وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Subject
Date ۹۶/۷/۴ جلسه ۱

تابع:

حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌های A و B:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$$

تعریف: هر زیر مجموعه $A\times B$ را یک رابطه از A به B می‌نامند

مثال، $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{-2,7,8\}$

$$R_1=\{(1,7),(2,8),(-1,7)\}$$
$$R_2=\{(1,8),(2,-2),(1,-2)\}$$

تعریف تابع: رابطه‌ای که زوج مرتب آن مؤلفه اول یکسان نداشته باشند.

مثال، تابع بودن رابطه‌های زیر را بررسی کنید.

$f_1=\{(x,y)\mid xy=x^2+1 , x\in\mathbb{R}-\{0\}\}$ واضح است به ازای هر $x\neq 0$، $y=x+\frac{1}{x}$ یک و تنها یک جواب دست می‌آید.

$f_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2-4=0 , x\in[-2,4]\}$

$y^2=4-x^2 \rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2} \rightarrow$ اگر $x=0 \rightarrow y=\pm 2 \rightarrow f_2$ تابع نیست

$f_3=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1 , x\in[-1,1]\}$

$|y|=1-|x| \rightarrow y=\pm(1-|x|) \rightarrow$ اگر $x=0 \rightarrow y=\pm 1 \rightarrow f_3$ تابع نیست

$f_4=\{(x,y)\mid |x|+|y|=1 , x\in[-1,1], y\geq 0\}$

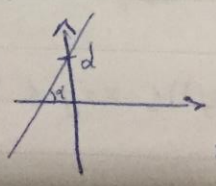
$y=\pm(1-|x|) \xrightarrow{y\geq 0} y=1-|x| \rightarrow f_4$ تابع هست

انواع توابع

۱. تابع خط

$y=mx+d$

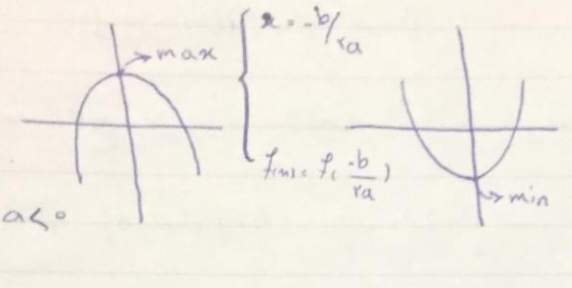
$y=ax+by+c , b\neq 0$



شیب خط $\tan\alpha=m$

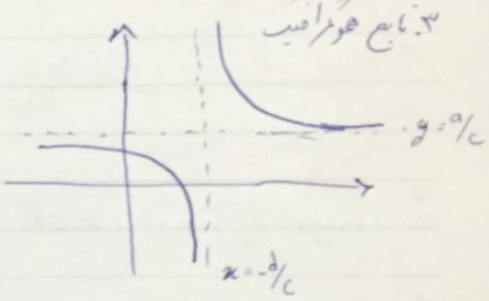
Subject
Date

۲- تابع درجه ۲ یعنی $y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$



۳- تابع هموگرافیک

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad D_y = \mathbb{R} - \{-d/c\}$



نزولی $(-\infty, -d/c)$
صعودی $(-d/c, +\infty)$

۴- تابع قدرمطلق $y = |x|$

خواص قدرمطلق :

۱) $|xy| = |x||y|$
۲) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad y \neq 0$
۳) $|x+y| \leq |x| + |y|$ نامساوی مثلث
۴) $|x| \leq a \quad -a \leq x \leq a$
۵) $|x| \geq a \quad x \leq -a \text{ یا } x \geq a$
۶) $|x| = a \quad x = \pm a$
۷) $-|x| \leq x \leq |x|$

اثبات نامساوی مثلث :

۱ و ۲ و ۵) $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$
$(|x| + |y|)^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \longrightarrow |x| + |y| \geq |x+y|$

از خاصیت ۴ و ۵ و ۷ $\quad -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

Subject
Date

تمرین: اثبات کنید.

۱) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

$|a| \leq |a-b|+|b|$

$|a-b+b| \leq |a-b|+|b|$ ← با جای‌گذاری $a-b$ به جای a

۲) $||a|-|b|| \leq |a-b|$

مثال: معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $|۳x-۱| = ۲$ $\quad ۳x-۱ = \pm ۲ \rightarrow x = ۱, -\frac{۱}{۳}$

ب) $|۳x-۱| = |x|$ $\quad ۳x-۱ = \pm x \rightarrow x = \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}$

ج) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ n زوج $\quad \sqrt[n]{x^n} = x$ n فرد

$D_{f \pm g} = D_f \cap D_g \qquad D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g=۰\}$

مثال: دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{۳x^۳+۲x^۲-x}}$$

$۳x^۳+۲x^۲-x > ۰$

$x(۳x^۲+۲x-۱) > ۰$

$x = ۰$ $\quad b = a+c \rightarrow x = -۱, \frac{۱}{۳}$

$x = -۱, -\frac{c}{a}$

	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	
x	$-$	$+$	$+$	
$۳x^۲+۲x-۱$	$+$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$D_f = (-۱, ۰) \cup (۰, \frac{۱}{۳})$

Subject
Date ۲ جلسه ۹۹/۹/۱۱

خانواده توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-1}{|x|-|x+1|-1}$

$|x|-|x+1|-1=0$

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$	ϕ	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$+$	ϕ	$+$	

$x\le -2 \rightarrow -x+x+2-1=0 \Rightarrow$ ✗

$-2<x\le 0 \rightarrow -x-x-2-1=0 \Rightarrow -2x=3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}\in[-2,0]$

$x>0 \rightarrow x-x-2-1=0 \Rightarrow$ ✗

$D_f=\mathbb{R}-\{-\frac{3}{2}\}$

ب) $g(x)=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-2}}+\sqrt{x+2|x-1|-4}$

g_1 $\qquad$ g_2

$D_g=D_{g_1}\cap D_{g_2}$

$D_{g_1}\rightarrow$

	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$(x+2)^2$		$+$	ϕ	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	ϕ	$+$	
g_1		$+$		$-$		$+$	

$D_{g_1}=(-\infty,-2]\cup(2,+\infty)$

$D_{g_2}\rightarrow x+2|x-1|-4$

$x\ge 1$: $x+2x-2-4\ge 0 \rightarrow x\ge \frac{6}{3}$

$x<1$: $x+2-2x-4<0 \rightarrow x>-2$ ✗

$x\le -2\cup x<1 \rightarrow x\le -2$ $\qquad D_{g_2}=(-\infty,-2]\cup[\frac{6}{3},+\infty)$

ج) $D_g=(-\infty,-2]\cup[\frac{6}{3},+\infty)$

$\tan=\mathbb{R}-\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$

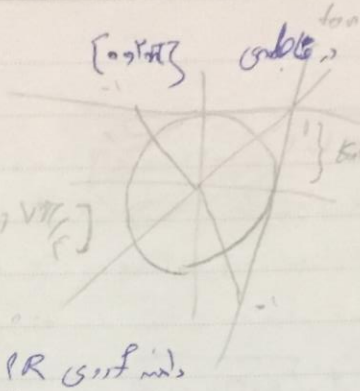
$\cot=\mathbb{R}-\{k\pi\}$

توابع مثلثاتی

Subject
Date

دامنه تابع زیر را بیابید

$f(x) = \sqrt{\cot x - \tan x}$



$(0, \frac{\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{5\pi}{4}]$

$\cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$

$(0, \frac{\pi}{4}] + k\frac{\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$ دامنه کلی $\mathbb{R}$

مثال: دامنه تابع زیر را بیابید

$f(x) = \sqrt{\cos x - \sin x}$

$D_f = [0, \frac{\pi}{4}] \cup [2\pi, \frac{9\pi}{4}]$

تابع جزء صحیح: اگر x یک عدد حقیقی باشد نزدیکترین عدد صحیح به x که از x کوچکتر یا مساوی باشد.

$n \le x < n+1 \Leftrightarrow [x] = n$

$n \in \mathbb{Z}$

$[x] \le x < [x]+1$

$x - 1 < [x] \le x$

$0 \le x - [x] < 1$

تابع دندانه‌ای

متناوب با دوره تناوب 1

مثال: $[(\sqrt{2}-1)^{10}] = 0$

$[(1-\sqrt{2})^{15}] = -1$

$\left[\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}}\right] = \left[\log_{2^{\frac{1}{2}}}^{5^{\frac{1}{2}}}\right] = \left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2^5\right] =$

$2 < \log_2^5 < \frac{5}{2}$

$4 < 2\log_2^5 < 5$

$\log_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = 4$

$\log_2^5 < \frac{3}{2}$

$\sqrt{2^3} = 2\sqrt{2}$

$\log_2^5 > 2$

$\frac{4}{2} < \log_2^5 < \frac{3}{2}$

PAPCO

Subject
Date

ترین،

$[\sin x] = \begin{cases} 0 & x \in \{0, \pi\} \\ 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

$[\tan x] =$

خواص جزء صحیح:

