وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveotamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Subject :
Year. Month.

معادلات پارامتری منحنی‌ها:

معادلات پارامتری:

$y = 4x^2$ $\quad y = f(x)$

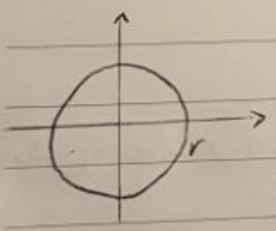
$\begin{cases} x = t \\ y = 4t^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}$

اگر مختصات x و y از نقطه‌ای مانند P روی یک منحنی به صورت توابع $x = f(u)$ ، $y = g(u)$ از متغیر سومی با پارامتر (t, u) داده شود گاهی به معادلات $x = f(u)$ و $y = g(u)$ معادلات پارامتری منحنی می‌گوییم.

مثال: $4x^2 + y = 4$

$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 4 - 4\cos^2\theta = 4\sin^2\theta \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 4 - t^2 \end{cases}$

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع r را پارامتری کنید.



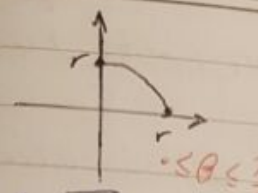
$x^2 + y^2 = r^2$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$ ✓

Scanned by CamScanner

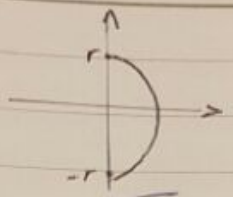
Subject :
Year. Month.



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

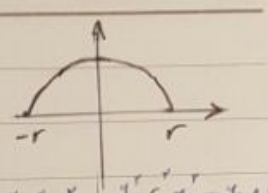
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad x \ge 0$

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ $\quad y \ge 0$



$x = \sqrt{r^2 - y^2}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

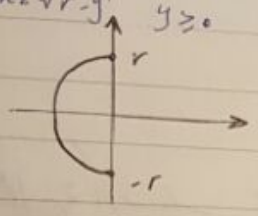


$x^2 + y^2 = r^2$

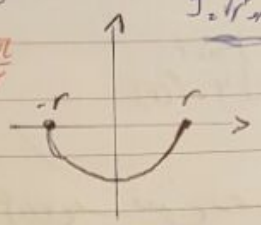
$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $\quad y \ge 0$

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ $\quad x \ge 0$

$0 \le \theta \le \pi$



$x = -\sqrt{r^2 - y^2}$



$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$

$-\pi \le \theta \le 0$

نقطه معادله $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

معادله دایره‌ای به مرکز $\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}$ و شعاع r را پارامتری کنید.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta + a \\ y = r\sin\theta + b \end{cases}$$

مثال: معادله زیر را پارامتری کنید.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100$$

$$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100} \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$a = 5$, $b = 2$

$$\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$$

SIMACO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

مشتق توابع پارامتری:

فرض کنید یک منحنی به روش یک جفت معادلات پارامتری $x=f(u)$ ، $y=g(u)$ داده شود، کنکاه مشتق های اول و دوم $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ داده خواهند شد

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dy}}$$

مثال: $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$ برای $x=t-\sin t$ ، $y=1-\cos t$ را حساب کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\sin t}{(1-\cos t)^2}=\frac{\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}$$

$$=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}=\frac{-1}{1-\cos t} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{-1}{1-\cos t}}{1-\cos t}=\frac{-1}{(1-\cos t)^2}$$

$y=e^t\sin t$ ، $x=e^t\cos t$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t\sin t+e^t\cos t}{e^t\cos t-e^t\sin t}=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{(-\sin t+\cos t)(\cos t-\sin t)-(-\sin t-\cos t)(\sin t+\cos t)}{(\cos t-\sin t)^2}$$

$$=\frac{(\cos t-\sin t)^2+(\cos t+\sin t)^2}{(\cos t-\sin t)^2}=\frac{2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{(\cos t-\sin t)^2}=\frac{2}{(\cos t-\sin t)^2}$$

SINACO

Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{2}{e^t(\cos t - \sin t)} = \frac{2}{e^t(\cos t + \sin t)}$$

تابع:

$x \to y$

توابع برداری:

توابع چند متغیره

$t \to (x(t), y(t))$

$t \to (x(t), y(t), z(t))$

$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

$t \to (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$

تابع دو متغیره $(x, y) \to z$

مثل $z = f(x,y) = x^2 + 5y^2 - 5y$

تابع سه متغیره $(x, y, z) \to w$

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \to y$

مشتق جزئی

$$f(x,y,z) = x^2 + 5x^2y^4z^7 - 2y^5z^2 + 5z^4 - 8zy^2 + 7$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 10xy^4z^7$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 20x^2y^3z^7 - 10y^4z^2 - 16zy$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 35x^2y^4z^6 - 4y^5z + 20z^3$$

SINNCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\quad A\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$ $\quad B\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$

$\vec{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}$

$\vec{BA} = -\vec{AB}$ $\quad |\vec{AB}| = |\vec{BA}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2 + (a_3-b_3)^2}$

حاصلضرب داخلی (اسکالر، عددی، نقطه‌ای) دو بردار عدد است

حاصلضرب خارجی دو بردار برداری است عمود بر دو بردار

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$

$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ $\quad \vec{a}.\vec{b} = 0 \leftrightarrow a_0 \perp b_0$ دو بردار بر هم عمودند

$\vec{a}.\vec{0} = 0$ $\quad \vec{0}.\vec{a} = 0$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{a} = |a|^2$ $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ $\quad \downarrow$ $\quad \theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

SIMCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

تمرین ۹ صـ ۳۷۳

اگر $a = f_1(u)i + f_2(u)j$ و $b = g_1(u)i + g_2(u)j$ باشند ثابت کنید

$$\frac{d}{du}(a.b) = \frac{da}{du}.b + a.\frac{db}{du}$$

$$\frac{d}{du}(a.b) = \frac{d}{du}(f_1g_1 + f_2g_2) = \frac{df_1}{du}.g_1 + f_1\frac{dg_1}{du} + \frac{df_2}{du}g_2 + f_2\frac{dg_2}{du}$$

$$\left(\frac{df_1}{du}g_1 + \frac{df_2}{du}g_2\right) + \left(f_1\frac{dg_1}{du} + f_2\frac{dg_2}{du}\right)$$

$$= \frac{da}{db}.b + a.\frac{db}{du}$$

تمرین ۱۰ صـ ۳۷۳

اگر $a = f_1(u)i + f_2(u)j$ با اندازه غیر صفر ثابت باشد ثابت کنید $a.\frac{da}{du} = 0$

و بنابراین زمانی که $\frac{da}{du}$ غیر صفر است، a و $\frac{da}{du}$ متعامدند.

$$a.a = |a|^2 \Rightarrow a.a = c^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{da}{du}.a + a.\frac{da}{du} = 0$$

$$\Rightarrow 2\frac{da}{du}.a = 0 \Rightarrow \frac{da}{du} \perp a$$

SINACO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

دترمینان ها:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix} \quad (aei + bfg + cdh) - (bdi + afh + ceg)$$

