱۰	۴

$$M_0 = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \times C$$

L_i: کران پایین رده مد

d_1: اختلاف فراوانی رده مد با رده قبل

d_2: اختلاف فراوانی رده مد با رده بعد

C: فاصله طبقات

فراوانی رده مد

فراوانی رده قبل

فراوانی رده بعد

کران پایین

FARHANG

Scanned by CamScanner

$$M_0 = 4 + \frac{7}{7+3} \times 2$$

$$= 4 + \frac{14}{10} = 5/4$$

$L_i - L_{i+1}$	f_i
$1 - 3$	4
$3 - 5$	2
$5 - 7$	7
$7 - 9$	3
	N

$$M_0 = 5 + \frac{5}{5+4} \times 2$$

$$= 5 + \frac{10}{9}$$

$L_i - L_{i+1}$	f_i
$0 - 2$	2
$2 - 4$	5
$4 - 6$	8
$6 - 8$	3
	N

$$M_0 = 4 + \frac{3}{3+5} \times 2$$

$$M_0 = 4 + \frac{3 \times 2}{8}$$

مثال: اگر داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنیم عددی که داده را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند، میانه است. (M_d)

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

x: ۴ ۵ -۱ ۰ ۹ -۷ ۱۲

مرتب: -۷ -۱ ۰ ۴ ۵ ۹ ۱۲

$M_d = ۴$

x: ۳ ۷ -۲ ۰ ۴ ۱

مرتب: -۲ ۰ ۱ ۳ ۴ ۷

بسیار راحت کردم

$M_d = \frac{۱+۳}{۲} = ۲$

x: ۵ ۲ ۰ -۷ ۹

مرتب: -۷ ۰ ۲ ۵ ۹

$M_d = ۲$

x: ۴ ۸ ۵ ۱

مرتب: ۱ ۴ ۵ ۸

$M_d = \frac{۴+۵}{۲} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$



Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

x_i	f_i	F_i
-۱	۳	۳
۰	۴	۷
۱	۷	۱۴
۲	۴	
۳	۹	
	۲۷	

اول $n/۲$ حساب می‌کنیم

$n/۲ = \frac{۲۷}{۲} = ۱۳/۵$

f_i می‌گوییم آن عدد ۱۳ در ستون x_i متناظر با این ستون است

$Md = ۱$

x_i	f_i	F_i
۵	۲۰	۲
۶	۵	۷
۷	۱۴	
۸	۳	
	۱۴	

$n/۲ = ۱۴/۲ = ۷$

$Md = ۶$

x_i	f_i'	F_i
۱	۲۰	۲
۲	۸	۱۲
۳	۲	
۴	۱	
	۱۵	

$n/۲ = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$

$Md = ۲$

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

$L_i - L_{i+1}$	f_i	F_i
۰ - ۴	۵	۵
۴ - ۶	۲	۷
۶ - ۹	۴	۱۱
۹ - ۱۲	۳	
۱۲ - ۱۵	۷	
	۲۱	

$n/۲ = ۲۱/۲ = ۱۰/۵$

$$Md = L_i + \frac{n/۲ - F_{i-1}}{f_i} \times C$$

L_i: کران پایین رده میانه

F_{i-1}: فراوانی تجمعی قبل از رده میانه

f_i: فراوانی رده میانه

C: فاصله طبقات

$$Md = ۶ + \frac{۱۰/۵ - ۷}{۴} \times ۳$$

$L_i - L_{i+1}$	f_i	F_i
۱ - ۴	۳	۴
۴ - ۷	۷	۱۰
۷ - ۱۰	۵	
۱۰ - ۱۳	۱	
	۱۶	

$n/۲ = ۱۶/۲ = ۸$

$$Md = ۴ + \frac{۸ - ۳}{۷} \times ۳$$

$L_i - L_{i+1}$	f_i	F_i
۴ - ۶	۱۰	
۶ - ۸	۵	
۸ - ۹	۲	
۹ - ۱۰	۴	
	۱۲	

$n/۲ = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

$$Md = ۶ + \frac{۶ - ۱}{۵} \times ۲$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject: Date:
Month:

معیارهای پراکندگی

واریانس

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

یا

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \qquad S^2 \geq 0$$

انحراف معیار

از واریانس جذر میگیریم

$$S = \sqrt{S^2}$$

ضریب تغییرات

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}}$$

از انحرافات نسبت به میانگین

تعداد داده ها از میانگین استفاده می‌کنیم

$x : 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5$

میانگین $\bar{x} = \frac{2 + (-1) + 0 + 5}{4} = 1/5$

واریانس $S^2 = \frac{(2-1/5)^2 + (-1-1/5)^2 + (0-1/5)^2 + (5-1/5)^2}{4}$

$$S^2 = \frac{4 + 1 + 0 + 25}{4} - (1/5)^2 = \frac{21}{4}$$

انحراف معیار $S = \sqrt{21/4} = \frac{\sqrt{21}}{2}$

$$C.V = \frac{\sqrt{21}/2}{1/5} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

x_i : -2 0 -1 4 5

$$\bar{x} = \frac{-2+0+-1+14+5}{5} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$s^2 = \frac{4+0+1+14+25}{5} - (1.2)^2 = \frac{44}{5} - 1.44 = 9.2 - 1.4 = 7.8$$

$$s = \sqrt{7.8}$$

$$C.V = \frac{\sqrt{7.8}}{1.2}$$

x_i	f_i
-1	5
0	2
1	4
2	3
	14

$$\bar{x} = \frac{5(-1)+2(0)+4(1)+3(2)}{14} = \frac{5}{14}$$

$$s^2 = \frac{5(-1-5/14)^2+2(0-5/14)^2+4(1-5/14)^2+3(2-5/14)^2}{14}$$

$$s^2 = \frac{5\times(-1)^2+2\times0^2+4\times1^2+3\times2^2}{14} - \left(\frac{5}{14}\right)^2 = \frac{249}{196}$$

$$s = \sqrt{\frac{249}{196}} = \frac{\sqrt{249}}{14}$$

$$C.V = \frac{\frac{\sqrt{249}}{14}}{5/14} = \frac{\sqrt{249}}{5}$$

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

x_i	f_i
-۲	۳
-۱	۵
۰	۱
۱	۴
	۱۳

$$\bar{x} = \frac{3(-2) + 5(-1) + (1)\times 0 + 1\times 4}{13} = \frac{-6 - 5 + 4}{13} = \frac{-7}{13} = -0.54$$

$$S^2 = \frac{3(-2)^2 + 5(-1)^2 + 1(0)^2 + 4(1)^2}{13} - \left(\frac{-7}{13}\right)^2$$

$$= \frac{12 + 5 + 0 + 4}{13} - 0.2916 = 2.11$$

$$S = 1.45$$

$$CV = \frac{1.45}{0.54}$$

$L_i - L_{i+1}$	f_i	$x_i = \frac{L_i + L_{i+1}}{2}$
۰ - ۲	۳	۱
۲ - ۴	۲	۳
۴ - ۶	۴	۵
۶ - ۸	۱	۷
۸ - ۱۰	۵	۹
$\sum$	۱۵	

$$\bar{x} = \frac{3\times 1 + 2\times 3 + 4\times 5 + 1\times 7 + 5\times 9}{15} = \frac{71}{15} = 4.73$$

$$S^2 = \frac{3(1-4.73)^2 + 2(3-4.73)^2 + 4(5-4.73)^2 + 1(7-4.73)^2 + 5(9-4.73)^2}{15}$$

$$S^2 = \frac{3\times 1^2 + 2\times 3^2 + 4\times 5^2 + 1^2 + 5\times 9^2}{15} - (4.73)^2 = 49$$

$$S = \sqrt{49} = 7$$

$$CV = \frac{7}{4.73}$$

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

$L_i - L_{i+1}$	f_i	x_i
۱ – ۳	۲	$\frac{۱+۳}{۲} = ۲$
۳ – ۵	۹	$\frac{۳+۵}{۲} = ۴$
۵ – ۷	۱	$\frac{۵+۷}{۲} = ۶$
۷ – ۹	۴	$\frac{۷+۹}{۲} = ۸$
$\sum$	۱۵	

$$\bar{x} = \frac{\overbrace{۲\times۲}^{۴} + \overbrace{۹\times۴}^{۳۶} + \overbrace{۱\times۶}^{۶} + \overbrace{۴\times۸}^{۳۲}}{۱۵} = \frac{۷۵}{۱۵} = ۴/۶$$

$$S^۲ = \frac{۲(۲)^۲ + ۹(۴)^۲ + ۱(۶)^۲ + ۴(۸)^۲}{۱۵} - (۴/۶)^۲ =$$

$$S = \sqrt{\quad}$$

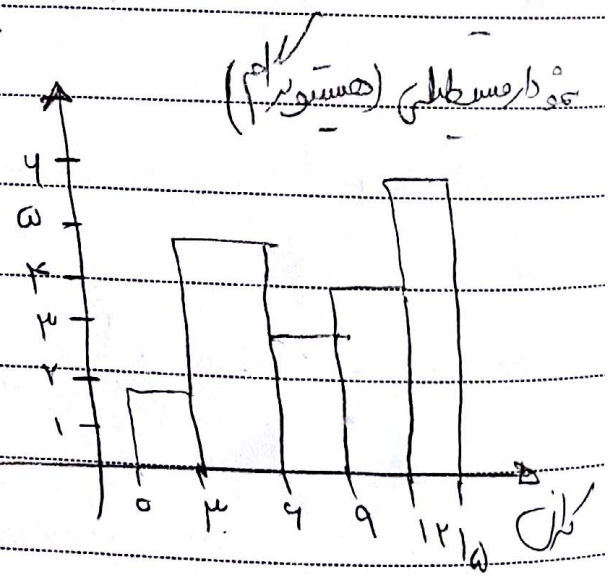
C.V =

$L_i - L_{i+1}$	f_i	x_i	F_i
۰ – ۳	۲	۱/۵	۲
۳ – ۶	۵	۴/۵	۷
۶ – ۹	۳	۷/۵	۱۰
۹ – ۱۲	۴	۱۰/۵	
۱۲ – ۱۵	۶	۱۳/۵	۲۰
	۲۰		

f_i میانگین

F_i ۲۰ میانگین

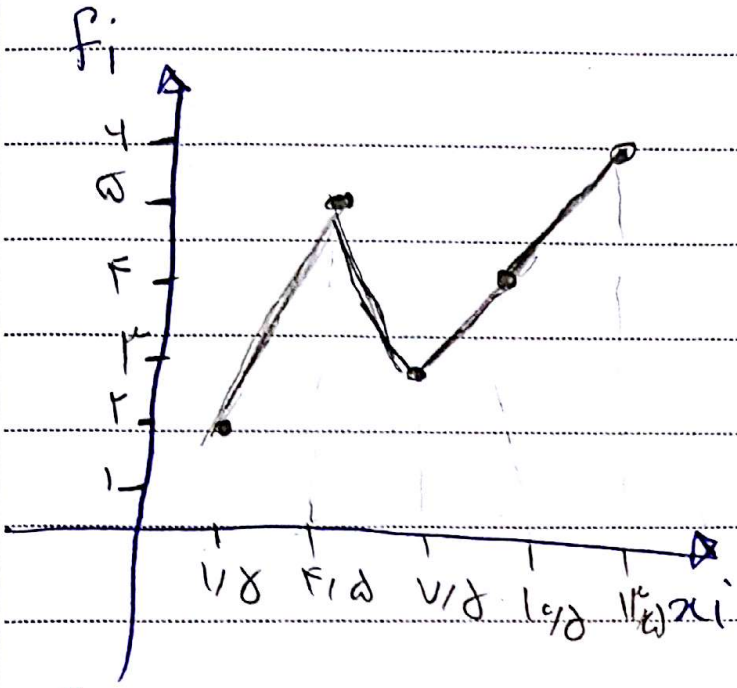
نمودار مستطیلی (هیستوگرام)



Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

نمودار چندضلعی



الف) میانگین $\bar{x} = \frac{۲\times۱/۵ + ۵\times۴/۵ + ۱۲\times۷/۵ + ۴\times۱۰/۵ + ۶\times۱۳/۵}{۲۰} = ۹$

مد $M_0 = L_i + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times C$

$= ۱۲ + \frac{(۶-۴)}{(۶-۴)+(۶-۵)} \times ۳$

وجود ندارد

میانه $n/۲ = \frac{۲۰}{۲} = ۱۰$

$M_d = L_i + \frac{n/۲ - F_{i-1}}{f_i} \times C$

$= ۶ + \frac{۱۰-۷}{۳} \times ۳ = ۹$

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

فصل ۲

روش‌های شمارش و آنالیز ترکیبی

در این فصل مقدار راه‌های انجام یک کار بررسی می‌شود

اصل ضرب:

هرگاه انجام عمل A وابسته به انجام پیاپی اعمال B_1 و B_2 و ... B_k باشد به طوری که عمل B_i به m_i روش انجام می‌گیرد عمل A به $m_1 \times \dots \times m_k$ روش انجام می‌گیرد

اصل جمع

هرگاه انجام عمل A وابسته به انجام پیاپی اعمال B_1 یا B_2 یا ... یا B_k باشد به طوری که عمل B_i به m_i روش انجام می‌گیرد عمل A به $m_1 + \dots + m_k$ روش انجام می‌گیرد

مثال با ارقام ۲ و ۵ و ۷ چند شماره تلفن ۶ رقمی می‌توان ساخت

$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۶$$

مثال به آقا لباس ۴ پیراهن و ۵ شلوار و ۱ کت دارد به چند روش می‌تواند یک دست لباس بپوشد

$$۱ \times ۴ \times ۵$$

Year: Month: Day:

مثال در یک اداره ۳ نفر نامزد ریاست ۵ نفر نامزد معاونت هستند ما میخواهیم یک رئیس و یک معاون برای دهه