$[x+n] = [x] + n$ ثابت

$k \le x < k+1 \rightarrow n+k \le n+x < n+k+1$

$k \in \mathbb{Z}$

ب) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

ثابت $[-n] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

مثال: تساوی زیر را حل کنید

$[2x] = 3$

$3 \le 2x < 4$

$\frac{3}{2} \le x < 2$

$[x] \le [y] \leftarrow x \le y$

$[x] - [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

$[x+n] = [x] + n$ ثابت

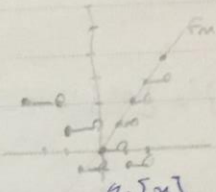
$x \in \mathbb{Z}, 2 \le x < 4$

Subject
Date

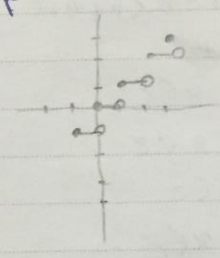
۱) $\left\{\frac{x-1}{x}\right\} = 1$

۲) $\left\{x/_{\mathfrak{F}}\right\} = x/_{\mathfrak{F}}$

۳) $\{x\} + \{\mathfrak{F}x\} = 0$



۴) $y = [x]$



$-1 \leq x < 0 \quad y = -1$

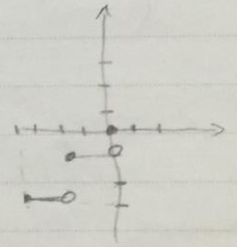
$0 \leq x < 1 \quad y = 0$

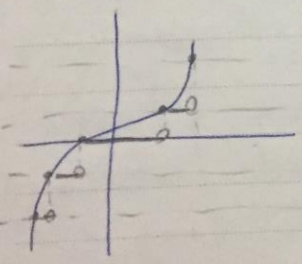
$1 \leq x < 2 \quad y = 1$

$2 \leq x < 3 \quad y = 2$

$x = 3 \quad y = 3$

۵) $y = [f(x)]$

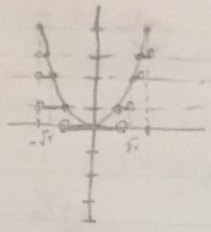




Subject
Date

مثال: $y=[x^2]$

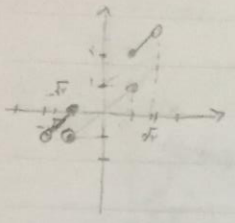
مثال: $y=x+[x^2]$



$-\sqrt{2}<x\leq -1 \rightarrow [x^2]=1 \rightarrow y=x+1$

$-1<x\leq 0 \rightarrow [x^2]=0 \rightarrow y=x$

$1\leq x<\sqrt{2} \rightarrow [x^2]=1 \rightarrow y=x+1$



تمرین: نمودارهای زیر را حل کنید.

$y=[2x]$ $y=[\sin x]$ $y=x-[x]$ $y=[\sqrt{x}]$

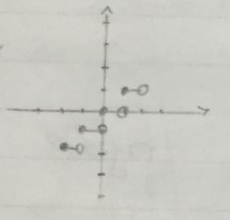
$y=[2x]$

$-2\leq x<-1$ $y=-2$

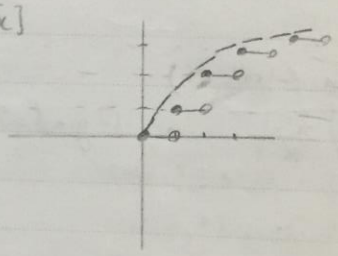
$-1\leq x<0$ $y=-1$

$0\leq x<1$ $y=0$

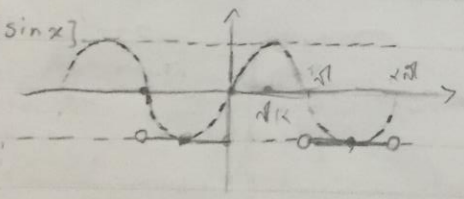
$1\leq x<2$ $y=1$



$y=[\sqrt{x}]$



$y=[\sin x]$



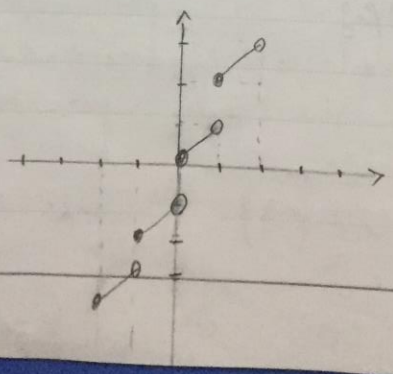
$y=x-[x]$

$-2\leq x<-1$ $y=x-2$

$-1\leq x<0$ $y=x-1$

$0\leq x<1$ $y=x$

$1\leq x<2$ $y=x+1$



PdPCO

Subject
Date

$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x)) = f\circ g(x)$ ترکیب توابع

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

مثال: $f = \frac{1+x^2}{1-x^2}$, $g = \sqrt{x-x^2}$ $D_{f\circ g} = ?$

$x - x^2 \geq 0$

$x(1-x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow D_{f\circ g} = [0,1]$

$1 - x^2 \neq 0$

$x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1$

$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ $f\circ g = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

$f\circ g = \frac{1+(x-x^2)}{1-(x^2-x)}$ $\begin{cases} x - x^2 \geq 0 \\ 1 - x + x^2 \neq 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\cap} [0,1]$

$\Delta < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ $A \cap B = [0,1]$

تمرین: در مثال بالا $D_{g\circ f} = ?$

$g = \ln(|x| - 2)$

$f = \sqrt{\frac{x^2-1}{x-4}}$, $D_{g\circ f} = ?$

$D_f = \{-1, 1\} \cup [4, +\infty)$

$\hookrightarrow = 0$

$D_g = (0, 1]$

$D_{g\circ f} = [0, 1)$

$f = \sqrt{x + |x|}$ $D_{f\circ g} = ?$

$g = \frac{1}{x^2 - 4x}$ $D_f : |x| \geq -x \rightarrow \mathbb{R}$

$x + |x| \geq 0$

$x + |x| - 4\sqrt{x+|x|} \neq 0$

$g\circ f = \frac{1}{x+|x|-4\sqrt{(x+|x|)}} = \frac{1}{\cdots}$

$\begin{cases} x \geq 0 & 2x - 4\sqrt{2x} = 0 \rightarrow x = 2\sqrt{2x} \\ & x^2 - 8x \Rightarrow x = 0 \\ & x = 8 \\ x < 0 & 0 \end{cases}$

$D_{g\circ f} = \mathbb{R} - \{(-\infty, 0] \cup [8]\}$

Subject
Date

مفهوم ثابت ؟ — اتحاد ترکیب

مرین: اگر $Df=[-3,+\infty)$ آنگاه $Df.g$ را بیابید.

$g(x)=-\sqrt{4x+x^2}$

$x(x+4)\geq 0$

	-4		0	
	$+$	0	$-$	0

$Dg=(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$

$Df.g=\{x\in Dg \mid g(x)\in Df\}$

$Df.g=[0,+\infty)$

تابع زوج و فرد: فرض کنید تابع f متقارن باشد

f فرد است: $f(-x)=-f(x)$ — نسبت به مبدا

f زوج است: $f(-x)=f(x)$ — نسبت به محور yها

مثال: $f(x)=cx^{2k-1}$ $k\in\mathbb{Z}$

مثال: $f(x)=cx^{2k}$ $\begin{cases}k\in\mathbb{Z}\\ c\in\mathbb{R}\end{cases}$

$f(x)=\sin(x)$

$f(x)=\cos x$

$f(x)=\operatorname{sign}(x)$

$f(x)=|x|$

$f(x)=\lg|x|$ در حالت کلی فرض

f متقارن است (حتی تابع ثابت هم زوج فرض کنید)

هر xای که جای xها بیش $f(|x|)$ ↓

$|x|$ یا x^{2k} بگذاریم زوج می‌شود

مثال: f زوج یا فرد؟

۱) $f(x)=\lg_a(x+\sqrt{x^2+1})$

$f(-x)=\lg_a(-x+\sqrt{x^2+1})$

ضرب و تقسیم در مزدوج $=\lg_a\frac{x^2+1-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lg_a(x+\sqrt{x^2+1})^{-1}$

$=-\lg_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$ ← فرد

۲) $f(x)=\underbrace{x}_{\text{فرد}}\underbrace{\operatorname{sign}x}_{\text{فرد}}$ ← فرد × فرد ← زوج

$=\begin{cases}x\times 1 & x>0\\ x\times 0 & x=0\\ x\times(-1) & x<0\end{cases}=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

زوج

۹

Subject
Date

$[x] = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ -[x]-1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

۲) $f(x) = \log\left(\frac{x^2+x}{x^2-x}\right)$

$f(-x) = \log\left(\frac{x^2-x}{x^2+x}\right)^{-1} = -\log\frac{x^2+x}{x^2-x} \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ فرد

۳) $f(x) = \frac{\tan(\pi(x-[x]))}{[x]-[-x]}$

مثال: زوج یا فرد؟ $x \in \mathbb{Z}$ $\tan(\pi(-x+x)) = 0$

$f(x) = \frac{\tan(\pi(-x-[-x]))}{[-x]-[x]} = \begin{cases} \frac{\tan(\pi(-x-(-[x]-1)))}{-([-x]-[x])} & x \notin \mathbb{Z} \\ \frac{0}{1-(x-[x])} & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\tan(\pi x - x) = -\tan x$

$= \frac{-\tan(\pi(x-[x]))}{-([x]-[x])} = f(x)$ زوج

$f(x) = \frac{x(e^x-1)}{e^{2x}+1}$ $\quad f(-x) = \frac{-x(e^{-x}-1)e^x}{e^{-2x}+1} = \frac{-x(1-e^x)}{1+e^{2x}} = \frac{x(e^x-1)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$ زوج

۵) چنان تعیین کنید تا تابع زیر فرد باشد.

$f(x) = \log\left(ax + \sqrt{4x^2+1}\right)$

$f(-x) = \log\left(-ax + \sqrt{4x^2+1}\right) = \log($

جلسه ۴ ۹۴/۷/۲۵

تمرین: توابع f را طوری بیابید که بتوان به صورت توابع نوشت که یکی زوج و یکی فرد باشد.