حاصلضرب خارجی دو بردار:

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$
$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

بردار عمود بر صفحه‌ای که دو بردار با توجه به دست راست تشکیل می‌شود

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \, \vec{n}$ $\quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

معادله خط راست: معادله خطی که از نقطه (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد و موازی بردار

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

SIMRCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year, Month,

بطور مثال اگر $a_1=0$ باشد معادله خط بصورت

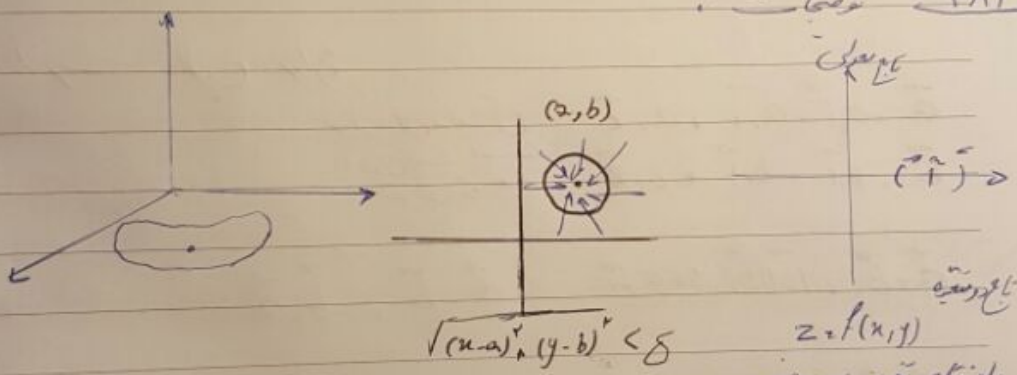
$$x=x_0 \quad , \quad \frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

معادله صفحه: معادله صفحه‌ای که از نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد و بردار نرمال آن

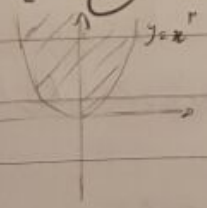
$$\vec{a}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

توضیحات: ص ۳۸۳



مثال: دامنه تعریف هر یک از توابع دو متغیره زیر را بیابید؟



- $z=f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$

$y-x^2\geq 0 \rightarrow y\geq x^2$

SINSACO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

- $z = f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$

$x^2+y^2-4>0 \Rightarrow x^2+y^2>4$

ص ۲۸۴ مثال ۳

$\lim \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

روی سهمی $y=mx$ حد را بدست می‌آوریم

$\lim \frac{x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim \frac{1-m^2}{1+m^2} = \frac{1-m^2}{1+m^2}$

چون به m بستگی دارد حد موجود نیست

بیوستی تابع در نقطه‌ی زیر را مورد بررسی کنید

$$z = f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

مثال: نشان دهید هیچ یک از حدود زیر وجود ندارد.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2-y^2}$ سهمی $y=mx$

$\lim \frac{x^2y}{x^5+y^2}$ سهمی $y=mx^2$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

SINACO

Scanned by CamScanner

Subject :

Year Month

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \lim \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \frac{m^2}{1+m^4}$$

SIMCO

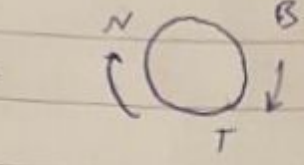
Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

برای فرمول دوم فرنه:

$B = T \times N$

$N = B \times T$



$$\frac{dN}{dB} = \frac{dB}{ds} \times T + B \times \frac{dT}{ds}$$

$$N' = -\tau . N \times T + k . B \times N$$

$$N'(s) = \tau(s) \times B(s) - k(s) T(s)$$

و گاهی فرمول دوم فرنه نامند.

بنابراین بطور کلی فرمولهای فرنه به صورت زیر است.

$$\begin{cases} T'(s) = k(s) . N(s) \\ N'(s) = \tau(s) B(s) - k(s) T(s) \\ B'(s) = -\tau(s) . N(s) \end{cases}$$

و این بطور کلی یادآور هشتی $\{ T, N, B, k, \tau \}$

(بردار مماس، بردار قائم اصلی، بردار قائم دوم، انحنا، تاب)

تمرین: تاب و انحنا معادله زیر را بیابید.

$r(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

$T(t)$

$N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|}$

$B = T \times N$

SIMCO

Scanned by CamScanner

Subject :
Year. Month.

تمرين ٣٢ ص ٢٠٤

$u = f(x,y)$ $\quad x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta$ $\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) = r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right)$

نثبت $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right)\right]^2$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\sin^2\theta + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\sin\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cos^2\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta\sin\theta$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$

Scanned by CamScanner

Subject : Date

بردارهای یکانی مماس، قائم اول و دوم

تعریف: اگر $\vec{R}(t)$ بردار موضع منحنی C باشد و P نقطه‌ای روی C که به ازای t_0 متناظر می‌شود در اینصورت بردار یکانی مماس بر منحنی C در نقطه‌ی P را با $\vec{T}(t_0)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

مثال: بردار یکانی مماس بر منحنی C به معادله $R(t) = \cos t\,\vec{i} + e^{t}\sin t\,\vec{j} + e^{t}\vec{k}$ را در نقطه متناظر $t=0$ تعیین کنید؟

$$R'(t) = (e^t\cos t - e^t\sin t)\vec{i} + (e^t\sin t + e^t\cos t)\vec{j} + e^t\vec{k}$$

$$R'(0) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \qquad |R'(0)| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$T(0) = \frac{R'(0)}{|R'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

با توجه به اینکه اندازه $|\vec{T}(t)| = 1$ یعنی طول T همواره ثابت است نتیجه می‌گیریم که بردار $T'(t)$ در هر نقطه بر منحنی C عمود است (از این موضوع در تعریف زیر استفاده می‌کنیم).

تعریف: بردار قائم یکانی اول یا بردار یکانی عمود اصلی بر منحنی C بردار است که بر T عمود بوده و دارای اندازه‌ی واحد است و آن را با $\vec{N}$ نشان می‌دهیم بنابراین $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}$

Scanned by CamScanner

توجه کنید که جهت بردار N در راستای عمود بر بردار T و در جهت تقعر منحنی $R(t)$ در آن نقطه است.