چند حالت وجود دارد

$۳ \times ۵ = ۱۵$

اگر از حق رأی ندادن استفاده نکنیم طوری به رأیی ۱ دانه اضافه می‌شود

$۴ \times ۶ = ۲۴$

مثال از بین ۵ دانشجو پسر و ۷ دانشجو اللهویتک و ۴ دانشجو کامپیوتر میخواهیم یک

گروه ۲ نفره انتخاب کنیم که اعضای گروه هم‌رسته نشند. چند حالت وجود دارد

اصل جمع یا ضرب $۷ \times ۵ + ۵ \times ۴ + ۷ \times ۴$

مثال با ارقام ۱ و ۰ و ۳ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ چند عدد زوج ۴ رقمی می‌توان ساخت که

یکی از ارقام نباید صفر جدا کنیم

اگر صفر اول نباشد ۳ رقمی می‌شود

۸ و ۰ انتخاب نشده

صفر می‌یاد

۶ ۵ ۴ ۱ ۱ ۵ ۵ ۴ ۲

۵ رقم مانده زوج غیر صفر ۸ و ۶

صفر نمی‌تونه صفر نمی‌تونه بیاد

$۶ \times ۵ \times ۴ \times ۱ + ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۲$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۵ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت

۱۲۵
۲۱۵
۱۵۲
۱۲۵
۲۱۵
۲۵۱

۶ حالت

جایگشت

از ارقای دو رقم عوض کنیم و عدد بیست آمده عدد قبلی نباشد

به هر ترتیب از ارگومن اسیا در کنار هم است

مثال: با ارقام عدد " ۵۵۵۵ " چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت؟ ۱ عدد

عباس، محمد و علی چند لیوان ۳ تایی می‌سازند؟ ۱ لیوان

با اعضای مجموعه {۴، ۷، ۱۲} چند مجموعه ۲ عضوی می‌توان ساخت؟ ۳ مجموعه

تعداد جایگشت‌های n شی مساوی (با همه) یک است

تعداد لیوان‌ها (مجموعه‌ها) n تایی n شی یک است

جایگشت

FARHANG

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

مثال: عباس محمد علی حیدر صف ۳ نفره سکیل می دهند

$3 \times 2 \times 1$

فاکتوریل: از همان عدد شروع تا به ۱ برسد

$1! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

تعداد حالت های n شی متمایز $n!$ است

تابع گاما $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^{(n)} e^{-t} dt$

مثال: حروف کلمه زیر (احمد علی) چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت

$\frac{V!}{G}$

الف) ول و بی کنار هم باشند حلوه

۱) کدام حسنا کمتر

۲) کدام حسنا بیشتر

ول و ب

$۱ ح م <$ ول و ب

$5! \times 3!$

طباطبایی

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

ب) اگر «طی ۱۱ آخر» که باشد حاصل: ۰ ثابت و قابل تغییر است

۲) اگر «طی ۱۱ آخر» که باشد حاصل: طی ۱۱ ثابت و قابل تغییر است

۱) اگر ۲ تا ل و ی ها کنار هم نباشند

ا ج م د ل ی

۷! − ۵! × ۳!

۲ تا ل کنار هم

ب) اگر ا ج ل ها کنار هم باشند

(ا ج) م د (ل ی)

۵! × ۴! × ۲!

ترتیب طبیعی

فرض کنید n شیء وجود دارد که n_1 تای آن از نوع اول و ... و n_k تای آن از نوع kام

باشد که اشیاء هم نوع با هم متمایز نیستند. ثابت کنید تعداد جایگشت‌های n شیئی عبارت است از

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \times \dots \times n_k!}$$

حل مسأله

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:
Year: Month: Date:

مثال) با حروف کلمه (بابا) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت

$$\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2! \times 1! \times 1!}$$

مثال) یک کلاس ۲۰ نفره را به چند روش می‌توان به گروه‌های ۵ و ۱۲ و ۳ نفره تقسیم کرد

$$\binom{20}{5,12,3} = \frac{20!}{5! \times 12! \times 3!}$$

مثال) یک مجموعه ۳۰ نفره را به چند روش می‌توان به گروه‌های ۳ و ۲۵ و ۲ تقسیم کرد

$$\binom{30}{3,25,2} = \frac{30!}{3! \times 25! \times 2!}$$

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

استفاده از P و D

۱) ترتیب مهم است (جایگشت)

$$P_n^n = n! \quad , \quad P_n^1 = n \quad , \quad P_n^0 = 1$$

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲) ترتیب مهم نیست (ترکیب)

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad , \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال ۱ از بین ۱۰ نفر

الف) چند نفر ۴ نفره می‌توان ساخت وقتی ترتیب مهم است (جایگشت استفاده کنیم)

$$P_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

ب) چند گروه ۴ نفره می‌توان ساخت

ترتیب مهم نیست (ترکیب)

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!(10-4)!}$$

مثال ۲ با ارقام مجموعه $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

الف) چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت

$$P_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = 5!$$

لایک بدهید



Scanned by CamScanner

ب) چند زیرمجموعه ۴ عضوی می‌توان ساخت؟

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$$

مثال) از بین ۳ دانشجوی پسر و ۷ دانشجوی دختر یک گروه ۳ نفره انتخاب

۱) چند گروه ۳ نفره وجود دارد

$$\binom{15}{3}$$

۲) اگر هر ۳ هم رشته باشند چطور

$$\binom{3}{3} + \binom{5}{3} + \binom{7}{3}$$

۳) اگر از هر رشته یکی باشد چطور

$$\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{1}$$

۴) اگر حداقل یک دختر باشد چطور

۱ یا ۲ یا ۳ حالت انتخاب می‌کنیم

$$\binom{7}{1}\binom{8}{2} + \binom{7}{2}\binom{8}{1} + \binom{7}{3}$$

۵) اگر حداکثر ۲ پسر باشد چطور

کم‌ترین یکی نباشد

۲ و ۱ و ۰

$$\binom{3}{2}\binom{12}{1} + \binom{3}{1}\binom{12}{2} + \binom{12}{3}$$

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

۴) اندازه یک مطابق ماست

$\binom{۷۰}{۱}\binom{۸}{۲}$

مثال) در یک آزمون ۲۰ سؤالی دانشجو باید به ۱۳ سؤال جواب دهد او باید حتماً از ۶ سؤال اول به ۴ سؤال پاسخ دهد چند روش برای پاسخ دادن او وجود دارد

$\binom{۶}{۴}\binom{۱۴}{۹}$ ضرب ۱۳

احتمال

آزمایش تصادفی: آزمایشی است که نتیجه آن از قبل به طور یقین معلوم نیست مثل

پرتاب سکه و تاس، جایگشت ۵ نفر، ۶ انتخاب ۳ نفر از بین ۱۰ نفر، چند ان در دیدن تلویزیون در سال آینده

مثال محصول سال آینده، تعداد تصادف در ۲۴ ساعت آینده و ...

فضای نمونه: مجموعه تمام نتایج ممکن از آزمایش تصادفی است فضای نمونه را با S نشان می‌دهند

اگر فضای نمونه یک مجموعه متناهی باشد تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نشان می‌دهند

شمارا
- متناهی
- نامتناهی

فضای نمونه

ناشمارا (پیوسته)

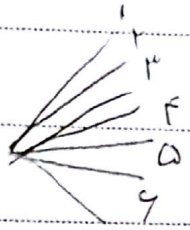
FARHANG

Scanned by CamScanner

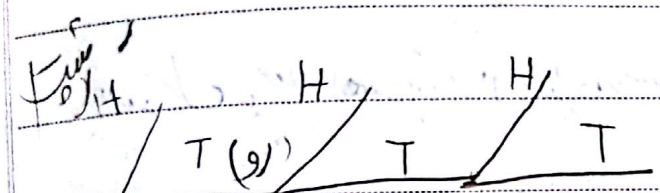
مثال) تاس را می‌اندازیم

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$n(S) = 6$

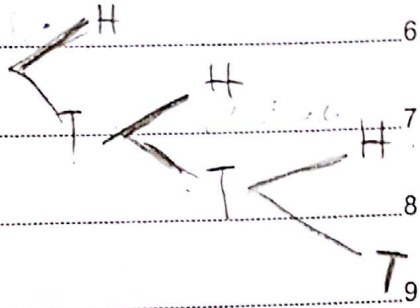


مثال) سکه‌ای را آن‌قدر می‌اندازیم تا رو بیاید



$S = \{H, TH, TTH, \dots\}$

۱ بار اول پشت
۲ بار دوم رو بیاید



مثال) نمره دانشجویی را در نظر می‌گیریم

$S = [0, 20]$

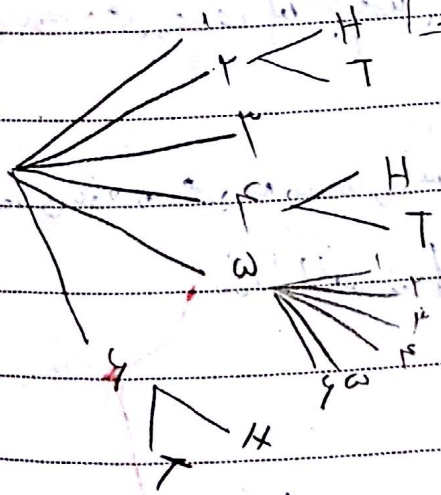
مثال) ۴ تاس و یک سکه را می‌اندازیم

$n(S) = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

مثال) تاسی را می‌اندازیم اگر زوج بیاید سکه می‌اندازیم و اگر فرد بیاید تاس

بدون هیچ تقدیمی می‌نویسم

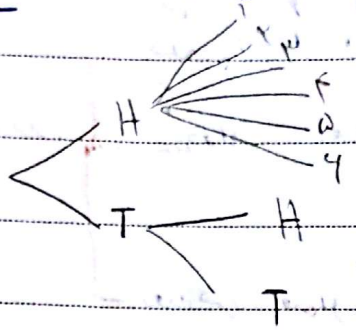
$S = \{1H, 2H, 2T, 3H, 4T, 4H, 5T, 6H, 6T, (1,1), \dots, (6,6)\}$



FARHANG

Scanned by CamScanner

مثال) سکه‌ای را می‌اندازیم اگر رو بیاید دوباره می‌اندازیم و اگر پشت بیاید تاس می‌اندازیم



$S = \{(H,1), \ldots, (H,6), TT, TH\}$

مثال) از بین ۵ شیرازی و ۶ اصفهانی ۳ نفر را انتخاب می‌کنیم

$n(S) = \binom{11}{3}$

$A \subset S$ زیرمجموعه فضای نمونه است

پیشامد: ساده: تک عضوی هستند

مرکب: بیش از یک عضو دارند

مثال) تاسی را می‌اندازیم

A: پیشامد مضرب ۵ ساده همان عدد ۵

B: پیشامد عدد زوج مرکب که عدد ۲ و ۴ و ۶

Scanned by CamScanner

پیشامد: حتمی: حتماً رخ می‌دهد
غیرممکن: امکان رویداد ندارد
تصادفی: ممکن است رخ دهد

مثال: تاسی را می‌اندازیم عدد کمتر از ۸ بیاید حتمی

۹ بیاید غیرممکن

عضو ۳ بیاید تصادفی

پیشامد حتمی همان فضای نمونه است

پیشامد غیرممکن از نظر عادی تهی ϕ است

پیشامدی که بین تهی و کل پیشامدها تصادفی است

$\phi \subset A \subset S$

تصادفی

$A \subset B$: اگر A رخ دهد B نیز رخ می‌دهد. (همه عضوی A توی B است)

A': A رخ نمی‌دهد

$A \cap B$: هر دو رخ دهد

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

1. $A \cap B = \emptyset$: A و B ناسازگارند (با هم رخ نمی‌دهند)
2. $A - B = A \cap B'$: A رخ دهد و B رخ ندهد ـ فقط A رخ دهد
4. $A \cup B$: A یا B یا هر دو رخ دهد ـ حداقل یکی رخ دهد
5. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ (تفاضل متقارن) : فقط یکی رخ دهد (یا A رخ دهد یا B)
8. احتمال پیشامد A را با $P(A)$ نشان می‌دهند و $P(A)$ عددیست میزان وقوع A
9. اندازه‌پذیری حرکت
10. $P(S) = 1$ حتمی
11. $P(A) \geq 0$ همیشه عددیست
12. A_1 و A_2 و ... پیشامدهای 2 به 2 ناسازگار (یعنی اشتراک دوتوشان تهی باشد)
13. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$
14. $P(A') = 1 - P(A)$
15. $P(A - B) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B)$



Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)$$

$$P(A_1\cup\dots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}P(A_i\cap A_j\cap A_k)-\dots$$

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

$$A\subset B\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

$$0\le P(A)\le 1$$

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

سؤال ۱

۲۰ درصد از دانش‌آموزان به آمار، ۱۰ درصد به ریاضی و ۵ درصد به هر دو درس علاقه‌مند هستند.