$g_1(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ زوج

$g_2(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ فرد

مثال: اگر f زوج و g فرد باشد

$f(x) + g(x) = [x] + x^2$

توابع f, g را بیابید. $f(x) = \frac{[x]+[-x]+x^2+x^{-2}}{2}$, $g(x) = \frac{[x]+x^2-([-x]+x^{-2})}{2}$

PdPCO

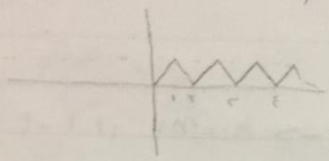
#1

Subject
Date

توابع متناوب: f را متناوب گوییم هرگاه $\exists T>0, \forall x \in D_f : f(x+T)=f(x)$

شرط: $\forall x \in D_f : x+T \in D_f$

$\min T$ کوچکترین دوره تناوب که دوره تناوب اصلی است



$\rightarrow T=$

$\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ $\rightarrow$ $T_{\text{اصلی}} = \frac{2\pi}{|\alpha|}$

$\tan \alpha x$, $\cot \alpha x$ $\rightarrow$ $T = \frac{\pi}{|\alpha|}$

مثال: دوره تناوب $\tan x$ برابر π است. چرا؟

$f(x)=\tan x$

$f(x+T)=f(x)$

$\tan(x+T)=\tan(x) \rightarrow x+T=x+k\pi \rightarrow T=k\pi \rightarrow T_{min}=\pi$

مثال: دوره تناوب $|\sin x|$ چند است؟

$|\sin x| = \sqrt{\sin^2 x} = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} \rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi$

تمرین: دوره تناوب $|\cos x|$ چند است؟

مثال: دوره تناوب $f(x)=3x-[3x]$ چند است؟

$f(x)=f(x+T)$

$3x-[3x]=3(x+T)-[3(x+T)]$

$3x-[3x]=3x+3T-[3x+3T]$

$0=3T-[3x+3T]+[3x]$

$3T=[3x+3T]-[3x] \Rightarrow 3T \in \mathbb{Z}$

$3T \in \mathbb{Z}$ (min) $\rightarrow 3T=1 \rightarrow T=\frac{1}{3}$

آزاد است، پس $T=1 \rightarrow T=1$

Subject
Date

$f(x)=ax$ -[ax]

تمرین: دوره تناوب اصلی تابع زیر را بیابید.
(a: ثابت دلخواه غیر صفر)
راهنمایی: $T=\frac{1}{a}$

تابع ۱-۱: $f(x_1)=f(x_2) \rightarrow x_1=x_2$ ⇐ تابع f یک به یک است

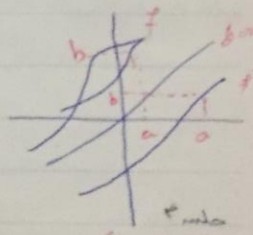
نکته: اگر f اکیداً یکنوا باشد آنگاه f یک به یک است.

نکته: f یک به یک است
$f'>0 \rightarrow$ f یک به یک است
$f'<0 \rightarrow$ f یک به یک است

مثال: ۱-۱ بودن f را بررسی کنید.
$f(x)=x^5+2x^3+x$
$f'(x)=5x^4+6x^2+1>0 \rightarrow$ ۱-۱ ✓

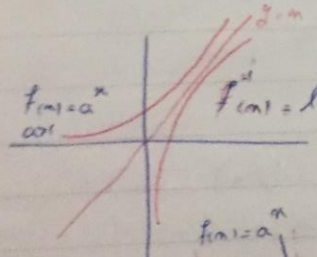
نکته: اگر f یک به یک باشد، f وارون پذیر است (یعنی f^{-1} تابع است)

$y=f(x)$
$f^{-1}(f(x))=x \rightarrow f^{-1}\circ f=I \quad Df \rightarrow Df$
$f(f^{-1}(y))=y \rightarrow f\circ f^{-1}=I \quad Rf \rightarrow Rf$



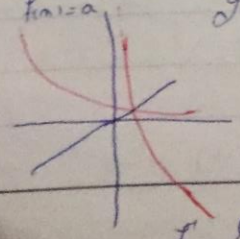
۹۹، ۸، ۱

تابع نمایی و خطوط آن



معرفی f, f^{-1}

$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$



$\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{x}\,dx$

$f=\ln_a^x \quad Df^{-1}=R$

Subject
Date

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ $\quad \log_a^x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ خواص لگاریتم

$\log \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_{y^a}^{x^b} = \frac{b}{a} \log_y^x$ $\quad$ $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

مثال دامنه تابع زیر را بیابید.

$\ln \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (\log_2^{2x})}$

$\begin{cases} \log_2^{2x} > 0 \Rightarrow \log_2^{2x} > \log_2^1 \to 2x > 1 \quad \log_2^{2x} < 1 \\ \qquad \hookrightarrow x > \frac{1}{2} \qquad 2x < 2 \\ \log_{\frac{1}{2}} (\log_2^{2x}) > 0 \qquad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

حل: معادله‌های زیر را حل کنید.

$e^{2x} + 2e^x - 15 = 0 \quad e^x = t$

$t^2 + 2t - 15 = 0$

$(t+5)(t-3) = 0 \begin{cases} t = -5 \to e^x = -5 \\ t = 3 \Rightarrow e^x = 3 \to x = \ln 3 \end{cases}$

$\log_5 x^2 - 1 - 2 \log_{25}^{2x} = 1$

$\log_5 x^2 - 1 - \frac{2}{2} \log_5^{2x} = 1$

$\log_5 \frac{x^2-1}{2x} = 1 \to 5 = \frac{x^2-1}{2x} \to 10x = x^2 - 1$

$x^2 - 10x - 1 = 0$

$x = \frac{10 \pm \sqrt{104}}{2}$ $\quad \not{x} \to x = \frac{10 + \sqrt{104}}{2}$

Subject
Date

$\log_y x = z \Rightarrow x = y^z$

$3\sqrt{\ln x} + 2\ln\sqrt{\frac{1}{x}} - 2 = 0$

$\frac{3}{2}\ln x - 2\ln x - 2 = 0$

$-\frac{1}{2}\ln x = 2 \to \ln x = -4$

$2\sqrt{\ln x} + 2\ln x^{-1/2} - 2 = 0 \quad \ln x = t^2$

$2\sqrt{\ln x} - 2\ln x - 2 = 0$

$2t - t^2 - 2 = 0$

$\log(x-2) - 2\log 2 = \log\left(\frac{1}{x-4}\right)$

$\log(x-2) - \log 2^2 = -\log(x-4)$

$\log(x-2)(x-4) = \log 2^2$

$x^2 - 6x + 8 = 4$

$x^2 - 6x + 4 = 0$

$\Delta = 20 \quad x = \begin{cases} x_1 = \frac{6+2\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$\log_x(x-1) \geq \log_x(5-x)$

$\left(\begin{cases} x>1 \\ x-1 \geq 5-x \end{cases} \cup \begin{cases} 0<x<1 \\ x-1 \leq 5-x \end{cases}\right) \cap \left(\begin{cases} x-1>0 \\ 5-x>0 \end{cases}\right)$

$\left(\begin{cases} x>1 \\ x \geq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} 0<x<1 \\ x \leq 3 \end{cases}\right) \cap \{1<x<5\} \Rightarrow 3 \leq x < 5$

غرین: $\log_4 \log_2 \log_3(2x-1) = \frac{1}{2}$

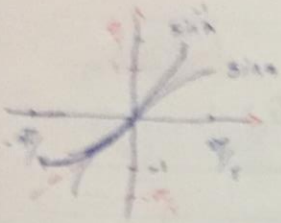
$\log_2 \log_3(2x-1) = 2$

$\log_3(2x-1) = 4$

$3^4 = 2x-1$

$2x = 80 \to x = 40$

مثال: نامعادله زیر را حل کنید.



$\sin^{-1}x$

$\sin x$

1

$-\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}$

-1

$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ ← 1-1

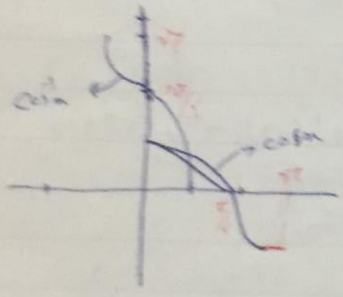
$\sin^{-1} x : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin\alpha = b \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} b$

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$

$\sin^{-1}(\sin x) = x \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

$\sin(\sin^{-1} x) = x \quad -1 \le x \le 1$



$\cos^{-1}x$

π

$\frac{\pi}{2}$

$\cos x$

1

$\cos x : [0, \pi] \to [-1,1]$ ← 1-1

$\cos^{-1} x : [-1,1] \to [0,\pi]$

$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad 0 \le x \le \pi$

$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad -1 \le x \le 1$

$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

$\pi - y = \cos^{-1} x$: ثابت کنید

$y = \pi - \cos^{-1} x$

$0 \le y \le \pi$

$-x = \cos y$

$x = -\cos y$

$= \cos(\pi - y)$

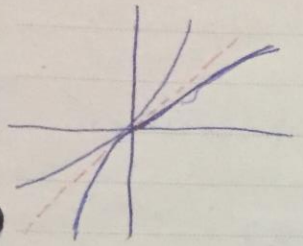
$0 \le \pi - y \le \pi$

Subject
Date

$\sin(-\sin^{-1}(-1) + \cos^{-1}(-\sqrt{2}/2)) = \sin(-\sin^{-1}(1) + \pi - \cos^{-1}(\sqrt{2}/2))$

$= \sin(-\pi/2 + \pi - \pi/4) = \sqrt{2}/2$

$\tan^{-1}$



$1\text{-}1 \leftarrow \tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$

$\tan^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$

$\tan^{-1}(\tan x) = x$

$\tan(\tan^{-1}) = x$

$\cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ $\quad -\pi/4 < x < \pi/2$

$\cot^{-1} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$1\text{-}1 \leftarrow \cot x : (0, \pi) \to \mathbb{R}$

$\cot^{-1} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}(x)$

$\tan^{-1}($

؟ $y = \sin^{-1}(\sqrt{x/4 - 1 + 1/2})$

$0 \leq \sqrt{x/4 - 1 + 1/2} \leq 1$

$1/2 \leq \sqrt{x/4} \leq 3/2$

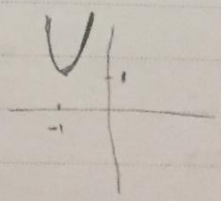
$1/4 \leq x/4 \leq 9/4 \to 1 \leq x/4 \leq 3/2 \to 4 \leq x \leq 12$

؟ نزن دامنه

$y = \tan^{-1}(x^2 + 2x + 2)$

$f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 + 1$

$\min \leftarrow (-1, 1)$



$Rf = [1, +\infty)$

$\hookrightarrow \tan^{-1}[1, +\infty) = [\pi/4, \pi/2)$

Subject
Date

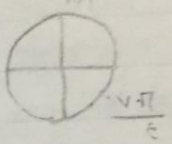
مثال: دامنه تابع $y = 2\cos^{-1}\left(\frac{2x+11}{x+4}\right)$

$-1 \le \frac{2x+11}{x+4} \le 1$

۹۹،۸،۹

حل: حاصل زیر را حساب کنید.