مثال: قائم یکانی اول تابع زیر را بیابید.

$$R(t) = a\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$$

$$R'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}$$

$$|R'(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a$$

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

تعریف: صفحه‌ی گذرنده از بردارهای T و N در نقطه $R(t_0)$ روی منحنی C را صفحه‌ی بوسان منحنی C در نقطه $R(t_0)$ گوییم. بردار نرمال این صفحه در نقطه $R(t_0)$ روی منحنی بردار قائم یکانی قائم دوم نام دارد.

$$B(t) = T(t) \times N(t)$$

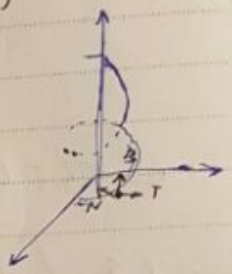
$$B = T \times N$$

Subject : Date

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} \qquad N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \qquad B = T \times N$$

به دستگاه $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ دستگاه پایه متعامد فرنه (لنج فرنه) یا سه وجهی متحرک گویند

مثال: بردار مماس یکانی اول و دوم را در هر نقطه از منحنی بدست آورید.



$$\vec{R}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$$

$$R'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} = \frac{-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k})$$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j})}{\sqrt{\frac{1}{2}(\cos^2 t + \sin^2 t)}} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\,i - \left(0 + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)j$$

$$+ \left(+\frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}} + \frac{(\cos t)^2}{\sqrt{2}}\right)k = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + \vec{k})$$

MICRO

Scanned by CamScanner

مثال: مطلوب است محاسبه $\vec{T}$ و $\vec{N}$ برای هر سطح:

$$\vec{R}(t) = (\cos t + t\sin t)\vec{i} + (\sin t - t\cos t)\vec{j} \quad (t>0)$$

مثال: T و N و B را برای $\vec{R}(t) = (3\sin t)\vec{i} + (3\cos t)\vec{j} + tR$ بیابید:

تعریف: فرض کنید $T(t)$ بردار یکای مماس در یعنی C در نقطه متناظر با t باشد s طول قوس اندازه‌گیری شده از نقطه‌ی ثابت دلخواه تا نقطه‌ی متناظر t و s با افزایش t زیاد می‌شود در اینصورت بردار انحنای C در این نقطه عبارت است از: $\vec{K}(t) = \frac{d\vec{T}}{ds}$ همچنین اندازه‌ی $|\vec{K}(t)|$ با نماد $K(t)$ (کاپا) نشان داده و آن را انحنای منحنی می‌نامیم.

اگر $K(t)$ (کاپا) انحنای منحنی C در نقطه‌ی P باشد شعاع انحنای منحنی در نقطه‌ی P عبارت است از $P(t) = \frac{1}{K(t)}$ و اگر $K(t) = 0$ باشد P بی‌نهایت می‌شود و این بدین معناست که منحنی قطعاً یک خط راست است.

Scanned by CamScanner

Subject : Date

بالاخره محاسبه‌ی توان چنین داشت $\kappa = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$

$$\kappa = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3} = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3}$$

قضیه: اگر $\vec{R}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ که در صفحه xy باشد آنگاه انحنا در هر نقطه برابر است با:

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|(x')^2 + (y')^2|}$$

بویژه برای محاسبه‌ی انحنای منحنی‌هایی که معادله‌ی پارامتری آن‌ها به شکل $y = f(x)$ یا $x = g(y)$ باشد داریم

مثال: مطلوبست انحنا و شعاع انحنای بیضی زیر در نقطه $t = \frac{\pi}{2}$

$$R(t) = 3\sin t\,\vec{i} + 4\cos t\,\vec{j}$$

$$x(t) = 3\sin t \qquad y(t) = 4\cos t$$
$$x'(t) = 3\cos t \qquad y'(t) = -4\sin t$$
$$x''(t) = -3\sin t \qquad y''(t) = -4\cos t$$

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{|(x')^2 + (y')^2|^{\frac{3}{2}}} = \frac{|(3\cos t)(-4\cos t) - (-3\sin t)(-3\sin t)|}{|(3\cos t)^2 + (-4\sin t)^2|^{\frac{3}{2}}}$$

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{12}{16} = \qquad \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{16}{12}$$

Scanned by CamScanner

مثال: مطلوست محاسبه انحنا و شعاع انحنا در نقطه $(1,0)$ از منحنی $y=e^x$

$$K(x)=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{e^x}{(1+e^{2x})^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow K(0)=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \rho(0)=2\sqrt{2}$$

توصیه: در فرمول زیر، بردار انحنا را برحسب مشتق بت بیان می‌کند.

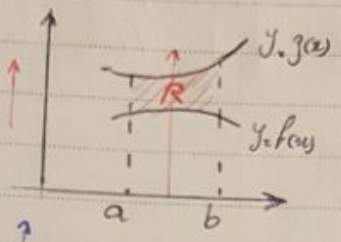
$$\vec{K}(t)=\frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{R}'(t)|} \rightarrow K(t)=\frac{dt}{ds}=\frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{ds}{dt}}=\frac{T'(t)}{|\vec{R}'(t)|}$$

چون $\frac{ds}{dt}=|\vec{R}'(t)|$

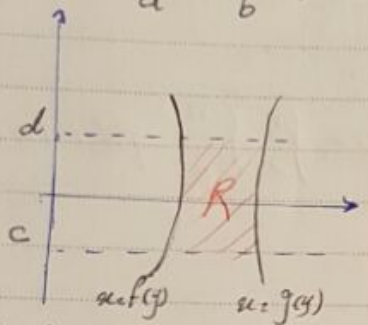
Scanned by CamScanner

Subject : Date

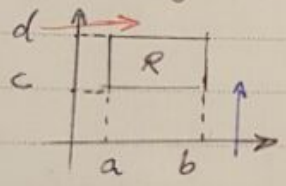
$\iint f(x,y)\,dA$ → $dy\,dx$ / $dx\,dy$



$\int_a^b \int_{f(x)}^{g(x)} f(x,y)\,dy\,dx$



$\int_c^d \int_{f(y)}^{g(y)} f(x,y)\,dx\,dy$



$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

صـ ٤٥٤

(٢) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

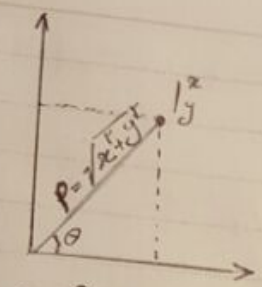
(٣) $\int_1^2 \int_y^{2y} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Big|_y^{2y} dy = \int_1^2 \left(\left(\frac{4y^2}{2} + 2y^2\right) - \left(\frac{y^2}{2} + y^2\right)\right) dy$

$4\int_1^2 y^2\,dy = 4 \times \frac{y^3}{3}\Big|_1^2 = 2(8-1) = 14$

MICRO

Scanned by CamScanner

Subject :



$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

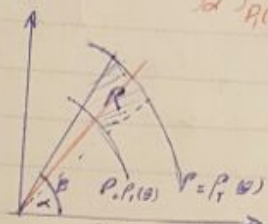
$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \rho^2 = x^2+y^2$

$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

معادلات قطبی دایره به مرکز مبدا و شعاع c: $\rho = c$

تغییر متغیر قطبی

$$\iint f(x,y)\,dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$



$$\iint_R dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta$$

② $\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \rho\sin\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta\,(\rho)^2\Big|_0^{\cos\theta} d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \underbrace{-\sin\theta}_{u'}\underbrace{\cos^2\theta}_{u}\,d\theta$

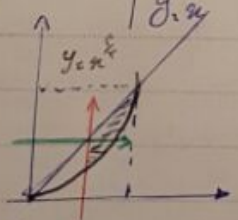
$-\frac{1}{2}\,\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}$ .....

