وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveotamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

SUBJECT: 1

DATE: / /

۱) مقدمه

زمین هارا استاتیک: ۱) سکون بودن جسم

۲) جسم جسم مهم نیست

۳) مطالعه اجسام صلب

خروجی استاتیک ← یافتن نیروی مجهول خارجی و داخلی

«نیروهای بین اجزا را نیروهای داخلی می گویند»

۱ه تعاریف

ذره: جسمی که ابعاد آن ناچیز است. (Particle)

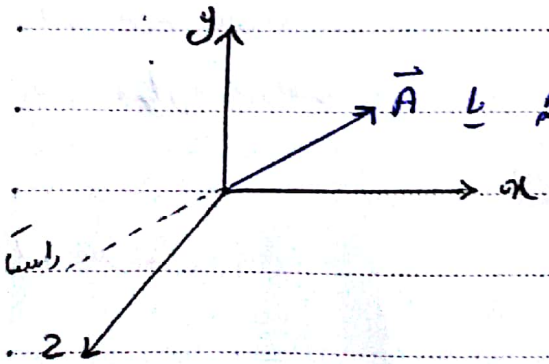
جسم صلب: حرکت نسبی بین نقاط آن قابل چشم پوشی است؛ همه نقاط با هم جابه جا می شوند. (rigid body)

۲) تعریف اسکالر

۲. تعاریف اسکالر (scalar) و بردار (vector):

الف) اسکالر ← کمیتی است که نقط دارای مقدار بوده و جهت و راستا ندارد این کمیت تنها یک مؤلفه دارد و تانسور مرتبه صفر (Tensor) نامیده می شود؛ مثل: زمان، جرم، حجم و ...

ب) بردار ← کمیتی است که: یا $\vec{A}$ یا A تیترا



دارای مقدار (magnitude) $|\vec{A}|$

دارای راستا (direction) همان امتداد بردار است

دارای جهت و سو (sense) با سوی فلش ➤ نشان داده می شود.

Scanned by CamScanner

SUBJECT: ۲ DATE: / /

مثل بردار: نیرو ـ جابجایی ـ شتاب ـ سرعت ...

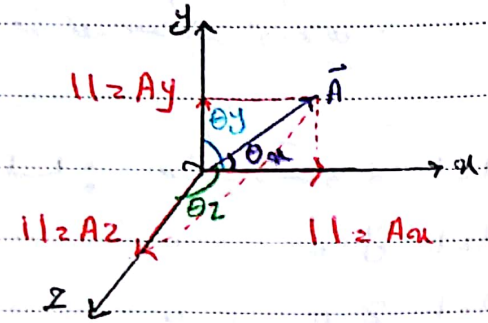
نحوه ی نمایش بردار:

الف) با استفاده از مؤلفه های مستطیلی

ب) با استفاده از بردارهای یکه دستگاه مختصات

ج) با استفاده از بردار یکه ی امتداد خود بردار

الف:



θ_x : زاویه بردار $\vec{A}$ با محور x ها

θ_y : " " y ها

θ_z : " " z ها

مؤلفه های مستطیلی:

A_x : اندازه بردارهای تصویر شده روی محور x ها $\quad A_x = |A| \cos\theta_x$

A_y : " " " " y " $\quad A_y = |A| \cos\theta_y$

A_z : " " " " z " $\quad A_z = |A| \cos\theta_z$

کسینوس های هادی:

$$\cos\theta_x = \frac{A_x}{|A|}$$

$$\cos\theta_y = \frac{A_y}{|A|}$$

$$\cos\theta_z = \frac{A_z}{|A|}$$

* نکته: با داشتن θ_x ، θ_y و θ_z به راحتی راستای یک بردار تعیین می شود.

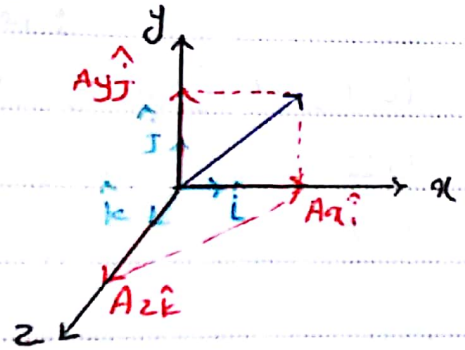
Scanned by CamScanner

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\cos\theta_x^2 + \cos\theta_y^2 + \cos\theta_z^2 = \frac{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}{|A|^2} = \frac{|A|^2}{|A|^2} = 1$$

از آن جایی که بردارهای تصویر شده در به در به هم عمود می‌شوند به مؤلفه های حاصله مؤلفه مستقیل می گویند.