آمار: A $P(A)=0/2$

ریاضی: B $P(B)=0/1$

$P(A\cap B)=0/05$

الف) چند درصد از دانش‌آموزان به هیچ‌کدام علاقه‌مند هستند؟

$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$$

$$=1-(0/2+0/1-0/05)=0/75$$

ب) چند درصد فقط به ریاضی علاقه‌مند هستند؟

$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=0/1-0/05=0/05$$

ج) چند درصد فقط به یکی از دو درس علاقه‌مند هستند؟ تفاضل متقارن

$$P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

$$=0/2+0/1-2\times 0/05=0/2$$

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

می شه احتمال:

احتمال : $\frac{\text{مورد نظر}}{\text{ممکن}}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$P(A) = \frac{\text{اندازه } A}{\text{اندازه } S}$ تعداد عضوهای مد نظر باشه

مثال) دو تاس را می ریزیم احتمال اینکه تفاضل روی دو تاس ۲ باشد چقدر است

۶,۲
۲,۶
۵,۱
۱,۵

۴ / 6×6 دو تاس

مثال) از ارقام عدد "۲۳۷۹۴۱۵" راه به چند می کنیم احتمال اینکه ۹ و ۴ کنار هم و ۳ و ۲ کنار هم باشند چقدر است

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

(۲۳) (۷۹) ۴ ۱ ۵

$\frac{5! \times 2! \times 2!}{7!} = \frac{1}{21}$

مثال) از بین ۳ دانشجوی برق ۵ دانشجو مکانیک ۴ دانشجو عمران و میخواهیم ۳ نفر به صورت تصادفی انتخاب کنیم

احتمال اینکه ۲ دانشجوی مکانیک باشند چقدر است

$\frac{\binom{5}{2}\binom{7}{1}}{\binom{12}{3}}$

FARHANG

Scanned by CamScanner

مثال ۱: در یک مدرسه از بین ۵ دانش‌آموز ریاضی ۳ دانش‌آموز تجربی و ۲ دانش‌آموز انسانی

۴ نفر را بصورت تصادفی انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه حداقل ۱ دانش‌آموز ریاضی باشد چقدر است

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{3}+\binom{5}{2}\binom{5}{2}+\binom{5}{3}\binom{5}{1}+\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}}$$

مثال ۲: ۵ توپ به شماره‌های ۱ تا ۵ درون ۵ جعبه به شماره‌های ۱ تا ۵ قرار می‌دهیم

الف) احتمال اینکه جعبه شماره ۱ خالی باشد چقدر؟ $\left(\frac{4}{5}\right)^5 = \frac{4\times4\times4\times4\times4}{5\times5\times5\times5\times5}$ (صورت: جاهای ممکن توپ‌ها در جعبه‌ها؛ مخرج: کل حالات ممکن)

ب) احتمال اینکه فقط جعبه شماره یک خالی باشد چقدر؟ (یکی از جعبه‌ها ۲ تا توپ قرار دارد)

$$\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\times3\times2\times1}{5^5}$$

(۵ توپ دو تا دو تا برداشته می‌شوند؛ ۴ جعبه باقی‌مانده؛ ۳ تا توپ و ۳ تا جعبه باقی‌مانده باید بدون قید و شرط جایگشت داده شوند)

ج) احتمال اینکه فقط یک جعبه خالی باشد چقدر؟

$$\frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{4}{1}\times3!\times2\times1}{5^5}$$

(۵ توپ دو تا دو تا برداشته می‌شوند؛ ۴ جعبه باقی‌مانده)

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

احتمال شرطی:

در مواردی استفاده می‌شود که نتیجه آزمایش تصادفی اطلاع جزیی در اختیار ما باشد

در پرتاب ۲ تاس، برایم مجموع ۸ است

در دی ماه سال برای بعد عمر امید به کرده است

فرض کنید A و B دو پیشامد S باشند

$P(A|B)$: احتمال اینکه A رخ دهد به شرط اینکه B رخ داده است

$P(B|A)$: احتمال اینکه B رخ دهد به شرط اینکه A رخ داده است

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad P(A\cap B)=P(B|A)P(A)$$

مثال) احتمال اینکه یک نوزاد ۱۳ سال عمر کند ۰٫۶ است احتمال اینکه یک نوزاد ۱۵ سال عمر کند

۱۳ سالگی رخ داده تا ۱۵ سالگی

۰٫۴ است احتمال اینکه نوزاد ۱۳ سالگی ۱۵ سالگی شود چقدر است؟

A : ۱۳ سالگی

B : ۱۵ سالگی

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0,1}{0,4}=\frac{1}{4}$$

$B\subset A \Rightarrow A\cap B=B$

۱۵ سالگی رخ داده تا ۱۳ سالگی

Scanned by CamScanner

مثال) ۸۰ درصد دانشجویان از درس آمار قبول می‌شوند و ۷۵ درصد از دانشجویان از درس ریاضی قبول می‌شوند و ۹۰ درصد دانشجویانی که آمار قبول شده‌اند از ریاضی قبول می‌شوند؟

چند درصد دانشجویان از هر دو قبول می‌شوند؟

چند درصد دانشجویان قبول شده از ریاضی از آمار قبول می‌شوند؟

A: قبول شدن ریاضی
B: قبول شدن آمار

الف) $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$

$= 0.9 \times 0.8 = 0.72$

$P(A) = 0.75$

$P(B) = 0.80$

ب) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.72}{0.75}$

پاسخ: فارغ از اندازه ۹۶ درصد

مثال) اگر $P(A_1) = 0.4$ و $P(B) = 0.7$ و $P(A \cup B) = 0.9$ باشد

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.4 + 0.7 - 0.9 = 0.2$

$P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$

$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B) = 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B)$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = 1 - 0.4 + 0.2 = 0.8$

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.7}$

$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0.4 - 0.2}{1 - 0.7} = \frac{2}{3}$

$P(B'|A) = \frac{P(A \cap B')}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.4 - 0.2}{0.4} = 0.5$

$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{P(A \cup B)'}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(A)} = \frac{1 - 0.9}{1 - 0.4} = \frac{1}{4}$

FARHANG

Scanned by CamScanner

استقلال پیشامدها

دو پیشامد همانی مستقل‌اند که رخ دادن یکی بر رخ دادن دیگری بی‌تأثیر باشد.

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B)$$

$$\begin{cases} P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A|B) = P(A) \end{cases}$$

۲ پیشامد مستقل

۳ پیشامد مستقل

دو به دو مستقل

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A)P(B) \\ P(A \cap C) = P(A)P(C) \\ P(B \cap C) = P(B)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

مثال) $P(A) = 0.4$ ، $P(A|B) = 0.4$ مستقل‌اند؟ B, A

چون خودمقدار $P(A)$ = ۴٪ چون B روی آن تأثیر نداشته

اگر A و B مستقل باشند متمم‌های آن‌ها نیز مستقل‌اند

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B')$$

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال ۱) احتمال اینکه مرد A در تیراندازی به هدف بزند ۰/۸ است احتمال اینکه B به هدف بزند ۰/۶ است این دو به طور مستقل به هدف تیراندازی می‌کنند.

۱- احتمال اینکه فقط A به هدف بزند چقدر است؟

$$P(A \cap B') = P(A)\,P(B') = 0/8 \times (1 - 0/4) = 0/32$$

۲- احتمال اینکه هدف مورد اصابت قرار گیرد چقدر است؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= 0/8 + 0/6 - (0/8 \times 0/6) = 0/92$$

۳- هدف مورد اصابت قرار گرفته است احتمال اینکه B به هدف زده باشد چقدر است؟

$$P(B \mid A \cup B) = \frac{P(B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(B)}{P(A \cup B)} = \frac{0/6}{0/92}$$

$$B \subset (A \cup B) = B$$

مثال ۲) احتمال اینکه مرد A در تیراندازی به هدف بزند ۰/۸ است احتمال اینکه B به هدف بزند ۰/۶ است این دو بطور مستقل به هدف تیراندازی می‌کنند آنها یکی پس از دیگری به هدف تیراندازی می‌کنند احتمال اینکه B زودتر به هدف بزند چقدر است؟

$$0/6 + (0/4 \times 0/2 \times 0/6) + (0/4 \times 0/2 \times 0/4 \times 0/2 \times 0/6) + \cdots$$

$$= 0/6\left(1 + 0/08 + (0/08)^2 + \cdots\right)$$

$$= 0/6 \times \frac{1}{1 - 0/08} = \frac{0/6}{0/92}$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:
Year: Month: Date:

قانون احتمال کل و قانون بیز (Bayes)

هنگامی به کار می‌رود که وقوع یک پیشامد وابسته به وقوع چند پیشامد ناسازگار دیگر باشد



قانون احتمال کل $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots P(B|A_k)P(A_k)$

قانون بیز $P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{P(B)}$

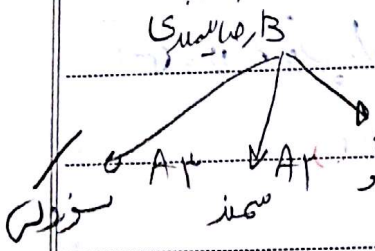
$P(B)$ درصد کیلو ایران خودرو — میزان رضایت تبدیل / تحویل

مثال) پژو ۴۰٪ — ۶۰٪

سمند ۵۰٪ — ۵۵٪

سوزوکی ۱۰٪ — ۹۰٪

چند درصد مشتریان از تحویل راضی هستند داشته



$P(B) = \%۶۰ \times ۰/۴ + \%۵۵ \times ۰/۵ + \%۹۰ \times ۰/۱ = \%۶۰$

چند درصد مشتریان راضی صاحب سمند هستند (تحویل داده)

$P(A_2|B) = \frac{۰/۵۵ \times ۰/۵}{۰/۶}$

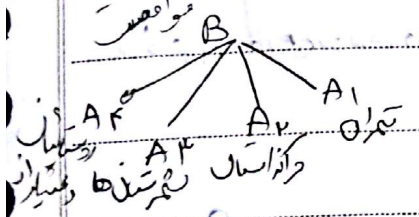
Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال)

	درصد جمعیت کشور	درصد موافقین ادامه پرداخت یارانه نقدی
پایتخت	٪۱۶	٪۲۰
مراکز استان‌ها	٪۳۰	٪۴۰
سایر شهرستان‌ها	٪۳۲	٪۵۰
روستاییان و عشایر	٪۲۲	٪۸۰

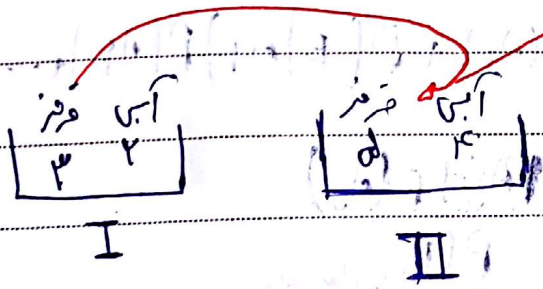


اگر شخصی پرسیده شود آیا پرداخت یارانه را می‌آورد؟ چه پاسخی می‌دهید؟

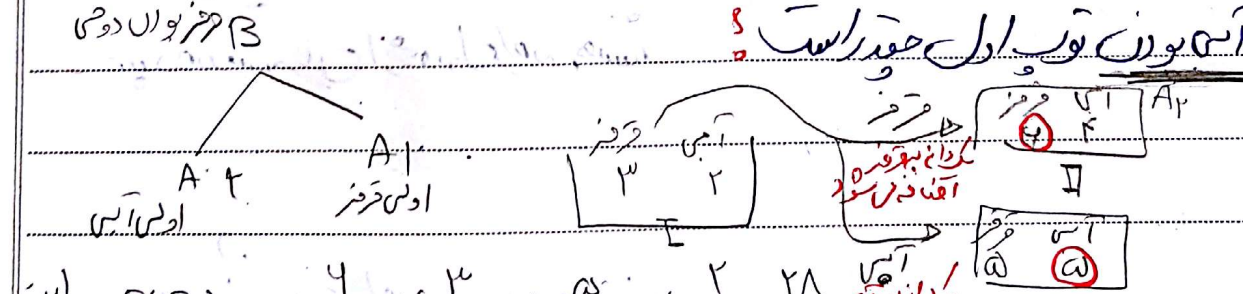
$$P(B) = \%16 \times \%20 + \%30 \times \%40 + \%32 \times \%50 + \%22 \times \%80 = \%48$$

مثال) مجموعه

۲ جعبه با مهره‌های قرمز و آبی وجود دارد



از جعبه اول تصادفی انتخاب می‌کنیم و در جعبه دوم قرار می‌دهیم سپس از جعبه دوم تصادفی انتخاب می‌کنیم احتمال قرمز بودن این توپ چقدر است؟ اگر این توپ قرمز باشد احتمال آبی بودن توپ اول چقدر است؟



الف) $P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{28}{50}$

قرمز بودن اولی | قرمز بودن دومی | آبی اولی | آبی دومی

$P(B|A_1)$ $P(A_1)$

ب) $P(A_2|B) = \frac{\frac{5}{10} \times \frac{2}{5}}{\frac{28}{50}} = \frac{10}{28}$

قرمز بودن اولی

FARHANG

Scanned by CamScanner

Subject:

متغیر تصادفی

تابعی است که روی فضای نمونه تعریف می‌شود

۱) متغیر تصادفی یک عددی

تابعی است که به هر عضو فضای یک عدد نسبت می‌دهد

متغیر تصادفی را با X و Y و Z و ... و مقادیر آن را با $x, y, z, \ldots$ نشان می‌دهند

X:

$S \longrightarrow \mathbb{R}$

فضای نمونه — عدد

۱) متغیر تصادفی گسسته

مقادیر آن شمارش پذیر است: $x = x_1, x_2, x_3, \ldots$

۲) متغیر تصادفی پیوسته

مقادیر آن ناشمارا است: $x \in (a, b)$ (بازه)

مثال) تاسی را دوبار می‌اندازیم و اختلاف اعداد حاصل شده باشد و مقادیر را بنویسید (مثال گسسته)

اختلاف $(۶,۶)$

$x = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$

مثال) نمره آمار دانشجو را می‌پرسیم و نمره این فرد باشد مقادیر را بنویسید (مثال پیوسته)

$x \in [۰, ۲۰]$

Scanned by CamScanner

تابع احتمال یک متغیر تصادفی:

تابعی است که روی مقادیر متغیر تصادفی تعریف می‌شود و برد آن بازه $[0,1]$ است

$$P: x_{\text{برد}} \longrightarrow [0,1]$$

تابع احتمال متغیر تصادفی گسسته x را تابع توزیع احتمال گویند و با $P(x=x)$ نشان می‌دهند