④ $y^2 = x^2 \quad \begin{matrix} y = x^{\frac{2}{2}} \\ x = y^{\frac{2}{2}} \end{matrix}$

$y = x$

$y = x^n$

$0 < x < 1 \rightarrow n > m \rightarrow x^n < x^m$



$y = x^{\frac{2}{2}} \rightarrow x^{\frac{2}{2}} - x = 0 \rightarrow x(x^{\frac{1}{2}} - 1) = 0$

$y = x \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x^{\frac{1}{2}} = 1 \rightarrow x = 1 \end{matrix}$

$$\int_0^1\int_{x^{\frac{2}{2}}}^{x} dy\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$$

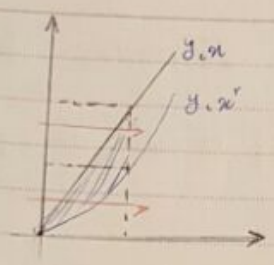
$$\int_0^1\int_{y}^{y^{\frac{2}{2}}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{\frac{2}{2}} - y)\,dy = \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

① $y = \sqrt{x}$,
$y = x^2$,
$x = 1$



$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx \dots$

$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^4 \int_y^1 dx\,dy$

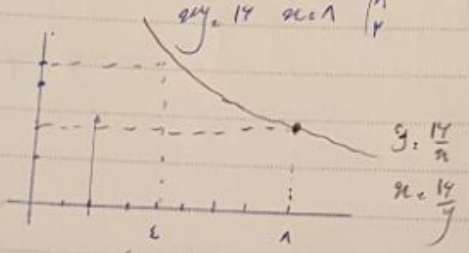
② $\iint_R x^2\,dA$ $\begin{cases} xy = 16 \\ y = x \end{cases} \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = 4$

$xy = 16$ $x = 1$

$y = x$

$y = 0$

$x = 1$



$\int_0^{\varepsilon} \int_0^{x} x^2\,dy\,dx + \int_{\varepsilon}^{1} \int_0^{\frac{16}{x}} x^2\,dy\,dx$

$\int_0^4 \int_y^1 x^2\,dx\,dy + \int_4^{16} \int_y^{\frac{16}{y}} x^2\,dx\,dy$

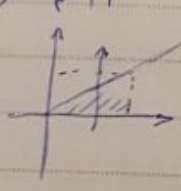
⑩ $\int_0^1 \int_{4y}^{4} e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^4 \int_0^{x/4} e^{x^2}\,dy\,dx = \frac{1}{4} \int_0^4 4x e^{x^2}\,dx$

$= \frac{1}{4} e^{x^2} \Big|_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - e^0) = \frac{1}{4}(e^{16} - 1)$

$x < 4y \rightarrow y = \frac{x}{4}$

$x = 4$

$0 \le y \le 1$



MICRO

Scanned by CamScanner

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} \sqrt{x^3+1}\, dx dy = \int_0^2 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\, dy dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{3x^2}{3}(x^3+1)^{\frac{1}{2}} dx \cdot \frac{1}{3}\frac{(x^3+1)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\Big|_0^2 = \cdots = \frac{52}{9}$$

مثال $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \cos\frac{y}{x}\, dx dy$

مثال: $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin(x^3)\, dy dx$

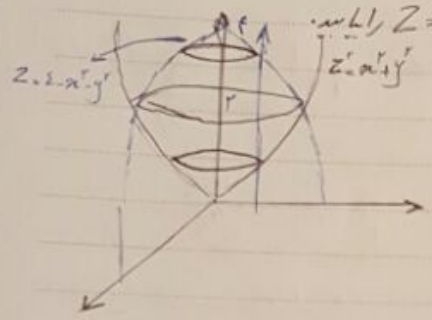
ج) $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \cos\frac{y}{x}\, dy dx$

Scanned by CamScanner

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x\,dA}{\iint_R dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_R y\,dA}{\iint_R dA}$$

تمرين محلول: اوجد حجم المنطقة المحصورة بين $Z = 4 - x^2 - y^2$ و $Z = x^2 + y^2$ ***

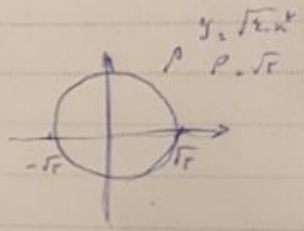


$x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 2 \quad \rho^2 = 2 \quad \rho = \sqrt{2}$

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left((4 - x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)\right) dy\,dx$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$



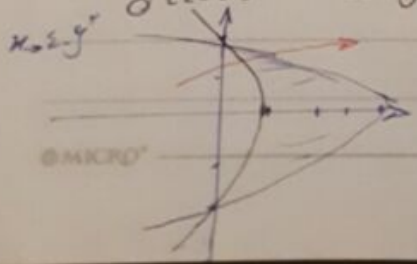
$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz\,dy\,dx$$

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{\rho^2}^{4-\rho^2} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

٤٤٥

(٢) $y^2 = 4 - x \rightarrow x = 4 - y^2$

$y^2 = 4 - 4x \rightarrow 4x = 4 - y^2 \rightarrow x = 1 - \frac{y^2}{4}$



$4 - y^2 = 1 - \frac{y^2}{4} \rightarrow 16 - 4y^2 = 4 - y^2$

$\rightarrow 3y^2 = 12 \Longrightarrow y = \pm 2$

$$4\int_0^2\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx\,dy$$

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

(a) $N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \quad N = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \quad N^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dx$

$N^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dy\,dx \rightarrow N^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta \rightarrow$

$N^2 = \frac{-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\lim_{a\to\infty} \int_0^{a} \underbrace{-2\rho e^{-\rho^2}}_{(e^{-\rho^2})\Big|_0^a} d\rho\right) d\theta = -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\lim_{a\to\infty}(e^{-a^2} - e^{0})}_{-1} d\theta$

$\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} \qquad N^2 = \frac{\pi}{4} \rightarrow N = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Scanned by CamScanner

Date

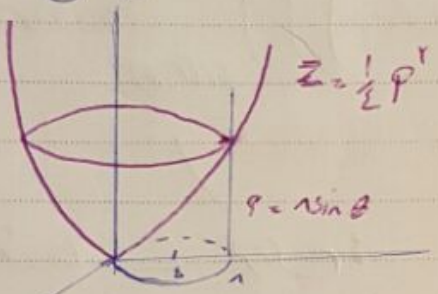
Subject :

۴۴. ⑤ $x^2+y^2=4z \rightarrow z=\frac{1}{4}(x^2+y^2) \rightarrow z=\frac{1}{4}\rho^2$

$x^2+y^2=8y \rightarrow x^2+y^2-8y=0 \rightarrow x^2+y^2-8y+16=16 \rightarrow x^2+(y-4)^2=16$