ب: بردارید راستای x $\hat{i} \to |\hat{i}| = 1$

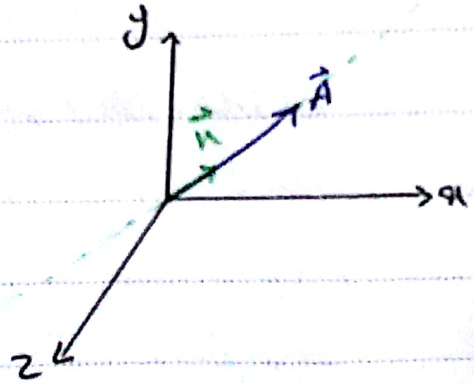
$\hat{j} \to |\hat{j}| = 1$ y " "

$\hat{k} \to |\hat{k}| = 1$ z " "

$$\vec{A} : \underbrace{A_x\hat{i}}_{\text{بردار}} + \underbrace{A_y\hat{j}}_{\text{بردار}} + \underbrace{A_z\hat{k}}_{\text{بردار}}$$

جمع بردار ها

ج:



بردارید در امتداد بردار $\vec{A}$ $\begin{cases} \vec{n} \\ |\vec{n}| = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \vec{A} = |\vec{A}|\vec{n} \\ \vec{n} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \end{cases}$$

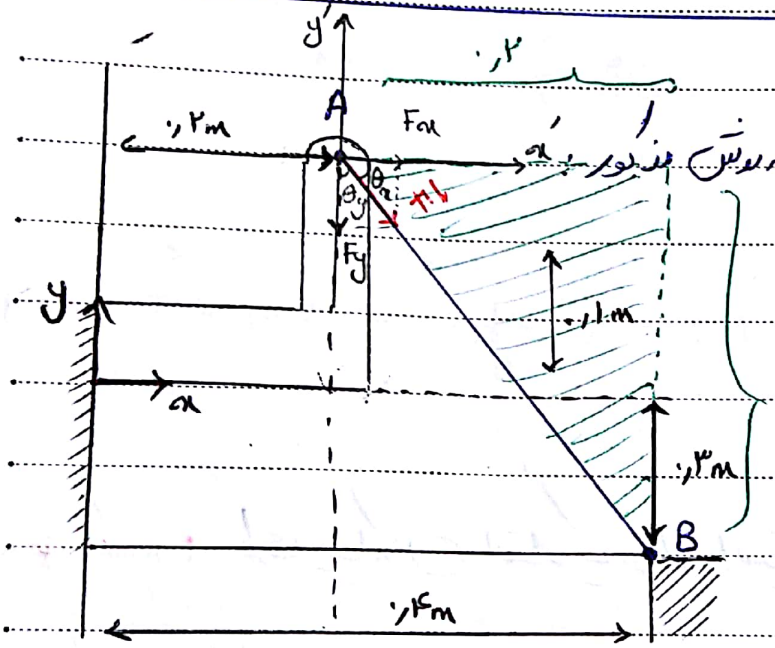
Scanned by CamScanner

$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ $\qquad \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\vec{A} = |\vec{A}|\,\vec{n}$ $\qquad \vec{n} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\cos\theta_x = \dfrac{A_x}{|A|}$ $\qquad \cos\theta_y = \dfrac{A_y}{|A|}$ $\qquad \cos\theta_z = \dfrac{A_z}{|A|}$



مثال ۱) مطلوب است تعیین بردار F به سه مولفه مذکور.

$|\vec{F}| = 800\,N$

الف) مؤلفه های مستقیل ← دستگاه مجازی می‌باشد:

$F_x = |\vec{F}|\cos\theta_x = 800\cos\theta_x = 800 \times 43,44 = 307,7$

$F_y = |\vec{F}|\cos\theta_y = 800\cos\theta_y = 800 \times 24,56 = -718,56$

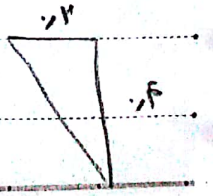
جهت $-y$

$\cos\theta_y = \sin\theta_x$ با استفاده از رابطه مثلثاتی

$\tan\theta_x = \dfrac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \dfrac{۰٫۴}{۰٫۲} = 2 \rightarrow \text{Arc}\tan\theta_x = 63,44$

$\theta = 43,44$

$\theta_y = 90 - \theta_x = 24,56$



Scanned by CamScanner

SUBJECT: ۵ Sa Su Mo Tue Wed Thu Fri DATE: / /

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \Rightarrow F = (۳۵۷,۱۷ , -۷۱۵,۱۵۷ , ۰)$

ب) $F = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} = ۳۵۷,۱۷\hat{i} - ۷۱۵,۱۵۷\hat{j}$

ج) F در راستای $\vec{AB}$ (A نقطه شروع B نقطه پایان)

$\vec{F} = |\vec{F}|\,\vec{n} = ۸۰۰\,\vec{n}$

بردارها (سنت یا یکای)

$\vec{n} = \frac{\vec{F}}{|\vec{F}|} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \frac{B-A}{|\vec{AB}|} = \frac{|۰,۴ \;\; ۰,۲| - |۰,۱ \;\; ۰,۲|}{|\vec{AB}|} = \frac{|۰,۳ \;\; ۰,۴|}{|\vec{AB}|}$

$= \frac{۰,۲\hat{i} - ۰,۴\hat{j}}{\sqrt{۰,۲^۲ + (-۰,۴)^۲}} = \frac{۰,۲}{۰,۴۴۷}\hat{i} - \frac{۰,۴}{۰,۴۴۷}\hat{j}$