$\sin^{-1}\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$



$1 + \tan^{-1}(\tan 4) = 1 + \tan^{-1}(4 - \pi)$

$= 1 + 4 - \pi = 5 - \pi$



$\sin^{-1}(\sin 4) = \sin^{-1}(\sin(\pi - 4))$

$= \pi - 4$

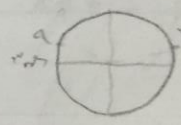


$\cos^{-1}\left(\cos\frac{9\pi}{4}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$

تمرین:

$\sin^{-1}(\sin 9) = \sin^{-1}(\sin(3\pi - 9))$

$\sin^{-1}(\sin(3\pi - 9)) = 3\pi - 9$



تمرین: ثابت کنید $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ ، $-1 \le x \le 1$

$\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x$

$\sin(\sin^{-1}x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}x\right)$

$x = \cos(\cos^{-1}x) = x$ ✓

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x$

$\tan(\tan^{-1}x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x\right)$

$x = \cot(\cot^{-1}x) = x$ ✓

۱۸

Subject
Date

$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$ $\quad x>0$

$\alpha = \tan^{-1}x \to \tan\alpha = x$

$\cot^{-1}\frac{1}{x} = \alpha \to \cot(\frac{1}{x}) = \alpha$

$\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \pi$, $\quad x<0$

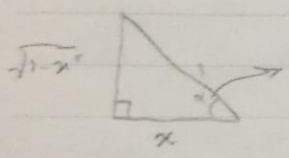
$x<0 \to -x>0 \xrightarrow{\text{طرفین}} \tan^{-1}(-x) = \cot^{-1}(\frac{1}{-x}) \to -\tan^{-1}x = \pi - \cot^{-1}(\frac{1}{x})$

$\to \tan^{-1}x = \cot^{-1}(\frac{1}{x}) - \pi$

$\beta = -x$

؟ $\sin(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad -1 \le x \le 1$

$\cos^{-1}x = \alpha \to x = \cos\alpha$, $x>0$



$\sin\alpha = \sqrt{1-x^2}$

$x<0$ $\sin(\cos^{-1}\beta) = \sqrt{1-\beta^2}$

$\sin(\cos^{-1}(-x)) = \sqrt{1-x^2}$

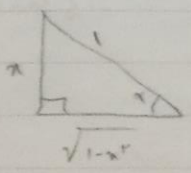
$\sin(\pi - \cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\sin(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$

$\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$ $\quad |x| \le 1$

$\tan(\sin^{-1}x) = ?$

$\sin^{-1}x = \alpha \to x = \sin\alpha$



$x>0$

$\tan\alpha = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad \tan(\sin^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x>0$

$x<0$: چون در این عبارت بالا فرض شده برای xهای منفی برقرار است

Subject
Date

توابع هذلولوی (هایپربولیک):

$$e^x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

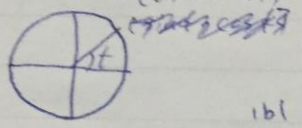
$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

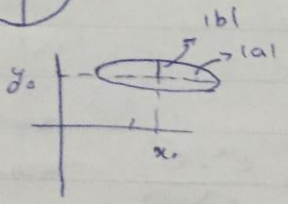
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

مثال: اثبات کنید.

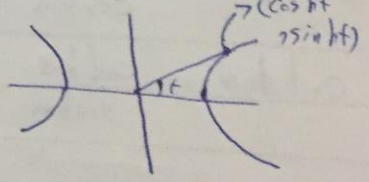
$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \qquad t\in[0,2\pi)$$

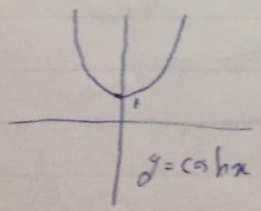


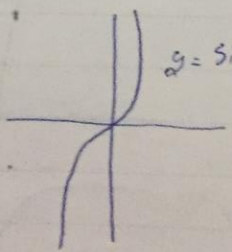
$$\begin{cases} x=a\cos t + x_0 \\ y=b\sin t + y_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sinh t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R} \qquad x^2-y^2=1$$







Subject
Date

تمرین: اتحادهای زیر را اثبات کنید.

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1$

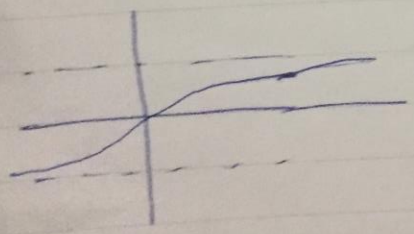
$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

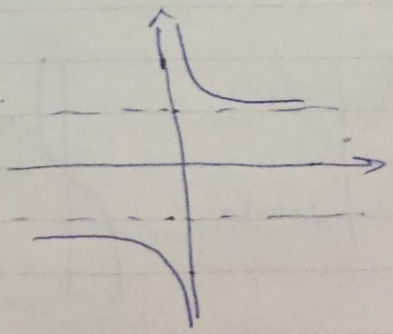
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\coth x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$x \to \infty \quad \tanh x = 1$

$x \to -\infty \quad \tanh x = -1$





P4PCO

Subject
Date

۹۴/۸/۱۴

معکوس توابع هایپربولیک

$y = \sinh x$ تابعی یک‌به‌یک $\Rightarrow$ معکوس پذیر $\Rightarrow \cosh x > 0 \Rightarrow$ تابع $\sinh^{-1} x$:

تابع $y = \sinh^{-1} x \to x \in R$
$y \in R$

$x = \sinh y \qquad x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$\xrightarrow{\times 2e^y} 2xe^y = e^{2y} - 1$

$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0$

$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

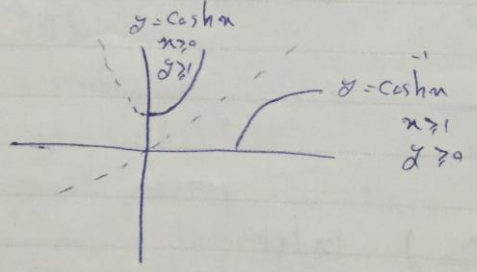
$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$ ✓

$e^y = x - \sqrt{x^2+1}$ قابل قبول نیست

$x - \sqrt{x^2+1} < 0$

$\to y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad x \in R$

$\cosh^{-1} x$:



تابع $y = \cosh^{-1} x \quad x \geq 1 \quad y \geq 0$

$x = \cosh y$

$x = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

$\xrightarrow{\times 2e^y} 2xe^y = e^{2y} + 1$

$(e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$

$z = e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2}$

$e^y = x \pm \sqrt{x^2-1}$ $\xrightarrow{y \geq 0}$ $e^y \geq e^0 = 1$

$x - \sqrt{x^2-1} < 1$

$x - 1 < \sqrt{x^2-1}$

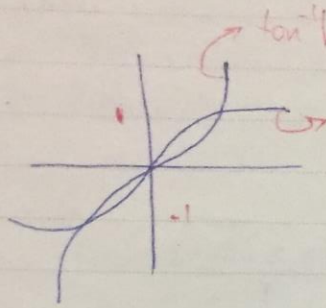
$x^2 - 2x + 1 < x^2 - 1$

$-2x < -2$

$x > 1$

Subject
Date

$e^y = x + \sqrt{x^2-1}$ | $y = \ln(x+\sqrt{x^2-1}),\ x \geq 1$



$\tanh^{-1} x$: $x \in (-1,1)$, $y \in \mathbb{R}$

$\tanh x$ ↪ $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-1,1)$

اثبات $\tanh^{-1} x$

$y = \tanh^{-1} x$

$x = \tanh^{-1} y$

$x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\times e^x \rightarrow x = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$

$x + x e^{2y} = e^{2y} - 1$

$e^{2y}(1-x) = 1+x$

$e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$\xrightarrow{\ln} 2y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad |x|<1$$

$x \in \mathbb{C}$

$y = \coth^{-1} x \quad |x|>1$

$x = \coth y$

$x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad -x = \dfrac{e^{2y}+1}{e^{2y}-1}$

$xe^{2y} - e^{2y} = x+1$

$e^{2y} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$2y = \ln\dfrac{x+1}{x-1}$

$y = \frac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

تمرین: بازنویسی

Subject
Date

ضابطه معکوس تابع زیر را بیابید.

$y = \log_a (x + \sqrt{x^2+1})$ $\quad a>0,\ a\neq 1$

$a^y = x + \sqrt{x^2+1}$

$\longrightarrow a^x = y + \sqrt{y^2+1}$

$a^x - y = \sqrt{y^2+1}$

$a^{2x} + y^2 - 2a^x y = y^2 + 1$

$y = \dfrac{a^{2x}-1}{2a^x} \longrightarrow y = \dfrac{\frac{a^{2x}}{a^x} - \frac{1}{a^x}}{2}$

$y = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2} \longrightarrow y = \dfrac{e^{x\ln a} - e^{-x\ln a}}{2} = \sinh(x\ln a)$

$y = \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\ln a}$

$z = y\ln a = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$x = \sinh z$

$= \sinh(y\ln a)$

$\therefore \quad y = \sinh(x\ln a)$

تمرین) ضابطه تابع معکوس زیر

$y = \frac{1}{2}\log_a \dfrac{1+x}{1-x}, \quad |x|<1$

$x = \frac{1}{2}\log_a \frac{1+y}{1-y} \longrightarrow a^{2x} - a^{2x}y = 1+y$

$2x = \log_a \frac{1+y}{1-y}$ $\qquad y(a^{2x}+1) = a^{2x} - 1$

$y = \dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

Subject
Date

۲۶/۸/۳۲

$x^2+1=0$ — اعداد مختلف

$x^2=-1 \equiv x\cdot x=-1$

تعریف ضرب: $(a_1,a_2).(b_1,b_2)=(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)$

خواص:

۱) $(a_1,a_2).(b_1,b_2)=(b_1,b_2).(a_1,a_2)$

۲) توزیع‌پذیری: $(a_1,a_2)\big((b_1,b_2)+(c_1,c_2)\big)=(a_1,a_2)(b_1,b_2)+(a_1,a_2)(c_1,c_2)$

عضو خنثی: $(a,b)(1,0)=(a,b)$

مثال: $(a,0)(b,0)=(ab,0)$

$a \quad b \quad ab$

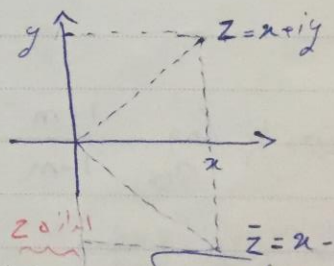
$(0,1)(0,1)=(-1,0)$

$\boxed{(0,1)=i}$

$Z=(a,b)=a(1,0)+b(0,1)$

$=a+ib$

$Re\,z$ ← قسمت حقیقی ، $Im\,z$ → قسمت موهومی



نرم Z ← طول Z تا مبدأ: $|Z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$Z=x+0i$

$|Z|=\sqrt{x^2+0}=|x|$

$|\bar{Z}|=|Z|$

$|Z|^2=|Z\bar{Z}|$

$|Z^n|=|Z|^n$ ← حقیقی غیر منفی حول مبدأ $=\sqrt{Z\bar{Z}}$

$|Z_1||Z_2|=|Z_1Z_2|$

Subject
Date

خواص اندازه:

۱) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

۲) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

تمرین: ۲ را اثبات کنید توان ۲

مثال: $i^2 = -1$

$$\frac{3-i}{4+i} = \frac{3-i}{4+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{6-3i-2i-1}{4+i^2}$$

$$= 1 - i$$

$i^n = ?$ $\quad i^2 = -1$ $\quad i^3 = (i^2)i = -i$ $\quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

مثال:

① $\left(\frac{i+1}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$ $\quad = \frac{-1+2i+1}{1-i-i-1} + \frac{1}{x+iy} = 1+i$

$$\frac{2i}{-2i} + \frac{1}{x+iy} = 1+i \quad (2i \to -1)$$

$$\frac{1}{x+iy} = i+2 \to (i+2)(x+iy) = 1 \to ix - y + 2x + 2iy = 1$$

$$x(i+2) - y(1-2i) + 1$$

$$\frac{i+1}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(i+1)^2}{1+1} = \frac{1+i^2+2i}{2} = i \quad (i^2 \to -1)$$

① $(i)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i \to \frac{1}{x+iy} = 2+i$ $\quad x+iy = \frac{1}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{2-i}{4+1}$

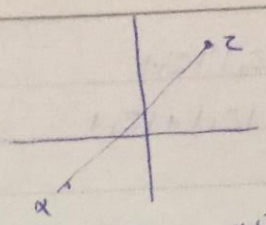
$= 2/5 - i/5$

$x = 2/5$
$y = -1/5$

PdPCO

Subject
Date

نکته:



مثال: ① $|z|=1$ دایره به مرکز $(0,0)$ و شعاع 1

② $|z-\alpha|=R$ دایره‌ای به مرکز α و شعاع R

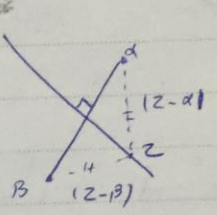
۳) $|2x-3iy|=2 \quad \sqrt{4x^2+9y^2}=2 \quad 4x^2+9y^2=4$

$x^2+\frac{9}{4}y^2=1$ → بیضی

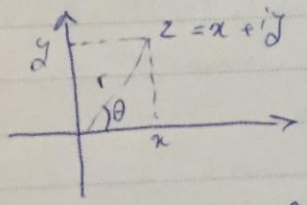
۴) $\alpha=2+3i \quad \beta=-3i$

$|z-2+3i|=|z+3i| \Rightarrow$ عمودمنصف $\alpha\beta$

$|z-\alpha|=|z-\beta|$



عمودمنصف $\alpha\beta$



فرم قطبی اعداد مختلط:

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$

فرمول اویلر $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$z=re^{i\theta}$

$r=$ اندازه z

$\theta=$ آرگومان z, $\theta\in[0,2\pi)$

Subject
Date

قضیه دمورآور:

(الف) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(ب) $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$z_1/z_2 = r_1/r_2\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

جلسه ۹۸/۱/۲۵

مثال: اگر $z_1 = 1+i$, $z_2 = \sqrt{3}-i$ حاصل $z_1 z_2$ و z_1/z_2 و $(z_1 z_2)^4$ را حساب کنید (فرم قطبی)

$z_1 = 1+i$ $\quad |z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\theta_1 = \tan^{-1}(1/1) = \tan^{-1}(1) = \pi/4 = \theta_1$

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$z_2 = \sqrt{3} - i$ $\quad |z_2| = \sqrt{3+1} = 2$

$\theta_2 = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) = \tan^{-1}(\sqrt{3}/3) = -\pi/6$

$z_2 \to$ ربع چهارم

$z_2 = 2\, e^{-i\pi/6}$

$$z_1/z_2 = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\pi/4}}{2\, e^{-i\pi/6}} = \sqrt{2}/2\, e^{i(\pi/4+\pi/6)}$$

$z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4-\pi/6)} = 2\sqrt{2}\, e^{i(\pi/12)}$

$(z_1 z_2)^{12} = (2\sqrt{2})^{12} e^{i(\pi/12)^{12}} = (2\sqrt{2})^{12} e^{i\pi}$

$\cos\pi - i\sin\pi = -1$

$(z_1 z_2)^{12} = (2\sqrt{2})^{12}(-1) = -2^6$

مثال: ثابت کنید $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \xrightarrow{n=3} (\cos\theta+i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

$\cos^3\theta - i\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta\, i - 3\sin^2\theta\cos\theta = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$

(1) (2)

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

Subject
Date

تمرین:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\sqrt{3}\right)^{40},\quad \left(\frac{1}{i-1}\right)^{10},\quad \left(\frac{10+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{200}$$

ریشه‌های nام یک عدد مختلط:

$$z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = (re^{i(\theta+2k\pi)})^{1/n} = r^{1/n}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

$k=0 \Rightarrow \theta/n$ $\quad k=1 \Rightarrow \theta/n + 2\pi/n$ $\quad k=2 \Rightarrow \theta/n + 4\pi/n = \frac{\theta+4\pi}{n}$ $\quad \ldots$

نکته: هر عدد مختلط z دارای n ریشه nام است که به فواصل مساوی روی دایره‌ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع $|z|^{1/n}$ قرار دارند.

مثال: $\sqrt[3]{1}$

$$1 = e^{i2\pi}$$

$k=0 \Rightarrow e^{i0}$

$k=1 \Rightarrow e^{i2\pi/3}$

$k=2 \Rightarrow e^{i4\pi/3}$

ریشه‌های سوم عدد ۱

مثال:

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16}\, e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

$k = 0, 1, 2, 3$

$k=0 \Rightarrow 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=1 \Rightarrow 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$k=2 \Rightarrow 2e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$k=3 \Rightarrow 2e^{i\frac{7\pi}{4}}$

مثال: معادله $z^3(i+1) - (i-1) = 0$ را حل کنید.

$$z^3(i+1) - (i-1) = 0$$

$$z^3 = \frac{i-1}{i+1}$$

$$z = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1+1}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{1+1}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}} = \sqrt[3]{e^{i\pi/2}} = e^{i\frac{\pi/2+2k\pi}{3}}$$

$k=0 \Rightarrow e^{i\pi/6}$

$k=1 \Rightarrow e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$k=2 \Rightarrow e^{i\frac{9\pi}{6}}$

Subject: Date:

$z^6 + 5z^3 + 6 = 0$

$(z^3)^2 + 5z^3 + 6 = 0$

$(z^3 + 2)(z^3 + 3) = 0$

$z^3 = -2 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-2}$ ①

$z^3 = -3 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-3}$

$\sqrt[3]{-2} = \sqrt[3]{2e^{i\pi}} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}}$

$k = 0, 1, 2$

$z = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$

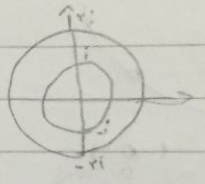
$z = \sqrt[3]{2}\, e^{i\pi}$

$z = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$

① $z = \sqrt{-1} = \sqrt{1}\, e^{i\pi} = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{2}}$

$k = 0 \rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}}$

$k = 1 \rightarrow e^{i\frac{3\pi}{2}}$



نکته $\sqrt{-1} = \pm i$

این عبارت های زیر ساده کنید. (فرم قطبی بنویسید)

۱) $(1 + i\sqrt{3})(1 + i)(\cos\theta + i\sin\theta)$

۲) $\sin\theta + i\cos\theta$

۳) $\dfrac{(1 - i\sqrt{3})(\cos\theta + i\sin\theta)}{2(1 - i)(\cos\theta - i\sin\theta)}$

جلسه 99/9/4

۱) $(2e^{i(\pi/4)})(\sqrt{3}e^{i(\frac{\pi}{2})})(e^{i\theta}) = 2\sqrt{3}\, e^{i(\frac{7\pi}{12} + \theta)}$

۲) $= e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$

۳) $= \dfrac{(2e^{i(-\frac{\pi}{4})})(e^{i\theta})}{(2\sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)})(e^{i\theta})} = \sqrt{2}/2\, e^{i(2\theta - \frac{7\pi}{12})}$

$z + 1/z = 2\cos\theta$ ثابت کنید $\Rightarrow z^m + \dfrac{1}{z^m} = 2\cos m\theta$

$\times z \rightarrow z^2 + 1 = 2z\cos\theta$

$z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4$ $\quad z = \dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$

Subject: Date:

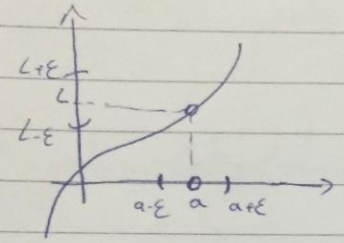
$z^m = e^{im\theta}$

$z = e^{\theta} \Rightarrow \begin{cases} z^m = e^{im\theta} \\ z^{-m} = e^{im\theta} \end{cases} \Rightarrow z^m + z^{-m} = e^{im\theta} + e^{-im\theta}$

$= \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta$

$= 2\cos\theta$

$z = e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} z^m = e^{-im\theta} \\ z^{-m} = e^{im\theta} \end{cases}$



حد:

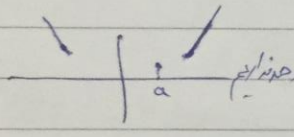
$\lim_{x \to a} f(x) = L$

به زبان ε-δ:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon\right)$

به زبان همسایگی ←

اگر به نقطه‌ای برای تابع f بتوان هیچ عددی در نظر گرفت



مثال:

$\lim_{x \to k} [x]$

$k \in N$

$\lim_{x \to k^+} \{k^+\} = k$

$\lim_{x \to k^-} \{k^-\} = k-1$

$\Rightarrow k \neq k-1$

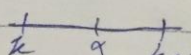
$x = k$

f صعودی

مثال:

$\lim_{x \to \alpha} [x] = k \quad k < \alpha < k+1$

α صحیح نیست



نهال
NAHAL

Subject
Date

حدهای زیر را بررسی کنید.