دایره‌ای به مرکز $(0,4)$ و شعاع ۴

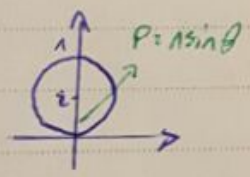
$x^2+y^2=8y \rightarrow \rho^2=8\rho\sin\theta \rightarrow \rho=8\sin\theta$



$$\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta}\left(\frac{1}{4}\rho^2\right)\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\frac{1}{16}\int_0^{\pi}\rho^4\Big|_0^{8\sin\theta}d\theta$$

$$\int\sin^4\theta\,d\theta.\int\left(\frac{1-\cos(\theta)}{2}\right)^2d\theta\ldots$$



راضیای $\cos^2 2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

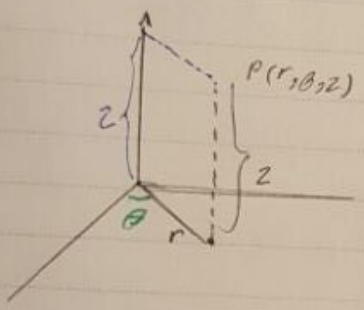
MICRO

Scanned by CamScanner

انتگرال سه گانه

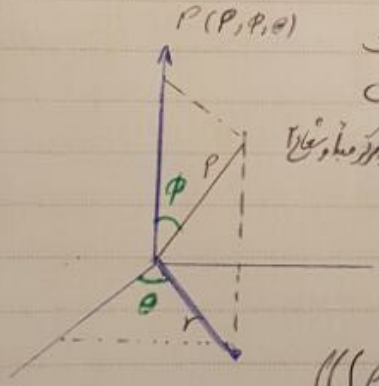
$$\iiint_R f(x,y,z)\,dv = \iint\int f(x,y,z)\,dz \;\begin{cases} \to dx\,dy \\ \to dy\,dx \\ \to r\,dr\,d\theta \end{cases}$$

عنصات استوانه‌ای



$$\iiint_R f(r,\theta,z)\,dv = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$$

مختصات کروی:



مختصات کروی

کره‌های هم‌مرکز حول مبدأ مختصات: $\rho = r$

نیم‌صفحه: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\rho^2 = x^2+y^2+z^2$

$z = \rho\cos\theta$

$r = \rho\sin\theta$

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$$\iiint_R f(\rho,\phi,\theta)\,dv = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)}\int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

Scanned by CamScanner

Subject : Date

۲۴۷

تمرین ۱۱ الف) $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} xy\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{2-x} dy\,dx =$

$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{1-x} x(2-x)^2 y\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(2-x)^2\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 x(2-x)^2(1-x)^2 dx = \dots$

ب) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^1 z\,r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin\theta\left(z^2\right)\Big|_0^1 dr\,d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{3}\frac{r^3}{3}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

ج) $\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sec\phi}\sin^2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\,d\phi\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)d\theta = (2-\sqrt{2})\pi$

مثال ۱/۸ $x+y=2 \quad |_2^0\ |_0^2$
$2y+x=4 \quad |_2^0\ |_0^4$
$y^2+z^2=4$

$f(r,\theta,z) = r^2$

$r^2 = 9-z \rightarrow z = 9-r^2$

$z = 9-(x^2+y^2)$

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

انتگرال گیری روی میدان های برداری

انتگرال معنی الخط

در این بخش می خواهیم انتگرال معین تابع یک متغیره ی $f(x)$ در فاصله ی بسته ی $[a,b]$ را به انتگرال معنی الخط تعمیم دهیم برای این منظور فرض کنید $\vec{F}(x)=f(x)\vec{i}$ تابعی برداری باشد به طوریکه تابع $f(x)$ در فاصله ی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه با فرض $\vec{R}=x\vec{i}$ (بردار مکان هر نقطه از محور x ها) داریم $d\vec{R}=dx\vec{i}$ ولذا می توان نوشت :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{R}$$

که در آن $A(a,0,0)$ و $B(b,0,0)$ ، دو نقطه روی محور x ها هستند حال می خواهیم مرکب کلی تابع برداری $\vec{F}(x,y,z)$ به شکل زیر در نظر گیریم :

$$\vec{F}(x,y,z)=M(x,y,z)\vec{i}+N(x,y,z)\vec{j}+P(x,y,z)\vec{k} \quad (1)$$

که در آن $A(a_1,a_2,a_3)$ و $B(b_1,b_2,b_3)$ دو نقطه در فضای سه بعدی در نظر گرفته

و برای آنکه مطلب کلی باشد باید فرض کرد که A توسط منحنی C به B وصل می شود

و معادله کلی منحنی C به صورت زیر است.

$$\vec{R}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \qquad a\le t\le b \quad (2)$$

$$d\vec{R}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k} \quad (3)$$

MICRO

Scanned by CamScanner

Subject :

در اینجا $A = (x(a), y(a), z(a))$ و $B = (x(b), y(b), z(b))$

مماساً بردار یکه مماس در هر نقطه از منحنی C برابر است با:

$\vec{T} \cdot \frac{d\vec{R}}{ds}$ $\qquad \vec{F} \cdot d\vec{R} = \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$ (۵)

در رابطه ۵، $\vec{F} \cdot \vec{T} = f(x,y,z)$ تابعی عددی است لذا می خواهیم انتگرال تابع $f(x,y,z)$

را روی منحنی C تعریف کنیم

منحنی C را هموار گوییم اگر $\vec{R}(t)$ در رابطه‌ی آن پیوسته بوده و به ازای جمیع مقادیر t

$\frac{d\vec{R}}{dt} \neq 0$ به عبارت دیگر در هر نقطه‌ی C بردار یکه مماس تا وجود داشته باشد

و همچنان که در امتداد C حرکت می کنیم جهت T به طور پیوسته تغییر کند.

حال فرض کنید تابع $f(x,y,z)$ در هر نقطه از منحنی هموار C تعریف شده و تابع

$f(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ پیوسته باشد انتگرال منحنی الخط تابع $f(x,y,z)$ روی

منحنی C از نقطه A تا B را با نمادهای زیر نمایش می دهیم.

$$\int_A^B f(x,y,z)\, ds \;,\; \int_C f(x,y,z)\, ds \;,\; \int_C f\, ds \qquad (۷)$$

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

با فرض اینکه تابع $f(x)$ و همواره‌ی C داریم

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt \quad (*)$$

در کتاب آمده است $\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(r(t)) \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$

با توجه به رابطه‌ی $*$ و همچنین از روابط ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که:

$$\vec{F}.d\vec{R} = M(x,y,z)\,dx + N(x,y,z)\,dy + P(x,y,z)\,dz$$

لذا انتگرال $*$ را به فرم زیر می‌توان نوشت:

$$\int_C f\,ds = \int_C \vec{F}.d\vec{R} = \int_C \vec{F}.\vec{T}\,ds = \int_C (M\,dx + N\,dy + P\,dz)$$

در ادامه تمام مسیرهای انتگرال‌پذیری را به طور قطعه‌ای همواره در نظر می‌گیریم یعنی فرض می‌کنیم