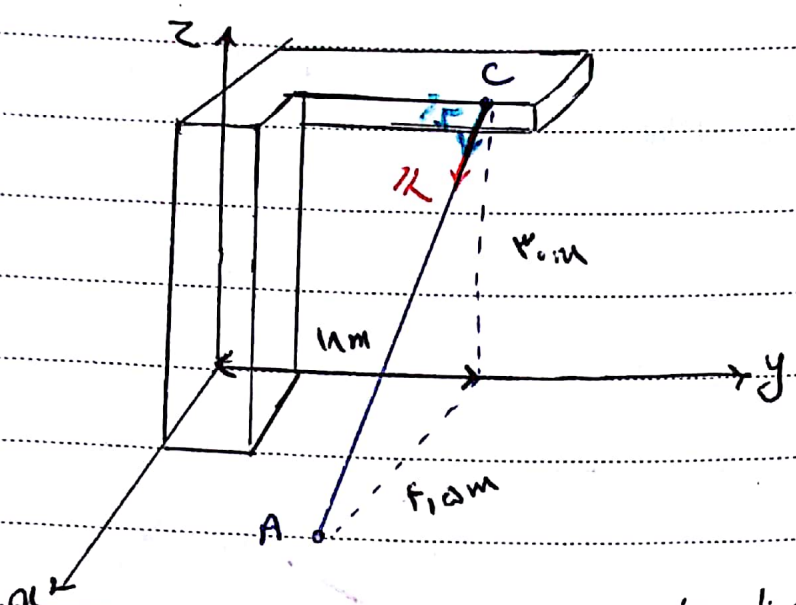
$F = ۸۰۰\left(\frac{۰,۲}{۰,۴۴۷}\hat{i} - \frac{۰,۴}{۰,۴۴۷}\hat{j}\right) = (۳۵۷,۱۷\hat{i} - ۷۱۵,۱۵۷\hat{j} + ۰\hat{k})$

* نکته: برای پیدا کردن امتداد یک بردار باید نقطه ی ابتدا و انتهای بردار طوری بیابیم که مختصات آنها معلوم باشد.

همواره سوی بردار از نقطه شروع به سمت نقطه ی پایان است.

Scanned by CamScanner

مثال ۲) مطلوب نمایش بردار T به سه روش مذکور: $|\vec{T}| = 21kN$



از آن جایی که مسئله سه بعدی است پس از این زاویه های θ_z ، θ_y ، θ_x کار چندان راحتی نیست از این رو بهتر است از روش سوم (ع) بروم

$$\vec{T} = |\vec{T}|\,\vec{n} = \frac{N}{21000}\,\vec{n}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{T}}{|T|} = \frac{\vec{CA}}{|\vec{CA}|} = \frac{A-C}{|\vec{CA}|} = \frac{\begin{vmatrix} 4.5 \\ 18 \\ 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 18 \\ 30 \end{vmatrix}}{|\vec{CA}|} = \frac{\begin{vmatrix} 4.5 \\ 0 \\ -30 \end{vmatrix}}{|\vec{CA}|}$$

$$= \frac{4.5\hat{i} - 30\hat{k}}{\sqrt{4.5^2 + (-30)^2}} = \frac{4.5}{30.33}\hat{i} - \frac{30}{30.33}\hat{k}$$

$$= 21000\left(\frac{4.5}{30.33}\hat{i} - \frac{30}{30.33}\hat{k}\right) = \underbrace{(3011.92\hat{i})}_{T_x} - \underbrace{(20771.91\hat{k})}_{T_z}$$

$$T = (3011.92,\ 0,\ -20771.91)$$

Scanned by CamScanner

SUBJECT: ✓

DATE: / /

می‌خواهیم زاویای $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ را بدست بیاوریم:

$$\cos\theta_x = \frac{T_x}{|T|} = \frac{۳۰۱۱۵,۷۲}{۲۱۰۰۰} = ۱,۴۳$$

$$\cos\theta_z = \frac{T_z}{|T|} = \frac{۲۰۷۷۱,۵۱}{۲۱۰۰۰} = ۰,۹۸$$

$$\cos\theta_x + \cos\theta_y + \cos\theta_z = ۱$$

$$۱,۴ + \cos\theta_y + ۰,۹۸ = ۱ \rightarrow \cos\theta_y = ۱ - ۱,۴ - ۰,۹۸$$

$$\cos\theta_y = -۱,۳۸$$

* نکته: استفاده از روش سوم (جمع) در مسائل سه‌بعدی از اهمیت دارد.