$\lim_{x \to \pi/2} \sqrt{\sin x - 1}$ → حد قابل گفتن نیست

$D_f = \{2k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$

↓ دامنه ثابت است

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$

$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x)-2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{[x]-2} = \frac{1}{1-2} = -1$

$D_f = \mathbb{R} - [2,3)$

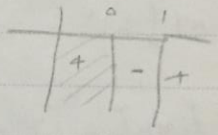
$\lim_{x \to 0} \sqrt{x - \sqrt{x}}^{x>0}$

$x - \sqrt{x} > 0$

$x > \sqrt{x}$

$x^2 > x$

$x(x-1) > 0$



$\to D_f = [0,1) \cup (1,+\infty)$

↓ دقط نباست

حد قابل گفتن نیست

$\lim_{x \to 0} \frac{x+1}{[x]-2}$

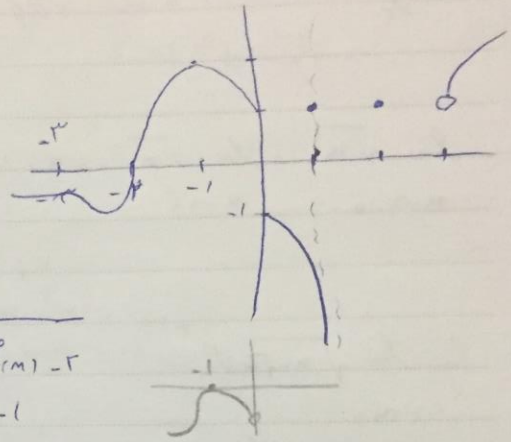
$\lim_{x \to 2} \sqrt{-x^2+4x-4}$

تمرین: بررسی کنید.

PARCO

Subject
Date

با توجه به نمودار f حدهای زیر را بررسی کنید.



$\lim_{x \to ۲} f(x)$ = حد قابل بیان نیست

$\lim_{x \to ۱} |f(x)| = |-\infty| = \infty$

$\lim_{x \to ۳} [f(x)] = ۱$

$\lim_{x \to -۱} [f(x)] = ۱$

$\lim_{x \to ۲^+} [f(x)] = [-(۱)^+] = -۲$

$\lim_{x \to -۱} \sqrt{f(x)-۲}$

حد قابل بیان نیست

تنها ۱-

$\lim_{x \to a} f_۱(x) = L_۱$, $\lim_{x \to a} f_۲(x) = L_۲$

$\lim f_۱ \overset{\div}{\times} f_۲ = L_۱ \overset{\div}{\times} L_۲$ ($\div$ وقتی $L_۲ \neq ۰$)

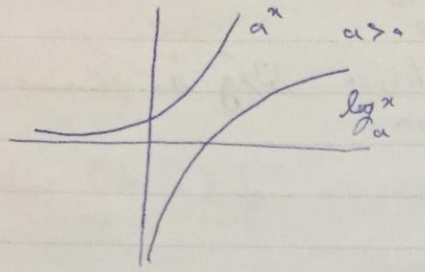
$\lim \sqrt[n]{f_۱(x)} = \sqrt[n]{L_۱}$ → n فرد

Subject
Date 94,9,14

حد

مثال: $f(x) = \{x\} + \{-x\}$; $x \in \mathbb{Z}$; $x \notin \mathbb{Z}$

$\lim_{x \to \sqrt{2}} f \circ f(x) = \lim_{x \to \sqrt{2}} f(f(x)) = \lim_{x \to \sqrt{2}} f(-1) = 0$



$a > 0$

$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ $\quad \lim_{x \to \infty} \log_a^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ $\quad \lim_{x \to a^+} \log_a^x = -\infty$

مثال: $\lim_{x \to 0} \left((0,2)^{1/x} + 2^{1/x} \right)$

$= \begin{cases} (0,2)^{+\infty} + 2^{+\infty} = 0 + \infty & , x \to 0^+ \\ (0,2)^{-\infty} + 2^{-\infty} = +\infty + 0 & , x \to 0^- \end{cases}$

$\lim_{x \to 0^-} [2^{1/x}] = \lim \{2^{-\infty}\} = \{0^+\} = 0$

قضیه فشردگی: اگر $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ، $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$

آنگاه: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

$|h(x) - L| > \varepsilon$

مثال: فرض $\forall x \in (-1,1) : |f(x) - 2| < x^2$ ، $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \xrightarrow{\text{فشردگی}} \lim_{x \to 0} (f(x) - 2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 2$

PqPCO

۳۴

مثال:

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = ?$

$-1 \le \sin x \le 1$

$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(-\frac{1}{x}) \le \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} \le \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x})$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتیجه مشتقی: اگر g کراندار و $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ آنگاه $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

نکته:

$\lim_{x\to\infty} \sin x$

$a_n = n\pi \to n\to\infty$

$\lim_{n\to\infty} \sin a_n = 0$

$b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \to n\to\infty$

$\lim_{n\to\infty} \sin b_n = 1$

حد دو دنباله $\neq$ حد وجود ندارد

تمرین: ثابت کنید حد زیر وجود ندارد $n \in \mathbb{Z}$

$\lim_{n\to\infty} \sin n$

مثال: $\lim_{x\to\infty} \left[\frac{\cos^2 x}{x}\right]$

$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{1}{x}\cos^2 x\right]$

$= [0 \times \text{عددی بین صفر و یک}] = [\text{عددی بین صفر و یک}] = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\cos^2 x}{x}\right]$

$= \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{1}{x}\cos^2 x\right]$

$= \{0 \times \text{عددی بین صفر و یک}\}$

به اطلاق صفر

Subject
Date

$a_n = -n\pi + \frac{\pi}{2} \to -\infty$

$\hookrightarrow a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\cos^2 a_n}{a_n} \right\} = \{0\} = 0$

$\Rightarrow \lim \left\{ \frac{\cos^2 b_n}{b_n} \right\} = \left\{ \frac{1}{-\infty} \right\} = \{0\} = -1$

$b_n = -2n\pi$

$\cos b_n = 1$

حد صعودی $-1 \neq a$

مثال: $\lim_{x\to 0} x\left\{\frac{1}{x}\right\} = 0 \times \infty =$ مبهم

$\frac{1}{x} - 1 < \left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

$\xrightarrow[\text{فشردگی}]{x\to 0^+}$ $\lim x\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$

$x\to 0^+$

$\lim x\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$

$\xrightarrow{x>0}$ $1 - x < x\left\{\frac{1}{x}\right\} \leq 1$

~~Bolzano~~

بنابراین $\lim_{x\to 0^-} x\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$

مثال: $\lim_{x\to 0^+} \left[x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right]$

$1 - x < x\left\{\frac{1}{x}\right\} \leq 1$

$x = \frac{1}{n} \to x\left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0^+$

$\lim_{n\to\infty} \left[a_n \underbrace{\left\{\frac{1}{a_n}\right\}}_{1}\right] = [1] = 1$

PdPCO

Subject
Date

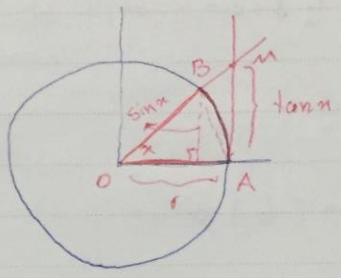
$b_n = \frac{1}{\sqrt{r_n}} \to 0^+$

$0 < |-b_n| < b_n \left[\frac{1}{b_n}\right] < 1$ $\quad \lim_{n\to\infty} \{b_n [\frac{1}{b_n}]\} = 0$

$\{b_n \{\frac{1}{b_n}\}\} = 0$ $\quad 0 \neq 1 \Rightarrow$ حذار

$\underbrace{\quad}_{0} \quad \underbrace{\quad}_{\text{محدود}}$

مثال: $\lim_{x\to 0} \tan^5(x^2) \sin\left(\frac{1+x}{x^5}\right) = 0$ زیرا $= 0$



$\frac{1}{2} x^2$ مساحت قطاع

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\Rightarrow \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$

$S_{OAB} < S_{OAB} < S_{OAM}$

$\xrightarrow{x>0}$

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$ $\quad$ ۹۹۹٫۲۱

$\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$

مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x} = 1$

۴۷

Subject
Date

مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(\sin x)}{\tan^2 x} \overset{\text{H.P}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

مثال: $\lim_{x\to \pi^+} \frac{\sin(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \overset{\text{ساده}}{=} \lim_{x\to \pi^+} \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{0}{0}$

$\longrightarrow$ H.P: $\lim_{x\to \pi^+} \frac{-\sin x}{2\sin x \cos x}$ H.P: $\lim_{x\to \pi^+} \frac{-\cos x}{\cos 2x} = \frac{1}{2}$

مثال: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1} \Rightarrow t^6 = x \quad x\to 1 \equiv t\to 1$