۱) $P(x=x) \geq 0 \quad \forall x$ (مثبت باشد)

۲) $\sum_x P(x=x) = 1$

تابع احتمال متغیر تصادفی پیوسته x را تابع چگالی احتمال گویند و با $f_x(x)$ نشان می‌دهند (زیرنویس x)

۱) $f_x(x) \geq 0 \quad \forall x$

۲) $\int f_x(x)\,dx = 1$ ← (انتگرال کل)

مثال) در جعبه‌ای ۳ توپ سفید و ۲ توپ سیاه است ۲ توپ به تصادف و با هم خارج می‌کنیم اگر هر دو سیاه باشد ۵۰۰ تومان می‌بازیم اگر یکی سیاه باشد ۵ تومان می‌بازیم و اگر هر دو سفید باشد ۳۵۰۰ تومان می‌بریم اگر x مقدار برد باشد مطلوب است تابع توزیع احتمال x را بنویسید

Scanned by CamScanner

$x = -100, -25, 400$

$$P(x=-100) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$P(x=-25) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

$$P(x=400) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

تابع احتمال جرم $\Rightarrow \frac{1}{10} + \frac{6}{10} + \frac{3}{10} = 1$

مثال: a را طوری بیابید که تابع زیر تابع احتمال باشد

$$f(x) = ax \qquad x = 1, 2, \ldots, n$$

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow ax \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$\sum f(x) = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{n} ax = 1 \Rightarrow a \sum_{x=1}^{n} x = 1$$

$$a \frac{n(n+1)}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{n(n+1)}}$$

مثال: b را طوری بیابید که تابع زیر تابع چگالی احتمال باشد

$$f(x) = ae^{-4x} \qquad x > 0$$

$$f(x) \geq 0 \quad a e^{-4x} \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

(e همیشه مثبت)

Scanned by CamScanner

$$\int f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^{+\infty} a e^{-4x}\,dx = 1$$

$$a\int_0^{+\infty} e^{-4x}\,dx = 1$$

$$a\left[\frac{e^{-4x}}{-4}\Big|_0^{+\infty}\right] = 1 \Rightarrow a\left[0 - \frac{1}{-4}\right] = 1 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$P(x \in A) = \begin{cases} \text{گسسته} & \sum_{x \in A} P(x = x) \\ \text{پیوسته} & \int_A f_x(x)\,dx \end{cases}$$

جداسم فعال

مثال)

توزیع احتمال

x	-1	0	1	2	4
$P(x=x)$	$0/3$	$0/1$	$0/2$	$0/1$	$0/3$

مجموع = 1 ست

گسسته

$P(x>1) = 0/1 + 0/3 = 0/4$

$P(x \geq 1) = 0/2 + 0/1 + 0/3 = 0/6$

$P(0<x<2) = 0/2$

$P(0 \leq x \leq 2) = 0/1 + 0/2 + 0/1 = 0/4$

$P(x<1) = 0/3 + 0/1 = 0/4$

$P(x \leq 1) = 0/3 + 0/1 + 0/2 = 0/6$

SOBHAN

Scanned by CamScanner

$f_x(x) = \frac{1}{4} e^{-x/4} \quad x > 0$

$P(1 \le x \le 2) = \int_1^2 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = \frac{1}{4} \times 4 e^{-x/4} \Big|_1^2 = e^{-1/4} - e^{-2/4}$

$P(x=2) = P(2 \le x \le 2) = \int_2^2 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx = 0$

$P(1 < x < 2) = P(1 \le x \le 2)$ در متغیر پیوسته مساوی یا نباید حواسمان فرق کند

تابع توزیع تجمعی احتمال یا تابع توزیع

$F_x(x) = P(x \le x)$

$x \in \mathbb{R}$ عدد حقیقی

اصطلاحاً کلمه x کوچکتر مساوی از $-\infty$

گسسته $\sum_{-\infty}^{x} P(x=x)$

پیوسته $\int_{-\infty}^{x} f_x(x) dx$

مثال) تابع توزیع تجمعی را بیابید

x	1	2	3	4	5
$P(x=x)$	0/4	0/1	0/2	0/1	0/2

$$F_x(x) = P(x \le x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 0/4 & 1 \le x < 2 \\ 0/5 & 2 \le x < 3 \\ 0/7 & 3 \le x < 4 \\ 0/8 & 4 \le x < 5 \\ 1 & x \ge 5 \end{cases}$$

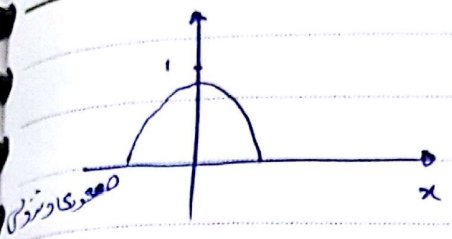
احتمال: $x = 1/5 \longrightarrow 0/4$ ، $x = 1/7 \longrightarrow 0/4$

گسسته: صعودی است با پله‌ها

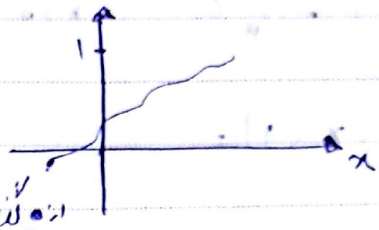
$F_x(x)$ تابع صعودی است و $F_x(+\infty) = 1$ ، $F_x(-\infty) = 0$

Scanned by CamScanner

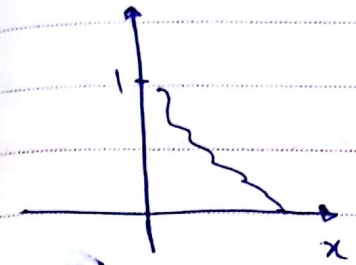
مثال ۷



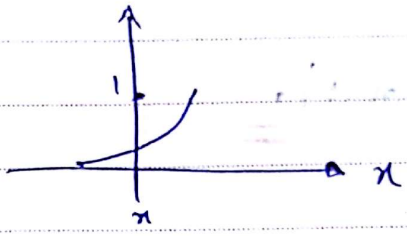
صعودی و نزولی



نه صعودی نه نزولی



نزولی



تابع توزیع ✓
تصعیدی
صعودی و از ۰ تا ۱

مثال ۱۱ تابع توزیع تصعیدی زیر را بیابید.

$$P(X=x)=\frac{2x}{n(n+1)} \qquad x=1,2,\dots,n$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \dfrac{x(x+1)}{n(n+1)} & 1\le x<n\\ 1 & x\ge n\end{cases}$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\sum_{1}^{x}P(X=x)$$

$$=\sum_{1}^{x}\frac{2x}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{x(x+1)}{2}=\frac{x(x+1)}{n(n+1)}$$

$$\sum_{1}^{x}x=\frac{x(x+1)}{2}$$

Scanned by CamScanner

Subject:

مثال: تابع توزیع نمایی به شکل

$$f_x(x) = 4x^3 \quad 0<x<1$$

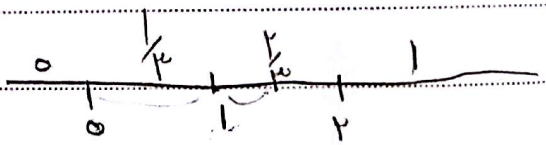
$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x^4 & 0<x<1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_x(x) = P(X \le x) = \int_0^x 4x^3\,dx = x^4 \Big|_0^x = x^4$$

اگر x پیوسته باشد: $P(X=x) = 0$ — $F_x(x) = f_x(x)$ — تابع چگالی مشتق تابع توزیع

اگر x گسسته باشد: $P(X=x) = F_x(x) - F_x(x^-)$

مثال: تابع توزیع نمودار زیر را بیابید.



$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x<1 \\ \frac{2}{4} & 1 \le x<2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{4}\,dx = \frac{x}{4} & 0 \le x<1 \\ \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx + \int_1^x \frac{2}{4}\,dx = \frac{1}{4} + \frac{2}{4}x & 1 \le x<2 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

امید ریاضی (میانگین) یک متغیر تصادفی: اگر برای اعداد ثابت جمع و تفریق کاری ندارد

امید ریاضی یک متغیر تصادفی فاشد مانند $E(x)$ میان داده‌ی وسط که امید ریاضی و همان میانگین متغیر است

$$E(g(x)) = \begin{cases} \sum_{\text{برای همه‌ی } x} g(x)P(x=x) & \text{گسسته} \\ \int g(x)f(x)dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

مثال (گسسته)

x	-2	0	2	3
$P(x=x)$	$1/9$	$4/9$	$2/9$	$2/9$

$$E(x) = -2\times\frac{1}{9} + 0\times\frac{4}{9} + 2\times\frac{2}{9} + 3\times\frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

مثال (پیوسته) $f_x(x) = x/4 \quad 0 < x < 2$

$$E(x) = \int_0^2 x\cdot x/4\, dx = \int_0^2 x^2/4\, dx = \frac{x^3}{12}\Big|_0^2 = 4/3$$

خواص امید ریاضی

$$E(a) = a$$

$$E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$$

$$E(ax) = aE(x)$$

مثال

$$f_x(x) = \frac{x^2}{9} \qquad 0 < x \le 3$$

$$E\left(\frac{a}{x^2} + 3x^3 + 4x - 2\right)$$

$\frac{1}{x^2}$ x^3 x

SOBHAN

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

$$E(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{x^2}{9}\,dx = \int_0^3 \frac{x^3}{9}\,dx = \frac{x^4}{36}\Big|_0^3 = \frac{9}{4}$$

$$E(X^2) = \int_0^3 x^2 \cdot \frac{x^2}{9}\,dx = \int_0^3 \frac{x^4}{9}\,dx = \frac{x^5}{45}\Big|_0^3 = \frac{243}{45}$$

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right) = \int_0^3 \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{9}\,dx = \frac{3}{9}$$

$$= 5 \times \frac{3}{9} + 3 \times \frac{243}{45} + 4 \times \frac{9}{4} - 2$$

مثال) $P(X=x) = \frac{2x}{n(n+1)} \quad x = 1, 2, \ldots, n$

$E(X^2 - X + 1)$

$$E(X) = \sum x P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{2x}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^{n} x^2$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3n}$$

$$E(X^2) = \sum x^2 P(X=x) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{2x}{n(n+1)} \qquad \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2n+1}{3n}\right) + 1$$

$$= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^{n} x^3 = \frac{2}{n(n+1)} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

خاصیت تلسکوپی

مثال) در صفحه‌ای ۲ توپ سفید و ۲ سیاه است. توپی به تصادف خارج و کنار هر دو سیاه ۱۰۰ می‌بازیم. اگر سیاه بیاید ۴ می‌بازیم هر دو سفید باشد ۲۰۰ می‌بریم. آیا این یک بازی منصفانه است؟

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

x: مقدار پولی که می‌بریم ← ۲۰۰ ، -۴۰ ، -۱۰۰

متوسط درآمد = ۵ (منصفانه) — امید ریاضی

x	-۱۰۰	-۴۰	۲۰۰
$P(x=x)$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$	$\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}$	$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$

x	-۱۰۰	-۴۰	۲۰۰
$P(x=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$E(x) = -100 \times \frac{1}{10} - 40 \times \frac{6}{10} + 200 \times \frac{3}{10} = \frac{474}{10} = 47.4$ (منصفانه نیست)

مثال: یک شرکت بیمه بابت خسارتهای جزئی ماشین ۵۰ تومان و خسارتهای کلی ماشین ۵۰ تومان می‌پردازد. احتمال تصادف هر اتومبیل چقدر است با این اطلاعات که ۱٪ ماشین‌ها خسارت کلی و ۱۰٪ خسارت جزئی می‌بینند؟

درآمد x	a	$a-50$	$a-10$
$P(x=x)$	۰/۸۹	۰/۰۱	۰/۱

$100 - (0.1 + 0.01)$

$a \times 0.89 + (a-50) \times 0.01 + (a-10) \times 0.1 = 0$

زیان نمی‌بیند ← $a = 14.5$

مثال:

$f_x(x) = 3e^{-3x} \quad x > 0$

$E(x) = E(x^2)$

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

$$E(x) = \int_0^{+\infty} x \cdot 2e^{-2x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-2x}\,dx = 2\left[\frac{x e^{-2x}}{-2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 2\left[(0-0)-\left(0-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

	e^{-2x}
x	$\frac{e^{-2x}}{-2}$
1	$\frac{e^{-2x}}{4}$

$$E(x^2) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot 2e^{-2x}\,dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x} = 2\left[\frac{x^2 e^{-2x}}{-2} - \frac{2x e^{-2x}}{4} - \frac{2e^{-2x}}{8}\right]_0^{+\infty}$$

$$= 2\left[(0-0-0)-\left(0-0-\frac{2}{8}\right)\right] = \frac{2}{4}$$

	e^{-2x}
x^2	$\frac{e^{-2x}}{-2}$
$2x$	$\frac{e^{-2x}}{4}$
2	$\frac{e^{-2x}}{-8}$

واریانس یک متغیر تصادفی معیار تغییر پذیری متغیر است

معیار تغییر پذیری

$$Var(x) = Var(x) = \sigma_x^2$$

انحراف معیار $\sigma_x = \sqrt{Var(x)}$ $\quad Var(x) > 0$ ، $\sigma_x > 0$

$$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$$

مثال قبل:

$$Var(x) = \frac{2}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x = \frac{1}{2}$$

مثال

x	-1	0	2
$P(x=x)$	0.5	0.4	0.1

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

$E(x) = -1 \times 0.7 + 0 \times 0.2 + 2 \times 0.1 = -0.5$

$E(x^2) = (-1)^2 \times 0.7 + 0^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.1 = 1.1$

$Var(x) = 1.1 - (-0.5)^2 = 1.15$

مثال ۱

$f(x) = \frac{a}{x} \qquad 1 < x \leq e^2$

$a = ? \longrightarrow \int_1^{e^2} \frac{a}{x}\,dx = 1 \Longrightarrow a \ln x \Big|_1^{e^2} = 1$