جمع دو بردار:

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

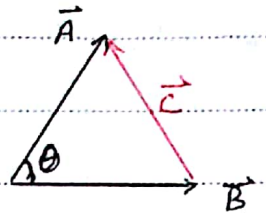
$$\vec{C} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

C_x C_y C_z

$$|C| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|A||B|\cos\theta}$$

Scanned by CamScanner

جمع دو بردار:

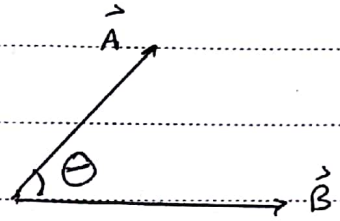


$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{i} + (A_y - B_y)\hat{j} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

C_x C_y C_z

$$|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2} = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 - 2|A||B|\cos\theta}$$

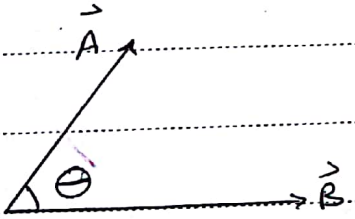
ضرب داخلی دو بردار:



عدد $E = \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x)\hat{i} + (A_y \cdot B_y)\hat{j} + (A_z \cdot B_z)\hat{k}$

$$= |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

ضرب خارجی بردار:



بردار $\vec{E} = \vec{A} \times \vec{B} =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (B_x A_z - A_x B_z)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

E_x E_y E_z

Scanned by CamScanner

E: اندازه: $|E| = |A||B| \sin\theta = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$

راستا: عمود بر صفحه گذرنده از $\vec{B}$ و $\vec{A}$

جهت: قانون دست راست

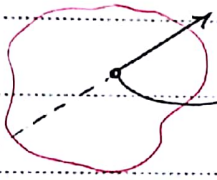
* قانون دست راست: ۴ انگشت سری بردار اول (A) و انگشت شصت جهت راستان می‌دهد.
جهت انگشتان بسته بردار (F)

۲) تعریف نیرو

۲) تعریف نیرو و گستاور:

۱-۳) نیرو (Force): کشش یک جسم در جسم دیگر نیرو نامیده می‌شود که کمیتی برداری بوده و عامل وارد جسم را در امتداد خط اثر خود جزئت دهد.

F: اندازه: $|\vec{F}|$
راستا: خط اثر نیرو
جهت



طبقه‌بندی نیرو:

تمرکز: سطحی که نیرو بر آن وارد می‌شود در مقایسه با سایر ابعاد جسم کوچک است ← نیرو ← دسته‌ی اول ← می‌توان نیرو را در یک نقطه متمرکز دانست.

گسترده:

نیروی حجمی: از کشش نیروهای دوردست مانند نیروی گرانش

نیروی خارجی: مضاعیس ... تولید می‌شود. این نیرو بر جرم ذرات تشکیل دهنده جسم اثر می‌کند

نیروی سطحی: از تماس فیزیکی بین دو جسم حاصل می‌شود ← نیرو ← دسته‌ی دوم

نیروهای داخلی: نیروهای بین ذرات درون اجزای یک جسم

Scanned by CamScanner

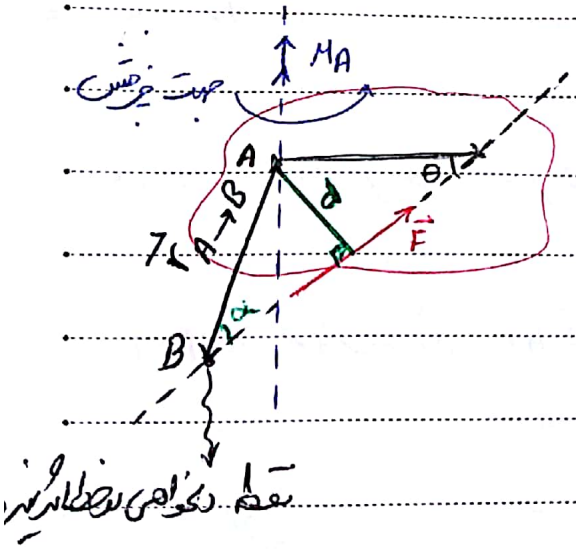
۲-۳) گشتاور:

(Torque ـ moment ـ لنگر ـ نیروان)

عامل مؤثر برای دوران دادن یک جسم حول یک محور را "گشتاور" گوییم؛ محور دوران با بردار نیرو متقاطع یا خط اثر نیرو موازی با آن نباشد. به عنوان مثال هنگام سفت کردن یک پیچ توسط آچار نیرو اعمال شده از طرف دست به آچار متمایل به چرخش آچار حول محور پیچ دارد.

گشتاور یک نیرو:
- الف) حول یک نقطه
- ب) حول یک محور
- ج) سیستم کوپل ـ نیرو در یک نقطه
- د) سیستم نیروی معادل
- و) تقسیم‌بار نیوتن

الف) حول یک نقطه:



$$\vec{M} = \vec{r}_{A\to B} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

گشتاور F حول نقطه A

Scanned by CamScanner

فاصله عمودی نقطه گشتاورگیری تا خط اثر نیرو ← d

M: { اندازه: $|\vec{M_A}| = |\vec{F}|\,|\vec{r}|\sin\alpha$ (یا نوع گشتاورگیری)
راستا: عمود بر صفحه گذرنده $\vec{F}$ و $\vec{r}$
جهت: قانون دست راست }