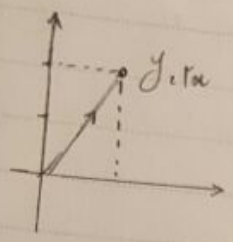
به تمامی مسیرها از تعداد متناهی همواره تشکیل شده باشد

روی منحنی‌های بسته جهت مثبت را جهت مثبت مثلثاتی در نظر گرفته و از نماد

$\oint_C f\,ds$ استفاده می‌کنیم

برای محاسبه‌ی انتگرال منحنی‌الخط با استفاده از بازپارامتری‌سازی آن را به انتگرال معین تبدیل می‌کنیم

Scanned by CamScanner



مثال: $\int_C (x+y^2)\,ds$ روی سهمی $y=2x$ از $(0,0)$ تا $(1,2)$

ابتدا برای C یک پارامتری‌سازی در نظر می‌گیریم

$$C: R(t) = t\vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$x(t) = t \to x'(t) = 1$$

$$y(t) = 2t \to y'(t) = 2$$

حال با توجه به فرمول داریم: $0 \le t \le 1$

$$\int_C (x+y^2)\,ds = \int_0^1 (t+4t^2)\sqrt{1+4}\,dt = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$\sqrt{5}$, $\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$

حال همین C را به فرم دیگری پارامتری‌سازی می‌نمیم

$$x(t) = \cos t \qquad y(t) = 2\cos t \qquad -\frac{\pi}{2} \le t \le 0$$

در اینصورت: $\int_C (x+y^2)\,ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\cos t + \cos^2 t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (2\sin t)^2}\,dt$

$\sqrt{5}|\sin t|$

$\sqrt{5}(-\sin t)$

$$= 5\sqrt{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 t(-\sin t)\,dt = 5\sqrt{5}\,\frac{\cos^3 t}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

نکته: مقدار انتگرال منحنی الخط به نوع پارامتری‌سازی منحنی بستگی ندارد.

Scanned by CamScanner

Subject : Date

مثال: انتگرال منحنی الخط $\int_C y^2 ds$ را در امتداد خط حاصل تلاقی صفحات

$x+y+2z=0$, $x+2y+z=3$ از نقطه $A(2,0,-2)$ تا $B(1,1,0)$ بیابید؟

حل: ابتدا حاصل تلاقی دو صفحه را با پارامتری کنیم، برای اینکاری متغیر t را y در نظر گرفته و داریم

$$\begin{cases} x+z=2-2t \\ x+2z=t \end{cases} \rightarrow z=2t-2 \;,\; x=-3t+6$$

خواهیم داشت

$$\int_C y^2 ds = \int_0^1 t^2 \sqrt{(-3)^2+(1)^2+(2)^2}\, dt = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

مثال: مطلوب است محاسبه انتگرال

$$I = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2xy\,dx + (y^2-xz)\,dy + xz\,dz$$

الف) اگر مسیر انتگرال بردار مکان $\vec{R}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$ باشد $0\le t\le 1$

ب) اگر مسیر انتگرال پاره‌خطی از $(0,0,0)$ به $(1,0,0)$ روی محور xها و از $(1,0,0)$ به $(1,1,0)$ موازات محور yها و از $(1,1,0)$ به $(1,1,1)$ موازات محور zها باشد.

حل الف:

$$x=t \rightarrow dx=dt \quad , \quad y=t^2 \rightarrow dy=2t\,dt \quad , \quad z=t^3 \rightarrow dz=3t^2\,dt$$

$$I = \int_0^1 (2t\,t^2\,dt + (t^4-t^4)\,2t\,dt + t^3(3t^2)\,dt) = \int_0^1 (4t^3+3t^5)\,dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

MICRO

Scanned by CamScanner

Subject :

ب) فرض کنید C_1 پاره‌خط واصل مبدأ به $(1,0,0)$ و C_2 پاره‌خط واصل $(1,0,0)$ به $(1,1,0)$ و C_3 پاره‌خط واصل $(1,1,0)$ به $(1,1,1)$ باشد. آنگاه معادلات پارامتری C_1 و C_2 و C_3 عبارتند از:

$C_1: x=t,\ y=0,\ z=0 \quad 0\le t\le 1$

$C_2: x=1,\ y=t,\ z=0 \quad 0\le t\le 1$

$C_3: x=1,\ y=1,\ z=t \quad 0\le t\le 1$

$$\int_C f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds + \int_{C_3} f\,ds$$

$$\int_0^1 1\cdot t\,dt + \int_0^1 4t^2\,dt + \int_0^1 2t\,dt = \frac{5}{2}+\frac{4}{3}+1 = \frac{23}{6}$$

نکته: همانطور که مشاهده کردید انتگرال منحنی الخط به مسیر انتگرال گیری بستگی دارد (البته تحت شرایطی این انتگرال مستقل از مسیر است.)

فرض کنیم ذره‌ای تحت اثر نیروی متغیر F (که ممکن است برآیند از نیروهای جاذبه، اصطکاک و غیره باشد) در طول منحنی C از نقطه‌ی A به B جابجا شود در اینصورت کار انجام شده توسط نیروی F در طول منحنی C عبارت است از

$$W = \int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$$

نکته: اگر تابع $f(x,y,z)$، چگالی مادی باریک به شکل منحنی C باشد آنگاه انتگرال منحنی الخط $\int_C f\,ds$ برابر با جرم مادی است.

Scanned by CamScanner

Subject : Date

نکته: هرگاه $\vec{V}(x,y) = V_1(x,y)\vec{i} + V_2(x,y)\vec{j}$ یک میدان برداری پیوسته باشد و $\vec{n}$ بردار یکانی قائم بر C به طرف خارج باشد آنگاه $\int_C (\vec{V}.\vec{n})ds$ را شار $\vec{V}$ در طول C (یا روی منحنی C) می نامیم.

- انتگرال منحنی الخط میدان های برداری با پتانسیل (گرادیان)

فرض کنیم میدان نیروی $\vec{F}$ بر ناحیه D تعریف شده باشد شرط لازم و کافی برای آنکه $\int_C \vec{F}.d\vec{R}$ (C مسیری در D است) به مسیر بستگی نداشته باشد (پتانسیل یا گرادیان باشد) آنست که F میدان گرادیان باشد یعنی تابع مشتق پذیری چون U باشد که $\vec{F} = \nabla U$ (U تابع پتانسیل گویند) در حالت خاص که $D \subseteq R^2$ و $\vec{F} = (P,Q) : D \to R^2$ میدانی با مشتقات جزئی پیوسته بر D باشد آنگاه F میدان گرادیان است اگر و تنها اگر $P_y = Q_x$

و در حالتی که D زیر مجموعه فضای ۳ بعدی، $D \subseteq R^3$ ، $\vec{F} = (P,Q,R) : D \to R^3$ میدانی با مشتقات جزئی پیوسته بر D باشد آنگاه F میدان گرادیان است اگر و تنها اگر: $P_y = Q_x$ $P_z = R_x$ ، $Q_z = R_y$

MICRO

Scanned by CamScanner

مثال: میدان نیروی $\vec{F}(x,y) = (y^2+2x)\vec{i} + (2xy+x^2)\vec{j}$ بر R^2 تعریف شده است

$P = y^2 + 2xy \rightarrow P_y = 2y + 2x$

$Q = 2xy + x^2 \rightarrow Q_x = 2y + 2x \rightarrow P_y = Q_x$ ودارسیم :

بنابراین این میدان پایستار است. درنتیجه کار انجام شده ست تأثیر این نیرو در مسیرهای زیر باهم برابر است.