$a \ln e^2 - a \ln 1 = 1$

$2a \ln e - a \ln 1 = 1$

$2a = 1 \longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$

$Var(x), E(x), E(x^2)$

$E(x) = \int_1^{e^2} x \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} 1\,dx = \frac{1}{2}x \Big|_1^{e^2} = \boxed{\frac{e^2 - 1}{2}}$

$E(x^2) = \int_1^{e^2} x^2 \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} \Big|_1^{e^2} = \boxed{\frac{e^4 - 1}{4}}$

$Var(x) = \frac{e^4 - 1}{4} - \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right)^2 = \frac{e^2}{4}$ $\qquad \frac{e^4 - 2e^2 + 1}{4}$

توزیع یکنواخت پیوسته

$f(x) = \frac{1}{2x} \qquad 1 < x \leq e^2$

$Var(a) = 0$ ثابت a

$Var(ax + b) = a^2 Var(x)$ a و b ثابت

مثال) اگر $Var(2x) = 5$ باشد D

$Var(-2x + 3) = 4 \times 5$

$Var\left(\frac{4x - 2}{5}\right) = \frac{9 \times 5}{25}$

SOBHAN

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

$f(x) = \frac{ra x^r}{r}$ $\quad x = -1, 1, r, r$

x	-1	1	r	r
$f(x)$	$\frac{ra}{r}$	$\frac{ra}{r}$	$\frac{\wedge a}{r}$	$\frac{1\wedge a}{r}$

$= a$

- $P(x \leq r), P(x > 1)$
- $F_x(\cdot), F_x(a), F_x(ka)$
- $E(rx+r), E(ax^r - rx + \wedge)$

$\frac{ra}{r} + \frac{ra}{r} + \frac{\wedge a}{r} + \frac{1\wedge a}{r} = 1$

$a = \frac{1}{1\cdot}$

x	-1	1	r	r
$P(x=x)$	$\frac{r}{r\cdot}$	$\frac{r}{r\cdot}$	$\frac{\wedge}{r\cdot}$	$\frac{1\wedge}{r\cdot}$

x	-1	1	r	r
$P(x=x)$	$\frac{1}{1\delta}$	$\frac{1}{1\delta}$	$\frac{f}{1\delta}$	$\frac{9}{1\delta}$

$P(x>1) = \frac{f}{1\delta} + \frac{9}{1\delta} = \frac{1r}{1\delta}$

$P(x \leq r) = \frac{1}{1\delta} + \frac{1}{1\delta} + \frac{f}{1\delta} = \frac{y}{1\delta}$

$F_x(1.a) = P(x \leq 1.a) = \frac{r}{1\delta}$

$F_x(\delta) = 1$ $\quad \frac{1\delta}{1\delta}$

$f_x(1\cdot) = \frac{1}{1\delta}$

$E(x) = -1 \times \frac{1}{1\delta} + 1 \times \frac{1}{1\delta} + r \times \frac{f}{1\delta} + r \times \frac{9}{1\delta} = \frac{v}{r}$

SOBHAN

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

$E(x^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{15} + 1^2 \times \frac{1}{15} + 2^2 \times \frac{4}{15} + 3^2 \times \frac{9}{15} = \frac{99}{15}$

$\therefore 5 \times \frac{99}{15} - 3 \times \frac{7}{3} + 8$

$Var(x) = \frac{99}{15} - \left(\frac{7}{3}\right)^2 \simeq 2 \longrightarrow Var(4x+7) = 16 \times 2$

~~$Var(5x^2 - 3x + 8) = 25(2) - 3 \times 7 + 8$~~

$f(x) = \frac{3ax^2}{3} \quad -1 \le x \le 3$

- a
- $P(x \le 2), P(x > 1)$
- $F_x(0), F_x(\frac{1}{2}), f_x(\frac{1}{2})$
- $Var(4x+7), E(5x^2 - 3x + 8)$

$\int_{-1}^{3} \frac{3ax^2}{3} dx = 1 \longrightarrow \frac{3a}{3} \int_{-1}^{3} x^2 dx = 1 \longrightarrow \frac{3a}{3}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{3}\right] = \frac{3a}{3}\left[\frac{27}{3} + \frac{1}{3}\right]$

$\frac{28a}{9} - \frac{-3a}{9} = 1 \longrightarrow a = \frac{9}{31}$

$f(x) = \frac{3}{28} x^2 \quad -1 \le x \le 3$

$P(x > 1) = \int_{1}^{3} \frac{3}{28} x^2 dx = \frac{x^3}{28}\Big|_{1}^{3} = \frac{26}{28}$

$P(x \le 2) = \int_{-1}^{2} \frac{3}{28} x^2 dx$

Scanned by CamScanner

Subject:

$$F_x(0) = P(x \le 0)$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{3}{28} x^2 dx = \frac{x^3}{28} \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{28}$$

Scanned by CamScanner

متغیر تصادفی توام (دوبعدی)

تابعی است که به هر عضو فضای نمونه یک زوج مرتب نسبت می دهد.

(x,y) :

$S \longrightarrow R^2$

۱) (x,y) گسسته اند:

در این صورت تابع توزیع احتمال توام (x,y) را با $P(X=x, Y=y)$ نشان می دهند.

۱) $P(X=x, Y=y) \geq 0$

۲) $\sum\sum P(X=x, Y=y) = 1$

۲) (x,y) پیوسته اند:

در این صورت تابع چگالی احتمال توام (x,y) را با $f_{x,y}(x,y)$ نشان می دهند.

۱) $f_{x,y}(x,y) \geq 0$

۲) $\int\int f(x,y)\,dx\,dy = 1$

محاسبه احتمال در متغیرهای دوبعدی:

$$P((x,y)\in A) = \begin{cases} \sum\sum_{A} P(X=x, Y=y) & \text{هر دو گسسته اند} \\ \iint_A f(x,y)\,dx\,dy & \text{هر دو پیوسته اند} \end{cases}$$

تابع توزیع (یا چگالی) حاشیه ای (کناری)

Scanned by CamScanner

محاسبه تابع احتمال x یا y با استفاده از تابع احتمال (x,y) است

x و y به ازای همه مقادیر ممکن

گسسته:
$$P(x=x) = \sum_{y \in S_y} P(x=x, y=y)$$
$$P(y=y) = \sum_{x \in S_x} P(x=x, y=y)$$

پیوسته:
$$f_x(x) = \int_{x,y} f(x,y)\,dy$$
$$f_y(y) = \int_{x,y} f(x,y)\,dx$$

توزیع‌های شرطی:

گسسته:
$$P(x=x \mid y=y) = \frac{P(x=x, y=y)}{P(y=y)}$$
$$P(y=y \mid x=x) = \frac{P(x=x, y=y)}{P(x=x)}$$

پیوسته:
$$f_{x|y}(x|y) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)}$$
$$f_{y|x}(y|x) = \frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$$

شرط مستقل بودن ۲ متغیر تصادفی

گسسته: $P(x=x, y=y) = P(x=x)\,P(y=y)$ اگر x و y مستقل باشند

متغیرهای تصادفی x و y مستقل اند برای همه x و y

Scanned by CamScanner

$f_{x,y}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$ برای هر x و y

مثال) مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر یک تابع توزیع احتمال توأم باشد.

$x = -1, 1, 2$

$y = -1, 0, 1$

$f(x,y) = k(x^2+y^2)$

الف) توزیع‌های حاشیه‌ای را بیابید. (مقادیر ممکن x یعنی $P(x=x)$ و y یعنی $(-1,0,1)$ و احتمال‌های متناظر)

ب) $P(xy>0)$, $P(x^2+y^2<2)$ را بیابید.

ب) $P(y=1 \mid x=2)$, $P(x=1 \mid y=0)$ را بیابید.

ج) آیا x و y مستقل‌اند؟

$k(x^2+y^2)$

$(-1)^2+(-1)^2$

x \ y	-1	0	1
-1	$2k$	k	$2k$
1	$2k$	k	$2k$
2	$5k$	$4k$	$5k$

چون مقدار x و y در خانه‌های جدول تکرار شده‌اند.

مجموع برابر ۱ تا تابع احتمال باشد.

$f(x,y)=1 \Rightarrow 9k+k+2k+2k+k+2k+5k+4k+5k=1$

$24k=1 \longrightarrow k=\frac{1}{24}$

x \ y	-1	0	1	$P(x=x)$
-1	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{5}{24}$
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{5}{24}$
2	$\frac{5}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{14}{24}$
$P(y=y)$	$\frac{9}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{9}{24}$	

حاشیه‌ای

SOBHAN

Scanned by CamScanner

subject:

ب) $P(xy>0) = \frac{2}{24} + \frac{1}{24} + \frac{6}{24} = \frac{9}{24}$

$P(x^2+y^2<2) = \frac{2}{24} + \frac{1}{24} + \frac{2}{24} + \frac{2}{24} + \frac{1}{24} + \frac{2}{24} = \frac{10}{24}$

پ) $P(x=1 \mid y=0) = \frac{P(x=1, y=0)}{P(y=0)} = \frac{1/24}{6/24} = \frac{1}{6}$

$P(y=1 \mid x=2) = \frac{P(x=2, y=1)}{P(x=2)} = \frac{6/24}{16/24} = \frac{6}{16}$

ت) $P(x=-1, y=-1) = P(x=-1)\,P(y=-1)$

$\frac{2}{24} = \frac{6}{24} \times \frac{9}{24}$

$2 \neq \frac{54}{24}$ مستقل نیستند

مثال) مقدار k را طوری بیابید که تابع زیر یک تابع چگالی توام باشد

$f(x,y) = k(x^2+y)$

$-1<x<1$

$0<y<1$

الف) چگالی های حاشیه ای را بیابید

ب) $P(X>Y)$ را محاسبه کنید

پ) $f(x|y)$ و $f(y|x)$ را بیابید

ج) آیا X و Y مستقل

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject: Month: Date:

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1} k(x^2+y)\,dy\,dx = 1$$

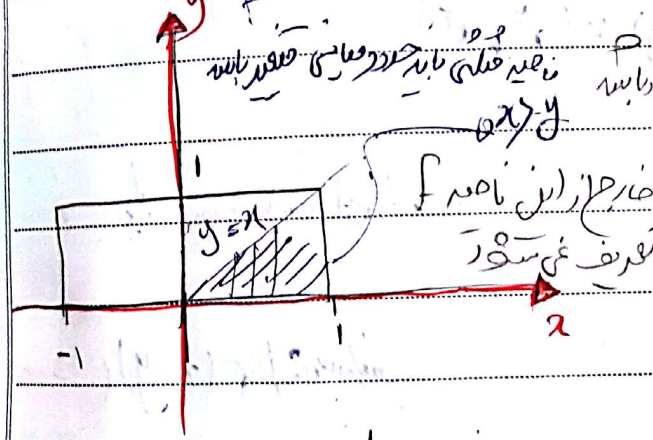
$$\int_{-1}^{1}\left[k\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1\right]dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1}\left(k\left(x^2+\tfrac{1}{2}\right)\right)dx = 1$$

$$k\frac{x^3}{3}+\frac{k}{2}x\Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$k/3 + k/2 + k/3 + k/2 = 1 \qquad a\,k/3 = 1 \longrightarrow k = 3/2$$

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{3}{2}(x^2+y) \qquad -1<x<1, \quad 0<y<1$$



الف) $f_x(x) = \int f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y)\,dy = \frac{3}{2}\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$$= \frac{3}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) \qquad -1<x<1$$

Scanned by CamScanner

subject:

$$f_y(y) = \int_x f(x,y)\,dx = \int_{-1}^{1} \tfrac{3}{8}(x^2+y)\,dx = \frac{3}{8}\left(\frac{x^3}{3} + yx\Big|_{-1}^{1}\right)$$

$$= \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{1}{3}+y\right) - \tfrac{3}{8}\left(-\tfrac{1}{3}-y\right) = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{2}{3}+2y\right) \qquad 0<y<1$$

$$= \tfrac{3}{8}(\tfrac{1}{3}+y)$$

ب) $P(x>y)$

$$P(x>y) = \int_0^1 \int_0^x \tfrac{3}{8}(x^2+y)\,dy\,dx$$

$$= \tfrac{3}{8}\int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^x\right] dx = \tfrac{3}{8}\int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$$\tfrac{3}{8}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\Big|_0^1\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12} = \frac{5}{32} = 0.156$$

ب) $f(x|y) = \dfrac{f_{x,y}(x,y)}{f_y(y)} = \dfrac{\frac{3}{8}(x^2+y)}{\frac{3}{8}(\frac{1}{3}+y)} = \dfrac{3(x^2+y)}{4y+2}$

$x|y$

$f(y|x) = \dfrac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)} = \dfrac{\frac{3}{8}(x^2+y)}{\frac{3}{8}(x^2+\frac{1}{3})} = \dfrac{2(x^2+y)}{3x^2+1}$

$y|x$

(ج) $\tfrac{3}{8}(x^2+y) = \tfrac{3}{8}(x^2+\tfrac{1}{3}) + \tfrac{3}{8}(2y+\tfrac{1}{3})$

$x^2+y = \tfrac{4}{3}(x^2+\tfrac{1}{3})(y+\tfrac{1}{3})$

$x=0, y=\tfrac{1}{2} \Rightarrow \tfrac{1}{2} = \tfrac{4}{3}(0+\tfrac{1}{3})(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})$

$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

$x=0, y=\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{4}{30}\left(0+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$

$1 \neq \frac{12}{30}$ مستقل نیست

کوواریانس:

معیاری برای بیان تغییرپذیری همزمان دو متغیر است

$$\sigma_{xy} = Cov(x,y)$$

$$Cov(x,y) = E(xy) - E(x)E(y)$$

$$E(x,y) = \begin{cases} \sum\sum xy\,P(x=x, y=y) & \text{گسسته} \\ \int\int xy\,f_{x,y}(x,y)\,dy\,dx & \text{پیوسته} \end{cases}$$

نتیجه: اگر x و y مستقل باشند آنگاه $Cov(x,y)=0$

عکس: اگر $Cov(x,y)\neq 0$ آنگاه x و y وابسته‌اند.