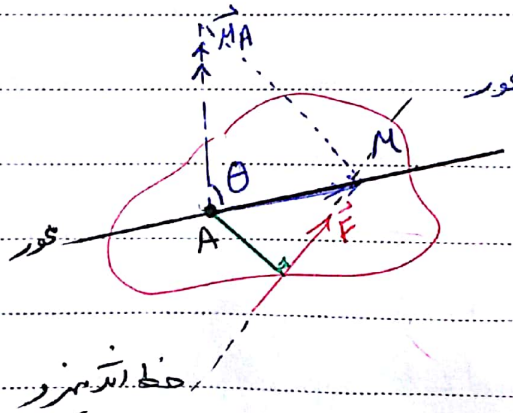
* قانون دست راست: کف دست را روی نقطه گشتاورگیری قرار می‌دهیم ۴ انگشت روی $\vec{r}$ و به سمت $\vec{F}$ می‌خوابانیم.

نکته ← اگر بردار $\vec{r}$ دیگری رسم می‌کردیم باز هم با روی گشتاورگیری یعنی فاصله عمودی نقطه گشتاورگیری تا خط اثر نیرو همان d بود. (اگر d= گشتاور صفر تولید نمی‌شود.)

* ب) حول یک محور دلخواه:

گام اول ← نقطه‌ای دلخواه بر روی محور در نظر گرفته و گشتاور F را حول آن نقطه برحسب می‌آوریم.

گام دوم ← بردار گشتاور $(\vec{M_A})$ بر روی محور مورد نظر تصویر می‌کنیم.



گشتاور F حول محور (تصویر بردار محور)

خط اثر نیرو

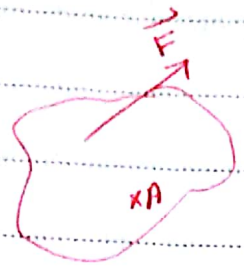
$|\vec{M}| = |\vec{M_A}|\cos\theta$

$\vec{n}\cdot\vec{M_A} = |\vec{n}|\,|\vec{M_A}|\cos\theta \rightarrow |\vec{M}| = \vec{n}\cdot\vec{M_A}$

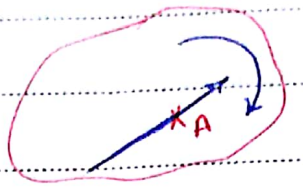
بردار یکه

Scanned by CamScanner

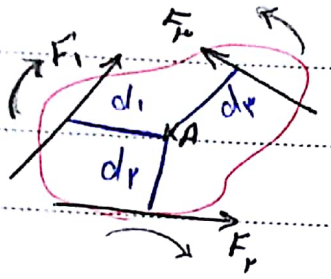
ج) سیستم کوپل نیرو دیگر نقطه:



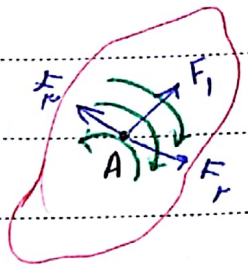
انتقال به A



$|M| = |F| d$



انتقال

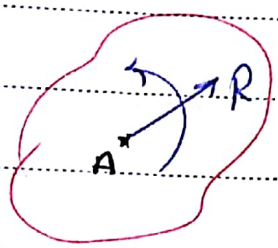


$|M_1| = |F_1| d_1$

$|M_2| = |F_2| d_2$

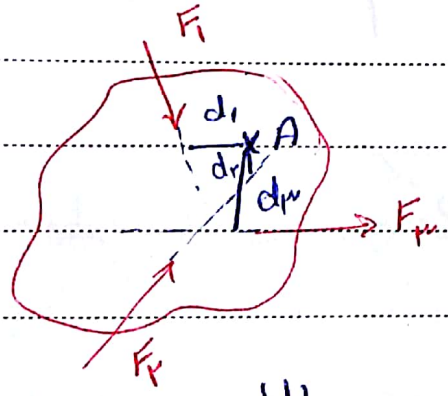
$|M_3| = |F_3| d_3$

$=$



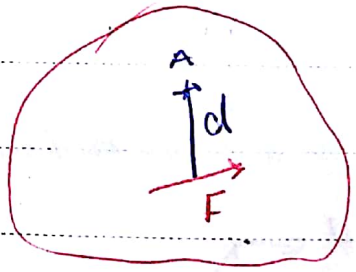
$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \\ \vec{M}_{total} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 \end{cases}$$

د) سیستم نیرویی معادل:



(۱)

$\equiv$



(۲)

برآیند $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$

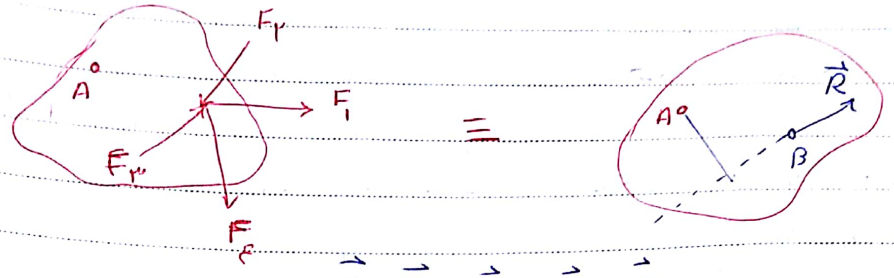
برآیند $\vec{M}_{A_1} = \vec{M}_{A_2}$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}$