$= \lim_{t\to 1} \frac{t^6-1}{t^3-1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t^3-1)(t^3+1)(t^2+1)(t+1)(t-1)}{t-1} = 8$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{(\sqrt[3]{x}-1)\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$\overset{\text{H.P}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1} \frac{2x^2-2}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{1+2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}}{9(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})} \quad x=t^6 \Rightarrow \lim_{t\to 1} \frac{1+2t^3-3t^2}{9(1+t^3)(1-t^2)}$

$= \frac{1}{9}\lim_{t\to 1} \frac{2t^3-3t^2+1}{1+t^3-t^2-t^5} \overset{\text{H.P}}{=} \lim_{t\to 1} \frac{6t^2-6t}{-5t^4-3t^2+5t^4} = \frac{0}{0}$ H.P $\lim_{t\to 1} \frac{2t-1}{-10t^3-6t+20t^3} = \frac{1}{-10-6+20} = \frac{1}{4}$

PAPCO

۳۸

Subject
Date

عبدالحمید یافی

حالت $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x-x^2+1} = \lim \frac{3x^2}{-x^2} = -3$$

راه دوم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x^2})} = -3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{2x^2+x} = \lim \frac{4x}{2x^2} = \frac{4}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-1)^3(2x-1)^2}{(2x-1)^2(2x+1)^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{27x^3 \cdot 4x^2}{9x^2 \cdot 8x^3} = \frac{4}{8\times 9} = \frac{1}{18}$$

عدد $\frac{1}{2}$ قبل $f(x)$ بسیار کم است و می توان از آن صرف نظر کرد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x+1}-\sqrt{9x-5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{2\sqrt{x}-\sqrt{9x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\sqrt{x}}{-\sqrt{x}} = -3$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x+5}}{\sqrt{9x-1}-\sqrt{9x+5}} \xrightarrow[\text{در صورت و مخرج}]{\text{ضرب}} \lim \frac{(2x+1)-(2x+5)}{(9x-1)-(9x+5)} \times \frac{\sqrt{9x+1}+\sqrt{9x+5}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+5}}$$

$$= \lim \frac{-4}{-6} \frac{\sqrt{9x}+\sqrt{9x}}{\sqrt{2x}+\sqrt{2x}} = \frac{4}{6} \times \frac{6\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x}{3^x-2^x} = \lim \frac{3^x(1+(\frac{2}{3})^x)}{3^x(1-(\frac{2}{3})^x)} = 1$$

① هم ازی هرگاه به صفر مطلق بسیار نزدیک است

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt[3]{8-x^3}) \xrightarrow{\text{ضرب در مزدوج}} \lim x(2-x)\frac{1}{\sqrt[3]{8-x^3}}$$

$$x(x+|x|)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x-|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{8x}{x+x} = \frac{8}{2} = 4$$

① عدد مطلق

Subject
Date

۱) $\lim_{x \to \sqrt{2}} [x^2 - 2]$

۲) $\lim_{x \to 0^+} (x^2)^{\frac{1}{3x}} + 2^{-\frac{1}{x}}$

۳) $\lim_{x \to} \tan x \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

۴) $\lim \frac{\tan x}{\sqrt{1+\cos x}}$

۵) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{2x}+\sqrt{2x+1})^2 - (\sqrt{2x}+\sqrt{2x-1})^2}{(1-\sqrt{2x})^2 + (\sqrt{2x}-2)^2}$

۶) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x \cos x}{1+\cos 2x}$

۷) $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x^3 - x^2}$

۸) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \sin \frac{2}{x}}{2x+1}$

۹) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \tan \frac{\pi}{x}$

۱۰) $\lim_{x \to 2} \frac{2^x + 2^{2-x} - 4}{\sqrt{2^x} - 2^{1-x}}$

۱۱) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}) - \sqrt{2x+3}}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x}) - \sqrt{2x+1}}$

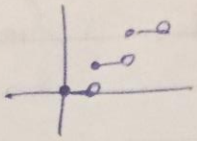
پیوستگی) f در $x=a$ پیوسته است هرگاه:

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(f در a تعریف شده است)

۵) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x \cos x}{1+\cos 2x}$

$g = \{n\} \rightarrow$ در نقاط صحیح پیوستگی از راست



مثال: در کدام نقاط صحیح f پیوسته است.

$f(x) = (x^2 - 5x + 4)\{x\}$

$\{\ \} = 0 \Rightarrow x = 2, 3$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ کرانه‌دار $\times 0 = 0$

$\lim_{x \to 3} f(x) =$ کرانه‌دار $\times 0 = 0$

f در $2, 3$ پیوسته است

جلسه ۹۴/۹/۲۸

مثال: پیوستگی توابع زیر را در صفر بررسی کنید.

$f(x) = \frac{x}{|x|}[x]$ $\quad 0 \notin D_f$

$f(x) = \sqrt{|x|(x-1)}$ $\quad |x|(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Rightarrow x \geq 1$ یا $x = 0$

$\rightarrow D_f = \{0\} \cup [1, +\infty) \Rightarrow$ تابع اطراف صفر تعریف نشده $\Rightarrow$ یعنی در صفر حد نداریم $\Rightarrow$ تابع در صفر پیوسته نیست

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}\cot^{-1}x - \frac{\pi}{x} & , x \neq 0 \\ -2 & , x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2}{x}\cot^{-1}x - \frac{\pi}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\cot^{-1}x - \pi}{x} = \frac{0}{0}$ (حد صفر)

H.p: $\lim_{x \to 0} \frac{-2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1} = -2 = f(0)$

Subject
Date

در صورت انتخاب a و b ، اعدادی به نحو تابع زیر در نقطه مورد نظر پیوسته شود.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ a & ,\ x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1}=-\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$$

$$=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{x})}=-1\left(\frac{1}{0^+\times 2}\right)=-\infty \Rightarrow$$ حد وجود ندارد

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+1)\cot(x^2-1)\overset{0\times\infty}{=}\ ,\ x\neq 1$$

$$f(x)=\begin{cases} & ,\ x\neq 1\\ ax-1 & ,\ x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}ax-1=0 \Rightarrow a=1$$

$x=1$

$$\frac{0}{0}\to 2+2a=0\Rightarrow a=-2$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{a}{x^2-4} & ,\ |x|\neq 2\\ b & ,\ |x|=2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x+2-a}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}=b$$

$x=2$

$x=-2$

ب) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{c-x\cot x}{ax^2} & ,\ x>0\\ -1 & ,\ x=0\\ \dfrac{b\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} & ,\ x<0\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{c-x\cot x}{ax^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{b\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{c-x\cot x}{ax^2}\overset{H\text{ôp}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cot x+(1+\cot^2 x)x}{2ax}$$

$$\text{Hôp: }\lim\frac{(1+\cot^2 x)+(1+\cot^2 x)x+(\text{مشتق})}{2a}=-1$$

$$\Rightarrow \frac{2+\frac{\pi^2}{4}}{2a}=-1$$

$$2+\frac{\pi^2}{4}=-2a$$

$$a=-1-\frac{\pi^2}{8}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{b\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x+b\sqrt{2}\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}=$$

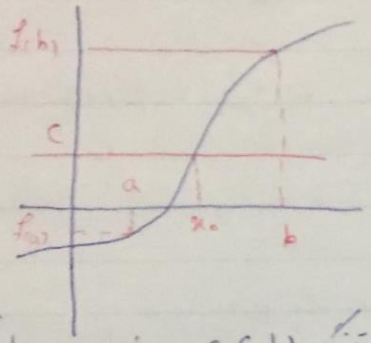
PAGE 20

۲۴

Subject
Date

دانشگاه

قضیه مقدار میانی: فرض کنید f روی $[a,b]$ پیوسته باشد و c یک عدد بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه $x_0 \in (a,b)$ وجود دارد که $f(x_0) = c$



$f(x_0) = c$

نتیجه سوم: (قضیه بولتزانو)

اگر f روی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ علامت مخالف داشته باشند آنگاه $x_0 \in (a,b)$ وجود دارد که:

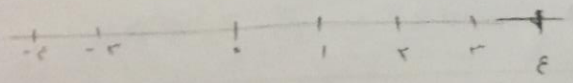
$f(x_0) = 0$

مثال: نشان دهید تابع زیر حداقل یک ریشه دارد.

$f(x) = xe^{x^2} - 1$

$f(0) = -1 < 0$
$f(1) = 1 \times e^1 - 1 > 0$
$\Rightarrow$ یعنی صفر وجود دارد

مثال: نشان دهید $x^3 - 15x + 1 = 0$ در $[-4,4]$ سه ریشه دارد.



$f(-4) < 0$
$f(-3) > 0$ $\Rightarrow$ بین -4 و -3 یک ریشه
$f(0) > 0$
$f(1) < 0$ } بین ۰ و ۱ یک ریشه
$f(3) < 0$
$f(4) > 0$ } بین ۳ و ۴ یک ریشه

اگر بین دو عدد به کار نام شده است وسط دو عدد را گرفته و طبق قضیه بولتزانو حل می کنیم

Subject
Date

مثال: ثابت کنید f یک چند جمله‌ای از درجه فرد باشد، $f(x)=0$ حداقل یک ریشه دارد.

$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0$

فرض $a_n > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ① $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ②

از ① می‌توان a را چنان پیدا کرد $f(a) > 0$

از ② " " " b را " " $f(b) < 0$

طبق برقراری عددی مثل x_0 بین a, b هست که $f(x_0)=0$

مثال: به ازای چه مقادیری از m، معادله $x^2 - 4x + m = 0$ در بازه $(1, 8)$ یک ریشه دارد؟

$f(x) = x^2 - 4x + m = 0$

$f(1)$ ، $f(8)$

$(1 - 4 + m)(64 - 32 + m) < 0 \Rightarrow (m-3)(m+32) < 0$

m	-32		3	
علامت	$+$	0 $-$	0	$+$

$-32 < m < 3$

تمرین: معادله $x^3 - 2x^2 - x + 1$ در فاصله $[-1, 2]$ چند ریشه دارد؟

$3x^2 - 4x - 1 = 0$

$\Delta = 16 + 12 = 28$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6}$

$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{6}$

$x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{6}$

$f(-1) = -1 - 2 + 1 + 1 = -1$

$f(0) = 1$ $\Rightarrow$ بین $[-1, 0]$ یک ریشه

$f(1) = 1 - 2 - 1 + 1 = -1$ $\Rightarrow$ بین $(0, 1)$ یک ریشه

$f(2) = 8 - 8 - 2 + 1 = -1$

$\Rightarrow$ بین $[-1, 2]$ دو ریشه دارد

Subject
Date

تمرین: نشان دهید تقطه‌ای مثل c چنان وجود دارد که $f(c)=c$

$f(x)=(x-a)^2(x-b)^2+x$

$f(a)=a$
$f(b)=b$ $\rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$

در c مقدارش $\frac{a+b}{2}$ است.