$C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$ $\qquad C_2 = \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^2 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$ $\qquad C_3 = \begin{cases} x = 2t \\ y = \text{tant} \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{1}{4}$

تمرین: نشان دهید که کار انجام شده در مسیرهای فوق ست تأثیر نیروی مثال بالا برابر ۲ است.

$$W = \int_C \vec{F}.d\vec{R} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

$$= \int_0^1 (t^2+2t^2)\,dt + (2t^2+t^2)\,dt = \int_0^1 4t^2\,dt = 2 \qquad \begin{vmatrix} x = t \Rightarrow dx = dt \\ y = t \Rightarrow dy = dt \end{vmatrix}$$

$$\int_0^1 dt = 1 \rightarrow \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1$$

نکته: می توان نشان داد که اگر میدان پایستار F در اطراف تابع مشق پذیر U (پتانسیل) باشد آنگاه کار انجام شده برای توان از فرمول $U(B) - U(A)$ به دست آمد که A نقطه ی ابتدای مسیر و B نقطه انتهای مسیر است. (کار انجام شده در هر مسیر بسته توسط میدان نیروی پایستار برابر صفر است)

Scanned by CamScanner

مثال: کار انجام شده را برای مثال قبل را با استفاده از نکته بدست آورید.

$F = \nabla \vec{U}$

$\frac{du}{dx} = P \rightarrow \frac{du}{dx} = y^2 + 2xy \rightarrow$

$\frac{du}{dx} = P$

$u(x,y) = xy^2 + x^2 y + f(y)$

$\frac{du}{dy} = Q$

$\frac{du}{dy} = Q \rightarrow 2xy + x^2 \cdot f'(y) = 2xy + x^2$

$\rightarrow f'(y) = 0 \rightarrow f(y) = C$

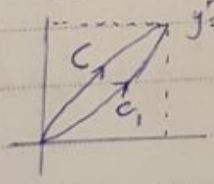
$U(x,y) = xy^2 + x^2 y + C$ $\quad W = U(1,1) - U(0,0) = (1+1) - (0+0) = 2$

مثال: مطلوب است محاسبه کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y) = 2xy\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j}$ وقتی ذره از کمان روی سهمی $x = y^2$ از مبدأ تا (1,1) حرکت کند.

$W = \int_C 2xy\,dx + (x^2 + y^2)\,dy$

$\frac{dP}{dy} = 2x = \frac{dQ}{dx}$ چون

لذا می‌توان محاسبات را ساده‌تر نمود و مسیر انتگرال‌گیری را پاره‌خط C_1 واصل مبدأ مختصات به (1,1) اختیار نمود.



$C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$ برای این

$W = \int_0^1 (2t^2 dt + 2t^2 dt) = \frac{4}{3}$

$\frac{dV}{dx} = P \rightarrow \frac{dV}{dx} = 2xy \rightarrow U(x,y) = x^2 y + f(y)$

Scanned by CamScanner

$$\frac{dU}{dy} = Q \rightarrow x^2 + f'(y) = x^2 y^2 \rightarrow f(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$$

$$U(x,y) = x^2 y + \frac{1}{2}y^2 + C$$

$$W = U(1,1) - U(0,0) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - (0+0) = \frac{3}{2}$$

مثال: مطلوب است حاصل $\oint (2x+y)\,dx + (x-y)\,dy$ در طول منحنی $y = 4 - x^2$

حل: $\frac{dP}{dy} = 1 \neq \frac{dQ}{dx}$

میدان بااستاردو برگه بیضی نیست لذا مقدار انتگرال برابر صفر است.

قضیه گرین:

فرض کنید R یک ناحیه‌ی منظم در صفحه‌ی xy باشد که به منحنی ساده و بطور قطعه‌ای هموار C محدود است و C دارای جهت مثبت متعارف است. اگر توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ پیوسته و دارای مشتق جزئی مرتبه اول $\frac{dQ}{dx}$ و $\frac{dP}{dy}$ پیوسته در ناحیه‌ی شامل R باشند آنگاه:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA$$

Scanned by CamScanner

Subject : Date

نتیجه: اگر R یک ناحیه منظم در صفحه‌ی xy و محصور به منحنی ساده و به طور قطعه‌ای هموار C باشد و C دارای جهت مثبت متعارفی باشد:

$$\text{مساحت ناحیه } R = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

اثبات: در قضیه گرین فرض کنید $P(x,y) = -y$ ، $Q(x,y) = x$

$$\iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA = \iint_R (1-(-1))\,dA = 2\iint_R dA = 2(\text{مساحت ناحیه } R)$$

$$\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \xrightarrow{\text{قضیه گرین}} \frac{1}{2}\iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA = \text{مساحت ناحیه } R$$

مثال: انتگرال زیر را در صورتی حساب کنید که C مرز با جهت مثبت $\frac{1}{4}$ قرص $R: x^2+y^2 \le a^2$ ، $y \ge 0$ و $x \ge 0$ باشد.

$$I = \oint_C (x-y^3)\,dx + (y^3+x^3)\,dy$$

حل: شرایط قضیه گرین برقرار است بنابراین داریم:

$$I = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(y^3+x^3) - \frac{d}{dy}(x-y^3)\right) dA = 3\iint_R (x^2+y^2)\,dA$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^2 \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^4\Big|_0^a d\theta = \frac{3}{4}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{3\pi}{8}a^4$$

Scanned by CamScanner

مثال: معلوب است محاسبه مساحت بیضی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

حل: ابتدا معادله بیضی را به فرم پارامتری می نویسیم:

$$x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta \qquad ;\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\text{مساحت بیضی}: \frac{1}{2}\int_C x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta)(b\cos\theta)-(b\sin\theta)(-a\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,d\theta = \pi ab$$

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

۱- پیوستگی تابع زیر را در مبدأ بررسی کنید. ۲نمره

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^2y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$y=mx^2$

۲- مالسعیم مینیمم توابع دومتغیره ونقاط زینی

ابتدا نقاط بحران : نقاطی که f_x و f_y همزمان باهم صفر شوند

$$\Delta=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2$$

الف) $\Delta>0$ $f_{xx}>0$ مینیمم موضعی

ب) $\Delta>0$ $f_{xx}<0$ ماکزیمم موضعی

ج) $\Delta<0$ نقاط زینی

د) $\Delta=0$ آزمون نتیجه ای نمی دهد.