مثال: توزیع توأم

y \ x	-1	1	$P(y=y)$
0	0.4	0.1	0.5
1	0.5	0.1	0.6
2	0.1	0.3	0.4
$P(x=x)$	0.5	0.5	

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

$E(x) = -1 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = 0$

$E(y) = 0 \times 0.5 + 1 \times 0.1 + 2 \times 0.4 = 0.9$

$E(xy) = -1 \times 0 \times 0.4 + 1 \times (-1) \times 1 \times 0 + (-1) \times 2 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.4 +$

$1 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 2 \times 0.1 = 0.4$

$cov(x,y) = 0.4 - 0 \times 0.9 = 0.4$

$cov(x,y) > 0$ یعنی تغییرات هم‌سو است ← افزایش x ← افزایش y

$cov(x,y) < 0$ یعنی تغییرات خلاف جهت است ← افزایش x ← کاهش y

مثال سوال قبل ★

$f_{x,y}(x,y) = \frac{3}{5}(x^2 + y) \quad \begin{matrix} -1 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{matrix}$

احتمال یک پیشامد هرگز در بازه منفی یک تا یک است

$f_x(x) = \frac{3}{5}(x^2 + \frac{1}{3}) \quad -1 < x < 1$

$f_y(x) = \frac{6}{5}(y + \frac{1}{3}) \quad 0 < y < 1$

$E(x) = \int x \cdot f_x(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{3}{5}(x^2 + \frac{1}{3})\,dx = \frac{3}{5}\int_{-1}^{1} x^3 + \frac{x}{3}\,dx = 0$

فرد

FARHANG

Scanned by CamScanner

اگر X و Y مستقل باشند $\text{cov}(X,Y)=0$

subject:

Year: Month: Date:

$$E(y)=\int y\cdot f_y(y)\,dy=\int_0^1 y\cdot\frac{y}{5}(y+\tfrac{1}{4})\,dy=\tfrac{1}{5}\int_0^1(y^2+\tfrac{y}{4})\,dy$$

$$=\tfrac{1}{5}\left(\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{8}\right)\Big|_0^1=\tfrac{11}{30}$$

$$E(x,y)=\iint_{x,y} xy\cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\iint xy\cdot\tfrac{1}{5}(x^2+y)\,dx\,dy=\tfrac{1}{5}\int_0^1\int_{-1}^1(x^3y+xy^2)\,dx\,dy$$

$$=\tfrac{1}{5}\int_0^1\left[\frac{x^4y}{4}+\frac{x^2y^2}{2}\right]_{-1}^{1}dy=0$$

$$\text{cov}(x,y)=0-0\times\tfrac{11}{30}=0$$

مثال: $f(x,y)=k$ $\quad x=1,2,3,4$ خط در جهت x است $\quad y=1,2,\dots,x$

$x=1\Rightarrow y=1$

$k=1$ یعنی بالاتر از 1 صفر می‌شود

$x=3\Rightarrow y=1,y=2,y=3$

$y=4$ خط در x ها صفر می‌شود ✗

۱۲ حالت داریم

x \ y	1	2	3	4	$P(x=x)$
1	k	0	0	0	k $\quad 1/10$
2	k	k	0	0	$2k$
3	k	k	k	0	$3k$
4	k	k	k	k	$4k$
$P(y=y)$	$4k$	$3k$	$2k$	k	

$P(x=2\mid y=1)$

$k+k+k+k+k+k+k+k+k+k=1$

$10k=1$

$k=\tfrac{1}{10}$

$$P(x=2\mid y=1)=\frac{P(x=2,y=1)}{P(y=1)}=\frac{k}{4k}=\tfrac{1}{4}$$

FARHANG

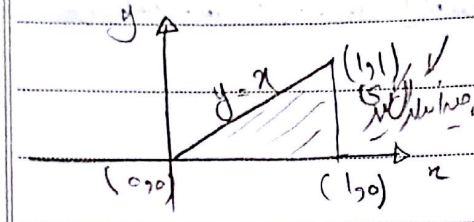
Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

$f(x,y) = k \qquad 0<x<1 \qquad 0<y<x$

$$\int_0^1 \int_0^x k \, dy \, dx = 1$$



$f(y|x)$, $f(x|y)$

$y|x$, $x|y$

$$\int_0^x k \, dy = k y \Big|_0^x = kx$$

$$\int_0^1 kx \, dx = k \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{k}{2}$$

$$\frac{k}{2} = 1 \longrightarrow \boxed{k = 2}$$

$f(x,y) = 2$

$$f_x(x) = \int_0^x 2 \, dy = 2y \Big|_0^x = 2x \qquad 0<x<1$$

$$f_y(y) = \int_0^1 2 \, dx = 2x \Big|_0^1 = 2 \qquad 0<y<x$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f(x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject: آمار

Year: Month: Date:

متغیرهای تصادفی خاص:

الف) گسسته

۱- برنولی

هر آزمایش تصادفی که فقط ۲ نتیجه را بتوان برای آن متصور شد آزمایش برنولی است

S { موفقیت (پیروزی) ، شکست }

احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با $1-p$ (یا q) نشان می دهند

X متغیر تصادفی برنولی $= \begin{cases} 0 & \text{شکست} \\ 1 & \text{پیروزی} \end{cases}$

تابع احتمال

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p$	p

تابع احتمال برنولی

$$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x} \qquad x = 0, 1$$

امید ریاضی

$$E(X) = p \qquad Var(X) = pq$$

$$E(X^2) = p$$

واریانس

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$
$$= p - p^2$$
$$= p(1-p)$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

۲. توزیع دوجمله‌ای

هرگاه آزمایش تصادفی برنولی n بار و مستقل انجام با احتمال پیروزی p تکرار شود آزمایش حاصل دوجمله‌ای است

اگر x تعداد پیروزی‌ها باشد، x را متغیر تصادفی دوجمله‌ای می‌نامیم

$x = 0, 1, \dots, n$

تابع احتمال دوجمله‌ای: $P(x=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

امید ریاضی: $E(x) = np$

واریانس: $V(x) = np(1-p)$

مثال) تاسی را ۱۵ بار می‌اندازیم احتمال این که ۷ بار عدد بیش‌تر از ۴ دیده شود چند است؟

پیروزی: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ شش: p

$P(x=7) = \binom{15}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right)^8$

$n = 15$

$x = 7$

$P(x=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

مثال) ۲۰ درصد دانشجویان کلاس‌ها را به‌طور کامل می‌آیند احتمال این که در کلاس ۲۰ نفره ۵ نفر کامل بیایند چقدر است؟ (کامل بیایند یا نیایند)

$p = 0/2$

$n = 20$

$x = 5$

$P(x=5) = \binom{20}{5} (0/2)^5 (1-0/2)^{15}$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال ۱: از متغیر تصادفی Y با تابع چگالی احتمال $f(y) = \frac{y}{2}$ $1 < y < 2$

۷ بار عمل انتخاب شده است احتمال اینکه در ۳ بار، عدد انتخاب شده از یک کمتر باشد چقدر است؟

$$p = p(Y > 1) = \int_1^2 \frac{y}{2}\, dy = \frac{y^2}{4}\Big|_1^2 = \frac{3}{4}$$

$n = 7$

$x = 3$

دو حالت داریم که کمتر شود

$$p(x = 3) = \binom{7}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{7-3}$$

۳ بار پیش آمده

تعداد رویدادها در یک بازه زمانی است مثل تعداد تصادفات در یک روز

تعداد زاد و ولد در یک ماه

تعداد کسانی که در عرض ۱۰ هفته وارد بانک میشوند

تعداد سیل های در یک سال

$$p(x = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(x) = V(x) = \lambda$$

λ = متوسط رویدادها در بازه زمانی است

Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

مثال: متوسط تعداد تصادف در یک بزرگراه در یک هفته ۳ فقره است. احتمال اینکه در عرض ۱۰ هفته کمتر از ۵ تصادف رخ دهد چقدر است؟

احتمال اینکه در عرض ۲ هفته ۶ تصادف رخ دهد چقدر است؟

هفته	تعداد تصادف
۵	۳
۸	۸

$$\lambda = \frac{8 \times 3}{5} = 4.8$$

$$P(X=0) = \frac{(4.8)^0 e^{-4.8}}{0!} = e^{-4.8}$$

هفته	تعداد تصادف
۵	۳
۲	؟

$$\lambda = \frac{2 \times 3}{5} = 2.4$$

$$P(X=4) = \frac{(2.4)^4 e^{-2.4}}{4!}$$

مثال: در توزیع احتمال پواسن $\frac{P(X=x+1)}{P(X=x)}$ برابر است با:

$$\frac{\frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{(x+1)!}}{\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}} = \frac{\lambda^{x+1}}{(x+1)!} \times \frac{x!}{\lambda^x} = \frac{\lambda}{x+1}$$

تقریب دوجمله‌ای با پواسن

هرگاه در متغیر دوجمله‌ای n زیاد و p خیلی کم باشد می‌توان گفت که توزیع دوجمله‌ای از توزیع پواسن استفاده کرد.

شرایط تقریب مناسب:

$$\begin{cases} n \geq 20 \\ p < 0.05 \end{cases} \xrightarrow{\text{پواسن}} \lambda = np$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال: ۰/۰۲ تصادفات فوتی هستند احتمال اینکه در بین ۱۵۰ تصادف نزدیک ۳ فوتی وجود داشته باشد چقدر است؟

$p = 0.02$ $\quad n = 150$ $\xrightarrow{\text{پواسن}}$ $\lambda = np = 150 \times 0.02 = 3$

$$P(X=3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!}$$

مثال: محموله‌ای از هر ۱۰۰۰ بازار ۳ تا نیازمند واحت های ویژه‌ای احتمال اینکه از بین ۱۵۰۰ بازار متولد شده ۲ تا نیازمند واحت باشند چقدر است

$p = 0.003$ $\quad n = 1500$ $\longrightarrow \lambda = 1500 \times 0.003 = 4.5$

$$P(X=2) = \frac{(4.5)^2 e^{-4.5}}{2!}$$

مثال: جعبه‌ای دارای ۳ سفید و ۵ توپ سیاه است از این جعبه ۱۰۰ بار با جایگذاری توپ انتخاب احتمال اینکه ۴۰ بار توپ سیاه انتخاب شده چقدر است؟

سیاه: $p = \frac{5}{8}$ $\quad n = 100$

$$P(X=40) = \binom{100}{40}\left(\frac{5}{8}\right)^{40}\left(\frac{3}{8}\right)^{60}$$

FARHANG

Scanned by CamScanner

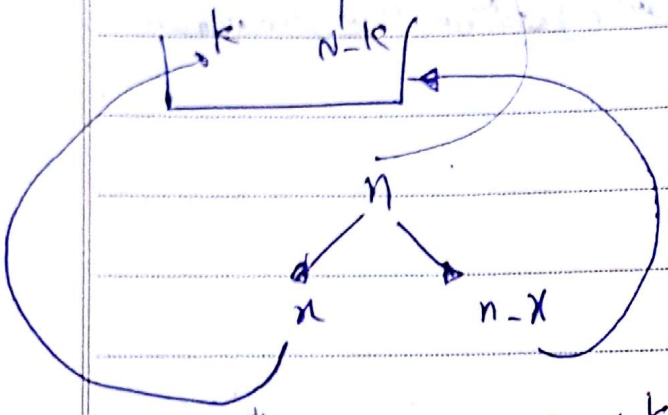
۴) فون هندسی

فرض کنید N تعداد کل جمعیت باشد که به دو دسته و N-k, k تقسیم می‌شوند

k	N-k

یک نمونه n تایی بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم

اگر x تعداد اعضای نمونه باشد که متعلق به دسته k ای هستند x را فون هندسی می‌گوییم



$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

مثال: در یک کلاس ۲۰ نفره ۱۳ نفر دیپلم ریاضی دارند به تصادف ۵ نفر را خواهیم گزید. اگر x تعداد دیپلم‌های ریاضی این ۵ نفر باشد توزیع احتمال x و امید ریاضی آن را بیابید.

$$E(X)=\frac{nk}{N}$$

$$Var(X)=\frac{nk}{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

$N=20$

$k=13$

$N-k=7$

$n=5$

$$P(X=x)=\frac{\binom{13}{x}\binom{7}{5-x}}{\binom{20}{5}} \qquad x=0,1,2,3,4,5$$

$$E(X)=\frac{5\times 13}{20}=3.25$$

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

$$P(x=x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, k)$$

$$E(x) = \frac{nk}{N}$$

ه) تعداد همه سفید ها همه سیاه است همه انتخاب می‌کنیم از تعداد همش

سفید انتخاب شده باید ۴ تا باشد

$N = 8$

$k = 4$ سفید

$N - k = 4$

$n = 4$

$$P(x=x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{4}{4-x}}{\binom{8}{4}} \qquad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ه) هندسی

هر بار آزمایش مستقل برنولی با احتمال پیروزی p تکرار مستقل را از شروع تا اولین

پیروزی را آزمایش هندسی است

این تعداد را از k تا باید x متغیر هندسی است

$$P(x=x) = p(1-p)^{x-1} \qquad x = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(x) = \frac{1}{p} \qquad Var(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

Scanned by CamScanner

subject:

Year: Month: Date:

مثال: یک جعبه تاس را آنقدر می‌اندازیم تا مجموع ۲ تاس ۸ شود احتمال اینکه در ۵ بار موفق