فرض کنیم $a<0$

تمرین: فرض کنید $f:[0,1]\to[0,1]$ پیوسته نشان دهید $c\in[0,1]$ چنان موجود است که $f(c)=c$

$f(1)$

$f(c)=c$

$f(c)=c$

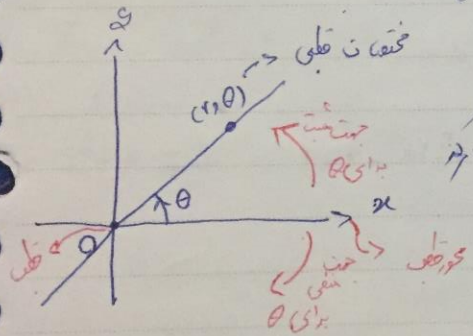
$g(x)=f(x)-x$

$g(0)=f(0)-0 \geq 0$
$g(1)=f(1)-1 \leq 0$ $\rightarrow g(c)=0$

$f(c)-c=0 \rightarrow f(c)=c$

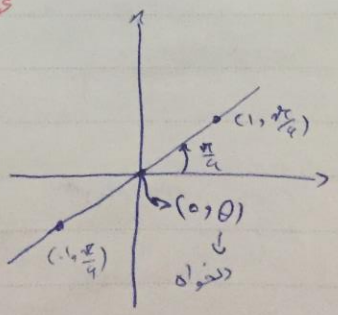
۹۶/۱۰/۵

رسم توابع در مختصات قطبی:



۱۲۱ ← فاصله نقطه از مبدا

مثال: $(1,\frac{\pi}{4})$
$(-1,\frac{\pi}{4})$



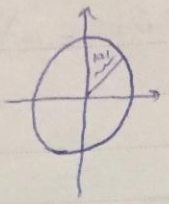
$(-1,\frac{\pi}{4})=(1,\frac{\pi}{4}+\pi)$

$(r,\theta)=(r,\theta+2k\pi)$

$(r,\theta)=(-r,\theta\pm\pi)$

Subject
Date

۱) $r = a$ ، a عدد ثابت و دلخواه

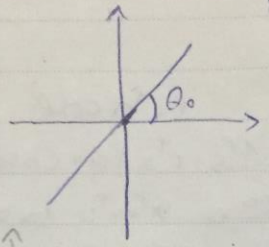


↓

مقدار θ برای هر r آزاد است

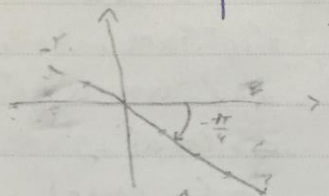
۲) $\theta = \theta_0$

خطی که از مرکز عبور می‌کند.

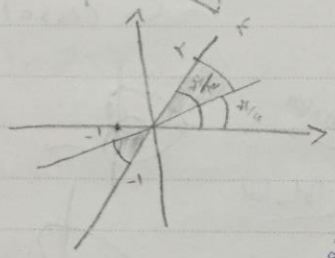


مثال:

$$\begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} \\ -2 \le r \le 2 \end{cases}$$



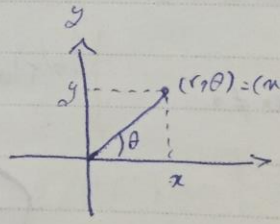
$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3\pi}{4} \\ -1 \le r \le 2 \end{cases}$$



تذکر:

$r^2 = x^2 + y^2$ $\quad x = r\cos\theta$

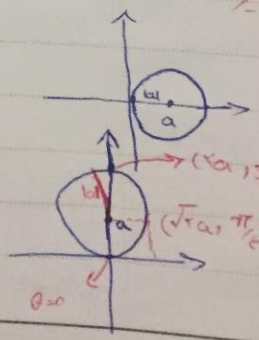
$\theta = \tan^{-1} y/x$ $\quad y = r\sin\theta$



۳) دایره:

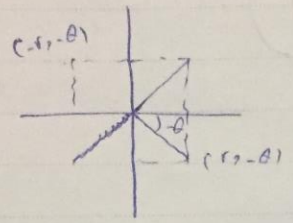
$r = 2a\cos\theta$ ⟶ دایره‌ای به مرکز $(a, 0)$ و شعاع $|a|$

$r = 2a\sin\theta$ ⟶ دایره‌ای به مرکز $(a, \frac{\pi}{2})$ و شعاع $|a|$



Subject
Date

$r(-\theta) = 2a\sin(-\theta) = -2a\sin\theta = -r(\theta)$



نکته

$r = 2a\cos\theta$

$\xrightarrow{\times r}$ $r^2 = 2ar\cos\theta$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری}}$ $x^2+y^2 = 2ax$

$x^2+y^2-2ax = 0$

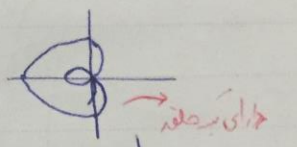
$\xrightarrow{+a^2}$ $x^2+y^2-2ax+a^2 = a^2$

$\Rightarrow (x-a)^2+y^2 = a^2$

$\hookrightarrow (a,0) \to$ شعاع $= |a|$

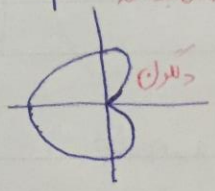
$$\begin{cases} r = a \pm b\cos\theta \\ r = a \pm b\sin\theta \end{cases}$$

$|b| > |a|$ →



→ دارای یک حلقه

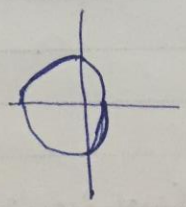
$|b| = |a|$ →



→ کاردیوئید

$a \neq 0$

$|b| < 2|a|$ ↓



۴. لیماسون

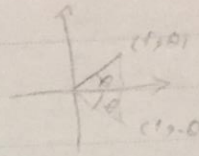
Subject
Date

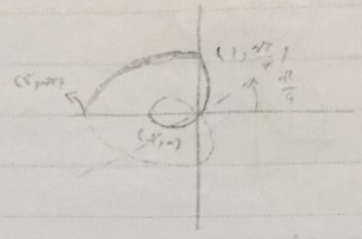
مثال $r = 1 - 2\cos\theta$

$r(-\theta) = 1 - 2\cos(-\theta) = r - 2\cos\theta = r(\theta)$

نسبت به محور xها متقارن

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0	1	3





تمرین) حلقه دار $\leftarrow r = 1 - 2\sin\theta$

دلقون $\begin{cases} r = 1 + \sin\theta \\ r = -1 + \sin\theta \end{cases}$

گل $r = a\cos n\theta$ زوج $\rightarrow$ n برگ

$r = a\sin n\theta$ زوج $\rightarrow$ $2n$ برگ

$n \neq 1$

مثال $r = \sin 2\theta$

$\hookrightarrow$ n زوج $\rightarrow$ 4 برگ

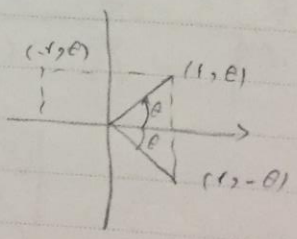
$r(-\theta) = \sin 2(-\theta) = -\sin 2\theta = -r(\theta)$

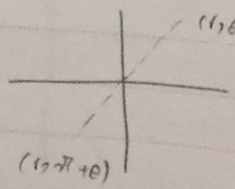
نسبت به محور قطبی

$r(\theta + \pi) = \sin(2\pi + 2\theta)$

$= \sin 2\theta = r(\theta)$

تقارن نسبت به مبدأ



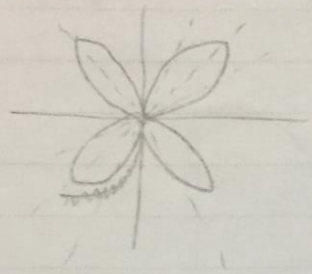


PdPCO

۴۳۷

Subject
Date

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
r	1	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0



مثل: $r = \cos 2\theta$

$r = 2\cos 2\theta$

۶- برادر (لمنیسکات)

$r^2 = \cos 2\theta$

$r^2 = \sin 2\theta$

مثل: $2, r^2 = \sin 2\theta$

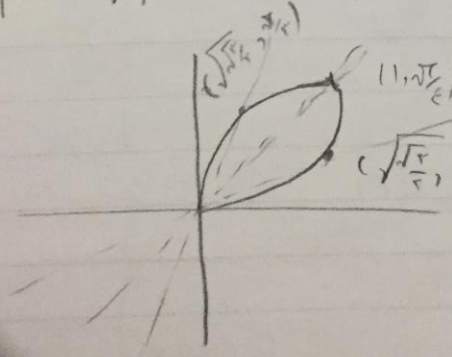
$0 \le 2\theta \le 2\pi \rightarrow 0 \le \theta \le \pi$

$\frac{2\pi}{2} \le 2\theta \le 2\pi \rightarrow \pi \le \theta \le \frac{2\pi}{2}$ $\Big\} \Rightarrow$ در این مقادیر sin مثبت است

$r^2(\theta + \pi) = \sin(2\pi + 2\theta) = \sin 2\theta = r(\theta)$

نسبت به مبدأ متقارن

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
r	0	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	0



مثل: $r^2 = 4\cos 2\theta$