$\vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \vec{m}_3 = \vec{m}$

Scanned by CamScanner

۷) قضیه وارینون: Varignon's theorem

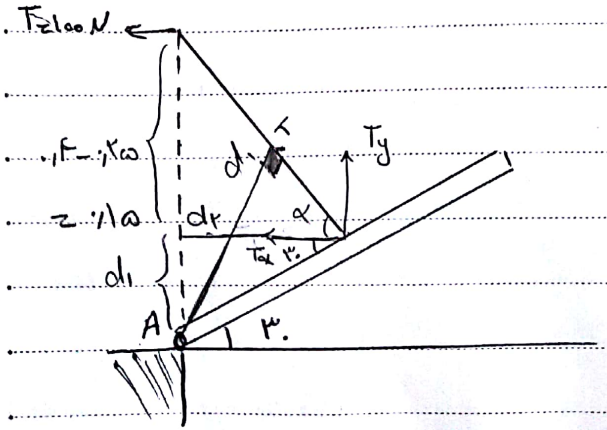


$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4$$

کاربرد قضیه وارینون: به جای آنکه نیروها را مستقیماً حول نقطه دلخواه بدست آوریم می‌توانیم آنها را تجزیه کرده و گشتاور تک تک مؤلفه‌ها را حول نقطه مورد نظر بدست آوریم که در غایت ممنون هستم.

مثال: مطلوب است تعیین گشتاور نیروی طناب T حول نقطه A:



Scanned by CamScanner

$|M| = d|\vec{T}|$ جهت چرخش ← $\vec{M}$ به سمت بیرون ← شرح اول

$T_x = T\cos\alpha = 10\cos\alpha = 10\cos 19,3 = 9,43N$ قضیه وارینون:

$T_y = T\sin\alpha = 10\sin\alpha = 10\sin 19,3 = 3,3N$

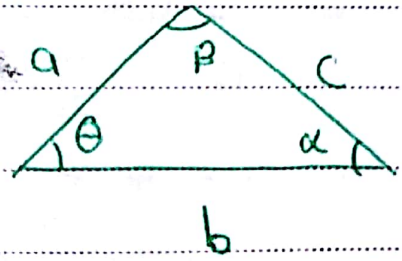
$d_1 = 0,5\sin 30 = 0,25$

$d_2 = 0,5\cos 30 = 0,43$ $\quad \tan\alpha = \frac{0,15}{0,43} = 19,3 = \alpha$

$|M_1| = T_x d_1$

$|M_2| = T_y d_2$ $\Rightarrow$ $|M_A| = T_x d_1 \oplus T_y d_1$

جون هر دو در جهت مثبت z می‌باشند



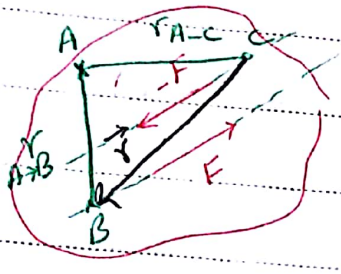
یک رابطه کاربردی ←

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Scanned by CamScanner

کوپل : زوج نیرو ← دو نیروی برابر که دارای راستار یکسان و اندازه‌ی یکسان بوده ولی جهت آنها با هم عکس است زوج نیرو نامیده می‌شوند.

یک نقطه دلخواه در نظر گرفته و شتاور تک تک نیروها را حول آن نقطه حاسبه می‌کنیم



$$\begin{cases} \vec{M}_1 = r_{A\to B} \times \vec{F} \\ \vec{M}_2 = r_{A\to C} \times -\vec{F} \end{cases}$$

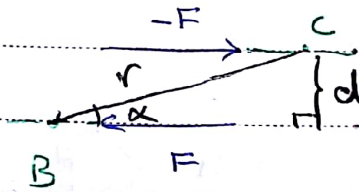
$$\vec{M}_{کل} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_{A\to B} \times \vec{F} - \vec{r}_{A\to C} \times \vec{F}$$

$$= \underbrace{(\vec{r}_{A\to B} - \vec{r}_{A\to C})}_{r} \times \vec{F}$$

اندازه : $|\vec{M}| = |F||r| \sin\alpha = |F|d$

راستا : عمود بر صفحه‌ی گذرنده $\vec{r}$ و $\vec{F}$

جهت : قانون دست راست

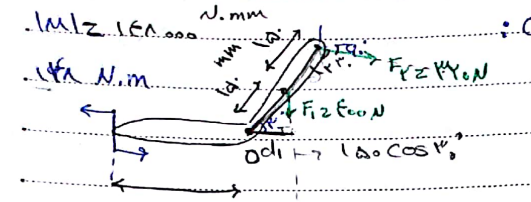


جهت چرخش

علامت کوپل ⇐

Scanned by CamScanner

مثال: مطلوب است محاسبه گشتاور پیچشی در نقطه O:



گام اول: دستگاه واحد مناسب ←

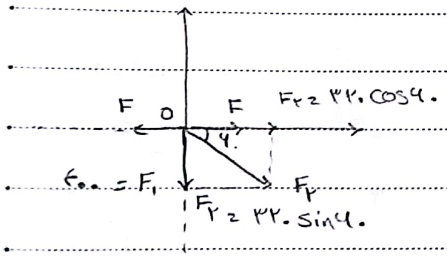
دستگاه واحد			
کمیت	متریک	میلی متر	انگلیسی
طول	m	mm	in(")
نیرو	N	N	پوند lb (lbf)
تنش (فشار)	pa	mpa	psi
جرم	kg	tone	slug
زمان	S	S	S

1 ft = 12 in

1 kips = 1000 lb

1 ksi = 1000 psi

گام دوم: انتقال نیروی به نقطه مورد نظر



$$\begin{cases} \vec{F_1} = 600\,\hat{j} \\ \vec{F_2} = 420\cos 70^\circ\,\hat{i} - 420\sin 70^\circ\,\hat{j} \end{cases}$$

$$\vec{R} = \vec{F_2} + \vec{F_1} = 420\cos 70^\circ\,\hat{i} + (-600 - 420\sin 70^\circ)\,\hat{j}$$

$$= 140\,\hat{i} - 994.13\,\hat{j}$$

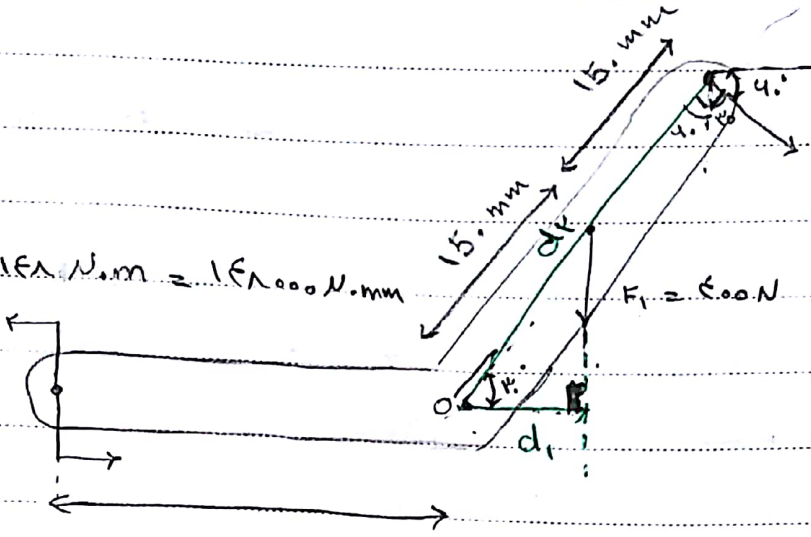
Scanned by CamScanner

گام سوم: محاسبه گشتاور برایند حاصل نیرو ها حول نقطه O انتقال آنها

$|M_{R_O}| = 16800$

$|M_4| = F_4 d_4 = 320 \times 30$

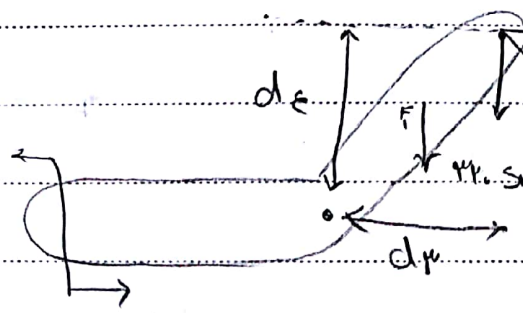
$|M_1| = F_1 d_1 = 400 \times 150 \cos 30^\circ \hat{k}$



$\vec{M}_{R_O} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 = -400 + 150 \cos 30^\circ \hat{k}$