(۴،۴) (۳،۵) (۲،۶) توضیح

شویم چقدر است

$$p = \frac{5}{36}$$

$$P(x=5) = \frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^4$$

مثال: در جعبه‌ای ۲ توپ سفید و ۳ توپ سیاه است هر بار یک توپ را به تصادف

از جعبه خارج و به جعبه برمی‌گردانیم

$$p = \frac{3}{5} = 0/6$$

احتمال اینکه در ۷ بار ۷ توپ سیاه برخورد کنیم چقدر است

$$p(x=7) = 0/6 \times (0/4)^6$$

احتمال اینکه دقیقا ۷ بار توپ سیاه برخورد کنیم

این بار پیروز شده‌ایم

متغیرهای تصادفی خاص

پیوسته:

۱) نمایی: متغیر زمان انتظار برای وقوع اولین رخداد یا زمان انتظار بین دو رویداد

میانگی است

λ: متوسط رویداد در واحد زمان

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0, \quad \lambda > 0$$

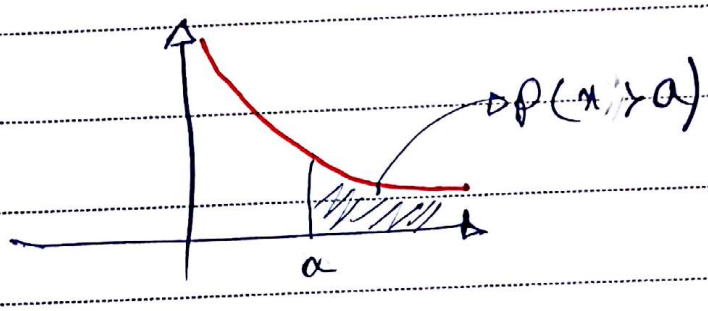
امید ریاضی $E(x) = \frac{1}{\lambda}$

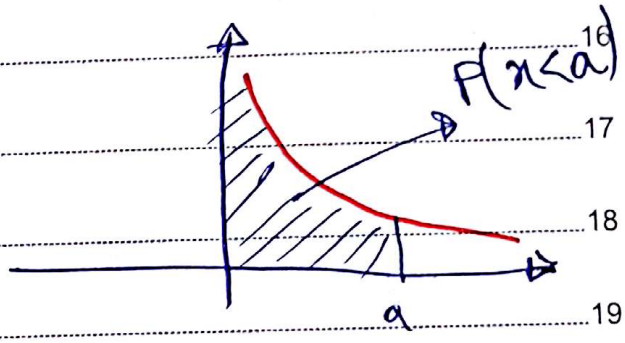
واریانس $V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$

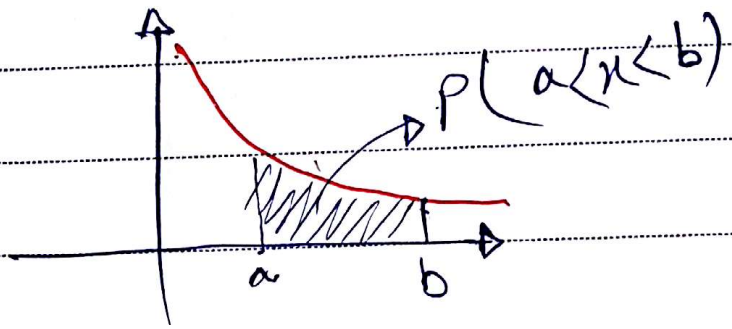
$$P(x > a) = e^{-\lambda a}$$

$$P(a < x < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$P(x < a) = 1 - e^{-\lambda a}$$







Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

λ فارزاده

مثال: در صف تاکسی فرودگاه ولچو می‌باشد احتمال اینکه فاصله زمانی بین ورود ۲ مسافر بیش از ۴ دقیقه طول بکشد چقدر است؟

$\lambda = \frac{1}{5} = 0.2$

$P(X > 4) = e^{-0.2 \times 4} = e^{-0.8}$

مثال: میانگین زمان انتظار بین ۲ سفارش متوالی در رستوران ۷ دقیقه است. احتمال اینکه بین دو سفارش متوالی ۳ تا ۵ دقیقه طول بکشد چقدر است؟

$E(X)$

$E(X) = 7 \longrightarrow \lambda = \frac{1}{7}$

$\therefore E(X) = \frac{1}{\lambda}$

$P(3 < X < 5) = e^{-\frac{1}{7} \times 3} - e^{-\frac{1}{7} \times 5} = e^{-\frac{3}{7}} - e^{-\frac{5}{7}} = 0.7$

مثال ۲: معتبرترین متغیر آماری است که به بررسی داده‌ها و میزان پراکندگی آن می‌پردازد

$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

نمودار زنگی شکل یا منحنی نرمال

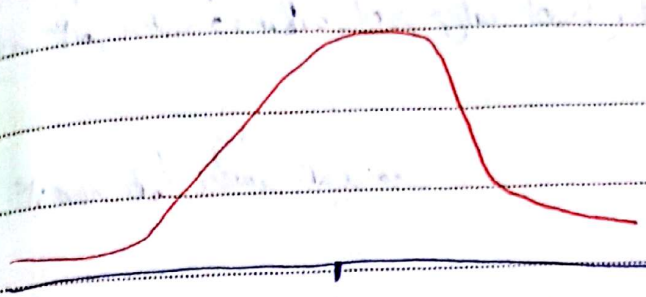
$x \in \mathbb{R}$ $\quad V(X) = \sigma^2 > 0$

$E(X) = \mu \in \mathbb{R}$ $\quad \sigma = \sqrt{V(X)} > 0$

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:



$f_X(x) \to 0$ وقتی $x \to \pm\infty$

میانگین $\mu = \mu_0 = \mu_1$

$P(x > \mu) = P(x < \mu) = 0.5$ مساحت زیر منحنی برابر

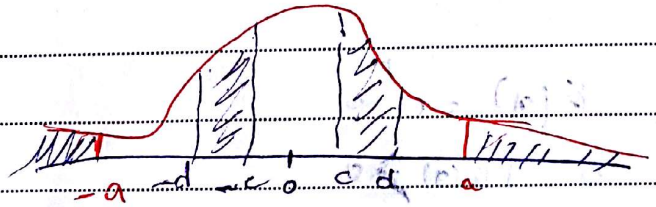
$x : N(\mu, \sigma^2)$

نرمال استاندارد

$\mu = 0$ و $\sigma^2 = 1$ ($\sigma = 1$)

$Z : N(0, 1)$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad z \in \mathbb{R}$$



$P(Z > 0) = P(Z < 0) = 0.5$

Year: Month: Date:

Subject:

$$P(z>a) = P(z<-a)$$

$$P(-a<z<a) = 2P(0<z<a)$$

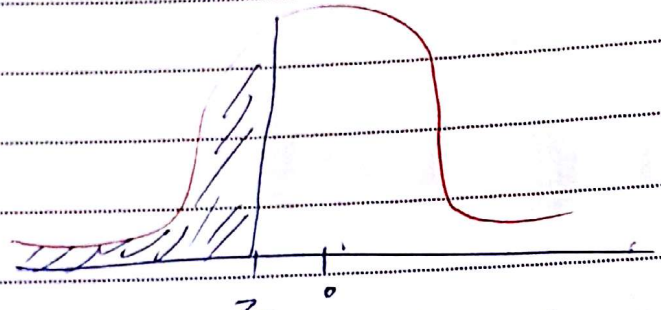
$$P(c<z<d) = P(-d<z<-c)$$

محاسبه احتمال در نرمال استاندارد.

احتمال در نرمال استاندارد

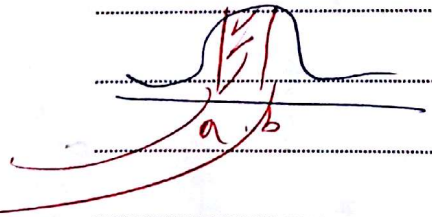
برای این کار از جدول نرمال محاسبه و سپس با این جدول بررسی.

در جدول $P(z<z)$ نظیر سمت راست است



$$P(z>a) = \begin{cases} P(z<-a) \\ 1-P(z<a) \end{cases}$$

$$P(a<z<b) = P(z<b) - P(z>a)$$



Scanned by CamScanner

این تغییر در جدول

است دوار دامرکن

Year: Month: Date:

Subject:

نکته: اگر $X \longrightarrow N(\mu, \sigma^2)$

میانگین

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$ انحراف معیار

در این صورت $Z \longrightarrow N(0,1)$

مثال: وزن نوزادان یک بیمارستان متغیری نرمال با میانگین ۳ kg و انحراف معیار ۲۰۰ gr است. چند درصد نوزادان وزنی بیش از ۳٫۵ kg دارند؟

$\mu = 3 \quad \sigma = 0.2$

$$P(X > 3.5) = P\left(Z > \frac{3.5 - 3}{0.2}\right)$$

تبدیل به Z

$$= P(Z > 2.5) = P(Z < -2.5)$$

چون این نوع سوال نداریم

مثال: قیمت یک کیلو گوجه فرنگی متغیری نرمال با میانگین ۲۰۰۰ و انحراف معیار ۱۰۰ تومان است احتمال اینکه قیمت در یک هفته بین ۱۹۰۰ تا ۲۱۰۰ باشد چقدر است؟

$\mu = 2000$

$\sigma = 100$

$$P(1900 < X < 2100) = P\left(\frac{1900 - 2000}{100} < Z < \frac{2100 - 2000}{100}\right)$$

$$P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1)$$

Scanned by CamScanner

Date:

تقریب نرمال برای توزیع دوجمله‌ای

اگر در یک آزمایش n بار تکرار و p یک متغیر تصادفی دوجمله‌ای وضعیت مناسب را نسبت به خطی کوچک و در حالتی نزدیک

می‌توان به جای دوجمله‌ای از نرمال استفاده کرد

$$\begin{cases} n \geq 40 \\ 0.05 < p < 0.95 \end{cases} \xrightarrow{\text{نرمال}} \begin{cases} \mu = np \\ \sigma^2 = np(1-p) \end{cases}$$

مثال: ۲ دهم درصد بذرهای تولیدی استان مازندران، بی‌محصول هستند. احتمال اینکه در بین ۱۰۰ بذر انتخاب شده حداقل ۵ بذر بی‌محصول باشند چقدر است؟

$p = 0.02$ $\quad$ $n = 100$

$\mu = 100 \times 0.02 = 2$

$\sigma^2 = 100 \times 0.02 \times 0.98 = 1.96$

$\sigma \simeq 1$

$$P(x \geq 5) \simeq P\left(z \geq \frac{5 - 2}{1}\right)$$

$$P(z \geq 3) = 1 - P(z < 3)$$

(در جدول هست)

مثال) در جعبه‌ای ۳ توپ سفید و ۲ توپ سیاه است. ۱۵۰ بار با جایگذاری از این جعبه توپ انتخاب می‌شود. احتمال اینکه ۵۰ تا ۶۰ بار توپ سفید دیده شود چقدر است؟

$p = \frac{3}{5} = 0.6$

$n = 150$

$\mu = 150 \times 0.6 = 90$

$\sigma^2 = 150 \times 0.6 \times 0.4 = 36$

$\sigma = 6$

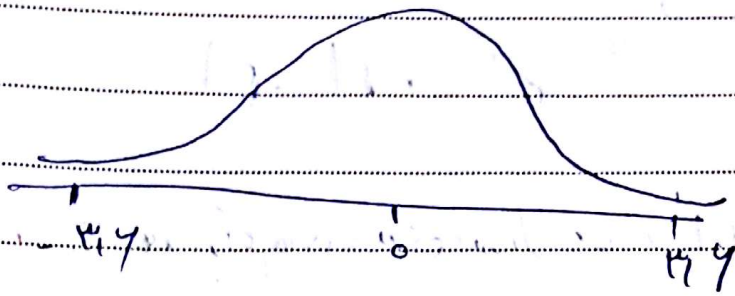
Scanned by CamScanner

$$P(80 \le x \le 100) \simeq P\left(\frac{80-90}{4} \le z \le \frac{100-90}{4}\right)$$

$$= P(-2.4 \le z \le 2.5)$$

$$= P(z \le -2.5) - P(z \le -2.4) = 0$$

نکته مهم:



$$P(-3.4 < z < 3.4) \simeq 1$$

$$P(z > 4) = 0, \quad P(z < 7) = 1$$

$$P(z < -5) = 0$$

$$P(z > -9) = 1$$

نکته ترکیب خطی از متغیرهای نرمال، نرمال است

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای نرمال و $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد ثابت حقیقی باشند

$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ یک متغیر نرمال است

Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

$\mu_y = E(y) = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$

$\sigma^2(y) = a_1^2\sigma_1^2 + \cdots + a_n^2\sigma_n^2$

به شرط این که xها مستقل باشند

مثال) نمره آمار دانشجویان یک دانشگاه متغیری نرمال با میانگین ۱۵ و انحراف معیار ۱ و نمره ادبیات دانشگاه دیگر متغیری نرمال با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲ است. احتمال اینکه ۳ برابر نمره آماریک دانشجو از دانشگاه اول بیشتر از ۲ برابر نمره ادبیات دانشجوی دیگر از دانشگاه دوم باشد چقدر است؟

$x_1 : \mu_1 = 15, \sigma_1^2 = 25$

$x_2 : \mu_2 = 18, \sigma_2^2 = 4$

$P(3x_1 > 2x_2) = ?$

$3x_1 > 2x_2 \longrightarrow 3x_1 - 2x_2 > 0$

$y = 3x_1 - 2x_2$

$\mu_y = 3\times 15 - 2\times 18 = 9$

$\sigma_y^2 = 9\times 25 + 4\times 4 = 241$

$\sigma_y \simeq 15/...$

$P(y>0) = P\left(z > \frac{0-9}{\sqrt{241}}\right)$

$= P\left(z > \frac{-9}{15/...}\right) = P\left(z < \frac{9}{15}\right)$

(از جدول مثبت) (با روش جدول)