۳- مطلوب نقاط اکسترمم تابع:

$$f(x,y)=x^2+xy+2x+2y+5$$

$f_x=2x+y+2$ | $f_x=0\rightarrow y=1$ $P(-2,1)$

$f_y=x+2$ | $f_y=0\rightarrow x=-2$

MICRO

Scanned by CamScanner

نمایش نقطه بحرانی

$f_{xx}=2 \quad f_{yy}=0 \quad f_{xy}=1$

$f_{xx}(-2,1)=2 \quad f_{yy}(-2,1)=0 \quad f_{xy}(-2,1)=1$

$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0$ نقطه زینی است $P(-2,1)$

۴- اکسترمم های نسبی تابع های زیر را تعیین کنید. ۲/۵ نمره

$f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

$f_x=3x^2-3 \xrightarrow{f_x=0} x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$

$f_y=3y^2-12 \xrightarrow{f_y=0} y^2-4=0 \rightarrow y=\pm 2$

نقاط بحرانی $(1,2)$ و $(1,-2)$ و $(-1,2)$ و $(-1,-2)$

$f_{xx}=6x \quad f_{yy}=6y \quad f_{xy}=0$

$\Delta=\begin{vmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6x & 0\\ 0 & 6y\end{vmatrix}=36xy$

$P_1(1,2) \quad \Delta=36>0 \quad f_{xx}=6x=6>0$ موضعی Min

$P_2(1,-2)$ و $P_3(-1,2)$ $\rightarrow \Delta=36xy<0$

$P_4(-1,-2) \quad \Delta=36xy>0 \quad f_{xx}=6x=-6<0$ موضعی max

Scanned by CamScanner

Subject :

Date

۴- بردار مماس یک، بردار قائم اول، بردار قائم دوم را برای تابع برداری زیر در $t = \frac{\pi}{4}$ بیابید (کنج فرنه)

$T \qquad T(\frac{\pi}{4})$

$N \qquad N(\frac{\pi}{4})$

$B = T(\frac{\pi}{4}) \times N(\frac{\pi}{4})$

$r(t) = 2\cos t\,\vec{i} + 2\sin t\,\vec{j} + t\vec{k}$

۵- مشتق جهتی بیشینه تابع $f(x,y,z) = xe^{yz}$ را در نقطه (۲و۱و۰) در جهت بردار $\vec{A} = \vec{i} - \vec{j} + \sqrt{2}\vec{k}$ بیابید.

$$\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$$

$$\nabla f = e^{yz}\vec{i} + 2xyz\,e^{yz}\vec{j} + xy^2e^{yz}$$

$$\nabla f(2,1,0) = \vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\nabla f(2,1,0) \cdot \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{1}{2} + 0 + \sqrt{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

MICRO

Scanned by CamScanner

Subject :

تمرین: معنی سبته

۶- فرض کنید C دایره‌ی $x^2+y^2=100$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت آمده
جهت دار شده است حاصل $\oint_C (y^3+y)dx+3y^2x\,dy$

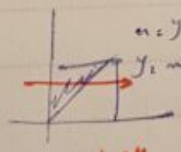
$P=y^3+y \qquad Q=3y^2x$

$$\iint_R \left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dA$$

$$\iint_R (3y^2-(3y^2+1))\,dA = -\iint_R dA = -(\text{مساحت دایره‌ی شعاع ۱۰}) = \ldots$$

۷- انتگرال دوگانه‌ی $\int_0^1\int_x^1 \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$ مرض

$y=x$
$y=1$
$0\le x\le 1$



$$\int_0^1\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx\,dy = \int_0^1 y\cdot\frac{\sin y}{y}\,dy$$

$$= -\cos y\Big|_0^1 = \ldots$$

Scanned by CamScanner

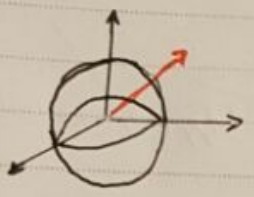
Subject :

انتگرال ۳ گانه زیبا که

۸- $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dV$ را با تبدیل به مختصات کروی حل کنید

$\int u'e^u dx = e^u + C$

$\rho^2 \le 1 \Rightarrow \rho \le 1$



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} 3\rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{\rho^3}|_0^1)\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \dots$$

۹- حجم بین دو رویه $z = x^2+y^2$ و $z = 8-x^2-y^2$ را بدست آورید

۱۰- اگر $\vec{f}(x,y) = (x^2-y^2)\vec{i} + (3+2xy)\vec{j}$ گنگ و تابع برداری f را بیابید.

و سپس $\int_C f\,dr$ را که $C: r(t) = e^t\sin t\,\vec{i} + e^t\cos t\,\vec{j}$ ، $0 \le t \le \pi$

$\frac{df}{dx} = P \to \frac{df}{dx} = 3+2xy \to f(x,y) = 3x + x^2y + U(y)$

تابع پتانسیل

$\frac{df}{dy} = Q \to x^2 + U'(y) = x^2 - 4y^2 \to U(y) = -y^4 + C$

$f(x,y) = 3x + x^2y - y^4 + C$

Scanned by CamScanner

Subject :

$C: r(t) = e^t \sin t\,\vec{i} + e^t \cos t\,\vec{j}$ نقطه ابتدای مسیر $t=0 \to r(0) = 0\vec{i} + \vec{j}$ $(0,1)$

نقطه انتهای مسیر $t=\pi \to r(\pi) = 0\vec{i} - e^{\pi}\vec{j}$ $(0,-e^{\pi})$

$\int_C F.dr = f(0,-e^{\pi}) - f(0,1) = \cdots$

انتگرال منحنی الخط زیر را حل کنید که در آن C بیضی $16x^2 + 25y^2 = 100$ است

$$I = \oint_C \frac{x^2 y}{x^2+1}\,dx - \tan^{-1} x\,dy$$

شرایط قضیه گرین برقرار است. $a=5$ $b=2$ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$I = \iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA = \int_R \int \left(\frac{-1}{1+x^2} - \frac{x^2}{x^2+1}\right) dA$$

$$-\iint_R dA = -(\text{مساحت بیضی}) = -10\pi$$

مثال: $\oint_C F.dr$ را برای $F(x,y) = (x-y)\vec{i} + x\vec{j}$ و ناحیه R محدود به دایره زیر بیابید.

$C: R(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ (دایره‌ای به شعاع ۱)

قضیه گرین $\int_C F.dr = \iint_R \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dA$

$$\iint_R (1-(-1))\,dA = 2\iint_R dA = 2(\text{مساحت دایره}) = 2\pi$$

Scanned by CamScanner

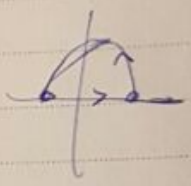
Subject :

Date

فرض کنید C از نیم دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ و محور xها در فاصله [۱،۱-] تشکیل شده باشد مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی الخط $\oint_C e^x dx + dy$

قضیه گرین

$$\oint e^x dx + x dy = \iint_R (1-0)\, dA = \frac{\pi}{2}$$



Scanned by CamScanner