SOBHAN

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

$X_3 \sim N(-2, 1)$, $X_2 \sim N(0, 4)$, $X_1 \sim N(3, 2)$ مثال

$P(2X_1 + 3X_2 + X_3 < 0) = ?$

$\Rightarrow$

$Y = 2X_1 + 3X_2 + X_3$

$\mu_Y = 2 \times 3 + 3 \times 0 + (-2) = 4$

$Var(Y) = 9 \times 2 + 4 \times 4 + 1 \times 1 = 35$

$\sigma = 5$

$P(Y < 0) = P(Z < \frac{0 - 4}{5}) = P(Z < -\frac{4}{5})$

همبستگی و رگرسیون:

آیا بین دو متغیر می‌توان یک همبستگی ایجاد کرد؟

آیا ارتباط و همبستگی وجود دارد؟ چگونه می‌توان به صورت یک تابع ریاضی عنوان کرد؟

ساعات مطالعه و نمره دریافتی

میزان نور خورشید و شکوفه

نرخ تورم و نرخ بیکاری

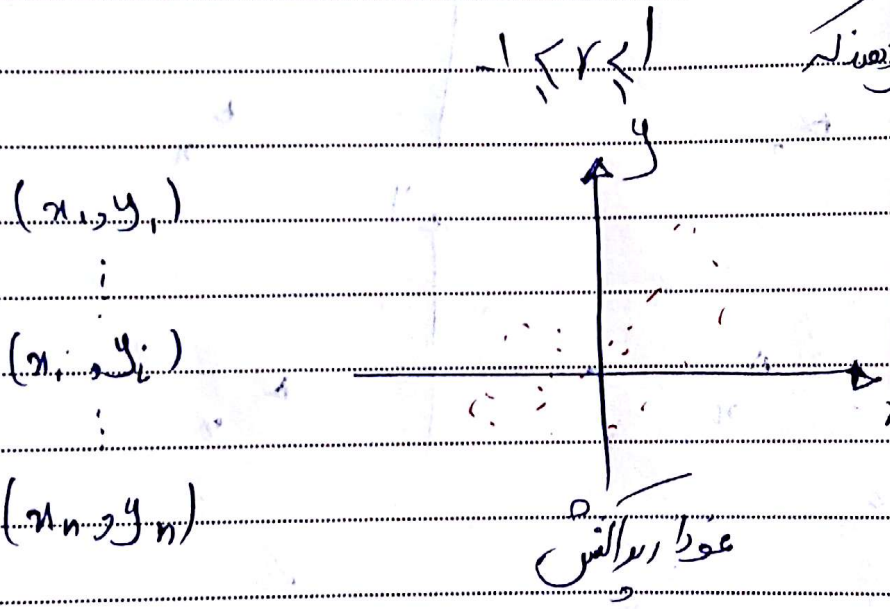
قیمت زمین و قیمت مسکن

تأثیر نرخ بهره بین بر میزان تورم

مزیت همبستگی خطی پیرسن:

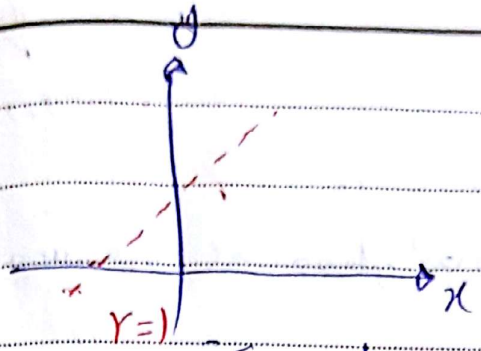
محدودیت میزان خطی بودن رابطه بین دو متغیر اندازه‌گیری می‌شود

و آن را با کسان می‌دهد

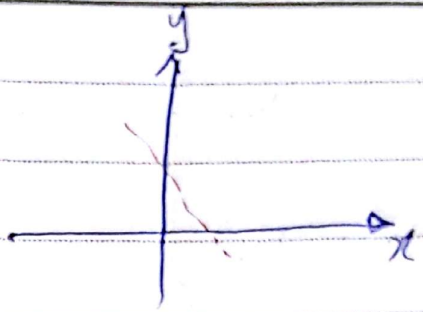


$$r = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2\right]\left[n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2\right]}}$$

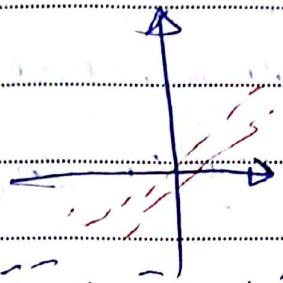
Scanned by CamScanner



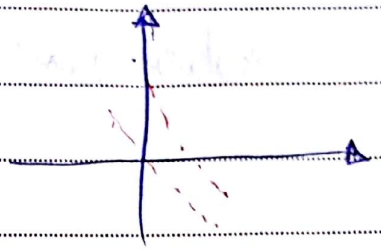
رابطه خطی کامل و مستقیم
افزایش یکی باعث افزایش دیگری می‌شود



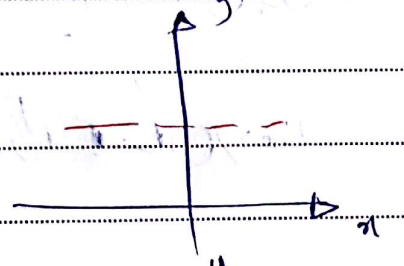
r = -1
رابطه خطی کامل و معکوس

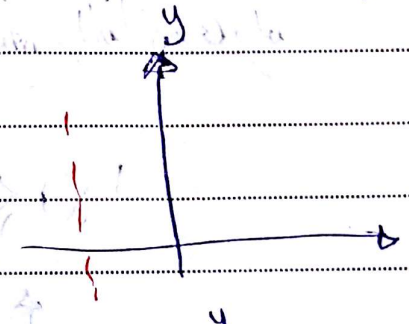


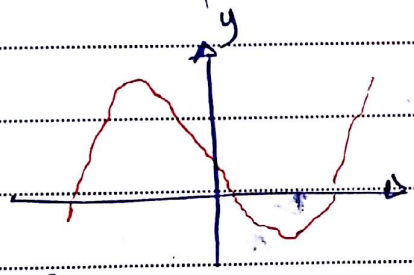
رابطه خطی ناقص و مستقیم
$0 < r < 1$

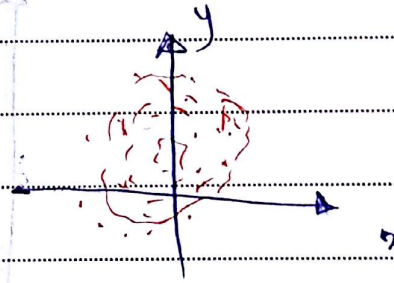


$-1 < r < 0$
رابطه خطی ناقص معکوس









$r = 0$ رابطه خطی وجود ندارد

مثال: ضریب همبستگی خطی را بیابید

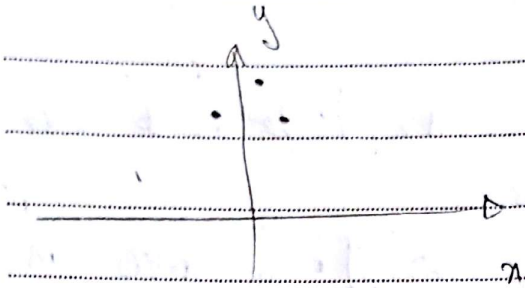
x	y	xy	x^2	y^2
-1	3	-3	1	9
1	4	4	1	16
1	7	7	1	49
ج:	14	8	3	74

Scanned by CamScanner

Subject: Year: Month: Date:

$$r = \frac{۳×۸ - ۱ × ۱۴}{\sqrt{[۳×۱۳ - ۱^۲][۳×۷۴ - ۱۴^۲]}} = \frac{۱۰}{\sqrt{۲۷۸}} = \frac{۱۰}{۱۶٫۶۷}$$

رو نمودار پراکندگی خطی است $r=۰$



رگرسیون خطی:

الگو وجود رابطه خطی تابع ساده‌ترین خطی که می‌توان بر نقاط برازش داد، خط رگرسیون است

که کمترین انحراف را با نقاط دارد

معادله خط رگرسیون $y = a + bx$

x بر y

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{۱۰}{۸} = ۱٫۲۵$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

میانگین y — میانگین x

$$a = \frac{۱۴}{۳} - ۱٫۲۵ \times ۱٫۳ = ۴٫۶$$

معادله خط: $y = ۴٫۶ + ۱٫۲۵x$

کم‌ترین کار معادله خطی بین سن است

مثال: معادله خط مطالعه ساعات x نمره ریاضی y

x	y	xy	x^2	y^2
۰	۵	۰	۰	۲۵
۱	۵	۵	۱	۲۵
۱	۳	۳	۱	۹
۲	۲	۴	۴	۴
۳	۱	۳	۹	۱
۴	۱	۴	۱۶	۱
ع.	۱۷	۱۹	۳۱	۴۸

$\bar{x} = ۱٫۳$ $\quad \bar{y} = ۱۴/۳$ $\quad \sum x_i^2 = ۳۱$ $\quad (\sum x_i)^2 = ۱۱^2 = ۱۲۱$

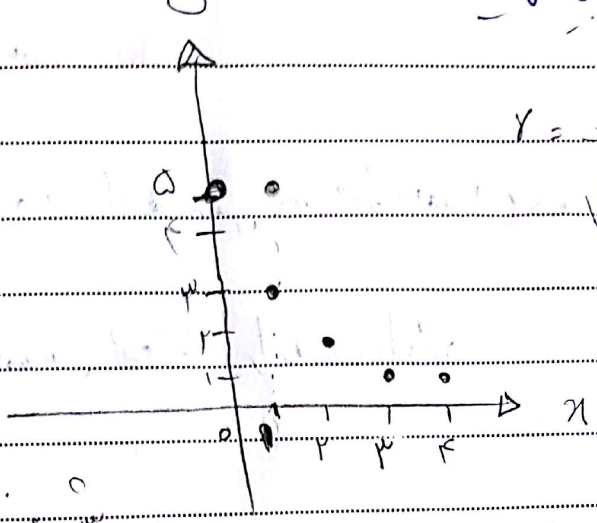
$\sum y_i^2 = ۴۸$ $\quad \sum x_i y_i = ۱۹$ $\quad \sum y_i = ۱۷$ $\quad \sum x_i = ۱۱$

$۳۱ + \frac{۱۲۱}{۳} = \frac{۲۱۵}{۳}$

SOBHAN

Scanned by CamScanner

- همبستگی پیرسون
- ضریب همبستگی خطی
- معادله خط رگرسیون y بر x
- اگر $x=10$ باشد، y را حدوداً چند می‌شود.



$$r = \frac{6\times 19 - 11\times 17}{\sqrt{[6\times 31 - (11)^2][6\times 48 - (17)^2]}}$$

$$= \frac{-22}{81} = -0.9$$

$$b = \frac{6\times 19 - 11\times 17}{6\times 31 - (11)^2} = \frac{-22}{48} = -1.12$$

$$a = \frac{17}{6} - (-1.12)\times\frac{11}{6} = 4.8$$

$$y = 4.8 - 1.12x$$

$$x = 1.5 \rightarrow y = 4.8 - 1.12(1.5)$$

مثال: جدول زیر

- میانگین - واریانس و ... دو متغیر را بیابید.
- ضریب تغییرات را محاسبه کنید

Scanned by CamScanner

- جدول فراوانی نسبی به صورت زیر است

مرز ان طبقات	فراوانی
۰-۴	۵
۴-۸	۳
۸-۱۲	۹
۱۲-۱۶	۷

- از بین ۷ توپ سیاه و ۵ توپ قرمز ۲ توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه حداکثر یک توپ قرمز باشد چقدر است

- ۱۰ حرف الفبا را به چند طریق می‌توان مرتب کرد به طوری که ۹ حرف مشخص کنار هم باشند

- اگر $P(A)=0.15$ ، $P(B)=0.17$ ، $P(A\cap B)=0.04$ باشد $P(B'\cup A)$ ، $P(A'|B)$ ، $P(A-B')$ را بیابید

- در یک جعبه ۳ توپ سفید و ۲ توپ سیاه است. یک توپ به تصادف انتخاب می‌کنیم و به جای آن دو توپ از رنگ مخالف برمی‌داریم و سپس یک توپ خارج می‌کنیم اگر این توپ سفید باشد احتمال اینکه توپ اول سفید بوده است چقدر است

- $f(x,y)=kx^2y$ $\quad 0<x<1$ $\quad 0<y<x$

الف) $k=$

ب) $P(x+y<1)$

Scanned by CamScanner

x \ y	-1	0
1	٪۵	٪۱۵
2	0	٪۲۰

$Cov(x,y)$

$P(x=1, y=0)$

- در یک صف ۳ نوبت سفید که نوبت سیاه است ۷ بار به تصادف و با جایگذاری یک نوبت انتخاب می‌کنیم. اگر x تعداد نوبت‌های سفید انتخاب شده باشد تابع احتمال x را بدست آورید و واریانس x را بیابید. مسأله را در حالت بدون جایگذاری حل کنید.

- در هر ماه فیفا دو نوبت داوری مرتبی شود احتمال اینکه در عرض ۳ دقیقه نوبت داوری سوت حقه زده است

- تعداد غیبت‌های یک دانشجو در یک ترم یک متغیر تصادفی با میانگین ۳ و انحراف معیار ۱ است هر کس بیش از ۴ جلسه غیبت کند محروم می‌شود. احتمال اینکه این دانشجو حداقل یک جلسه محروم شده است

x	y
-1	۵
0	۱
1	۱
۲	۴
۳	۳

صعودی

مساوی

Scanned by CamScanner