$- 320 \times 300 \hat{k}$

$+ 168000 \hat{k} = 0$



استفاده از قضیه وارینون برای محاسبه گشتاور F_4

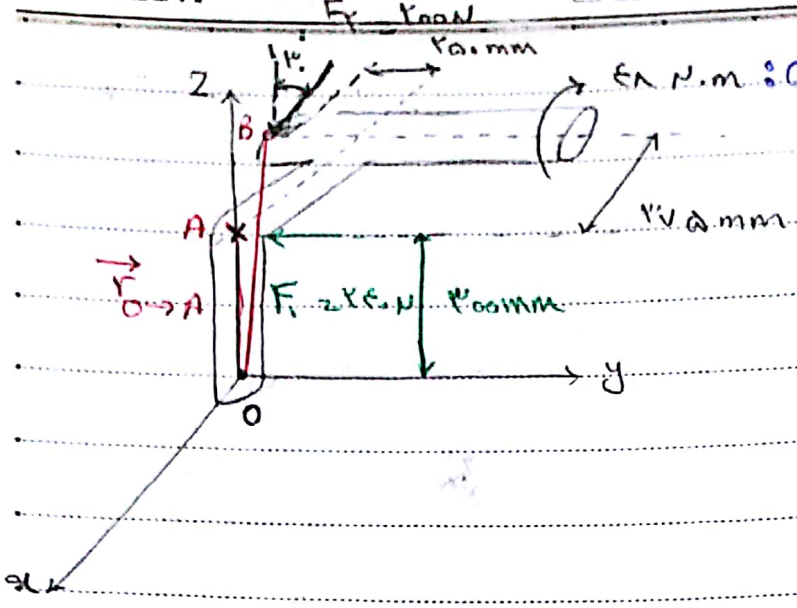
M_3 ↺ $320 \cos 9 \times 30 \sin 30$

M_1 ↻ $320 \sin 9 \times 300 \cos 30$

⇐ جمع اینها = 0

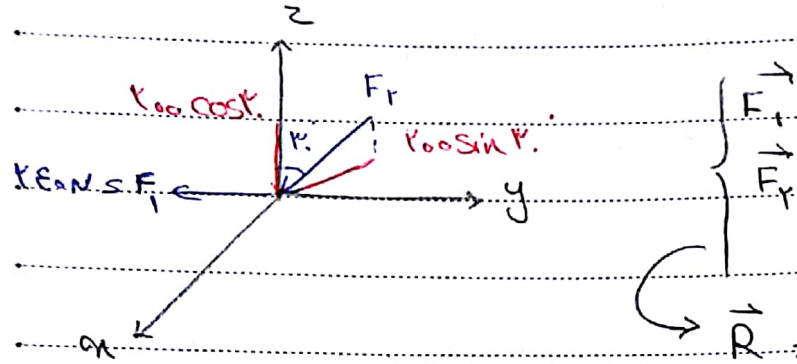
Scanned by CamScanner

SUBJECT:



گام اول: انتخاب دستگاه مناسب

گام دوم: انتقال نیرو



$$\vec{F_1} = -440\,\hat{j}$$

$$\vec{F_2} = -200\sin 30^\circ\,\hat{i} - 200\cos 30^\circ\,\hat{k}$$

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

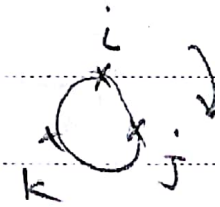
$$= 200\sin 30^\circ\,\hat{i} - 440\,\hat{j} - 200\cos 30^\circ\,\hat{k}$$

گام سوم: (در مسائل سه بعدی برای گشتاورگیری به روش برداری عمل می‌کنیم)*

$$\vec{M}_R = -48000\,\hat{j}$$

$$* \vec{M}_1 = \vec{r}_{O\to A} \times \vec{F} = 300\,\hat{k} \times -440\,\hat{j}$$

$$= 300 \times 440\,\hat{i}$$



$$* \vec{M}_2 = \vec{r}_{O\to B} \times \vec{F} = (300\,\hat{k} - 375\,\hat{i} - 25\,\hat{j}) \times (200\sin 30^\circ\,i - 200\cos 30^\circ\,\hat{k})$$

برای بدست آوردن $\vec{r}_{O\to B}$ سر را به دم وصل می‌کنیم

Scanned by CamScanner

$$\vec{M}_r = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -۳۷۵ & -۲۵ & ۴۰۰ \\ ۲۰۰\sin۴۰ & 0 & -۲۰۰\cos۴۰ \end{vmatrix} =$$

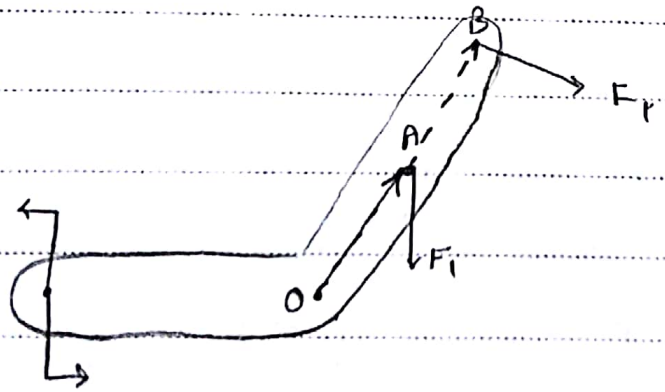
$$= ۴۳,۳\times۱۰^{-۳}\,\hat{i} - ۴۴,۹۵\times۱۰^{۳}\,\hat{j} + ۲۵۰۰۰\,\hat{k}$$

$$\vec{M}_{ob} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$$

$$(۳۰۰\times۲۴۰\sin۴۰ + ۴۳,۳\times۱۰^{-۳})\,\hat{i}$$
$$+ (-۴۸۰۰۰ - ۴۴,۹۵\times۱۰^{۳})\,\hat{j}$$
$$+ ۲۵۰۰۰\,\hat{k}$$

نکته: بهتر است در مسائل سه بعدی برای محاسبه‌ی گشتاور از روش برداری بروم

تمرین: شکل مقابل از روش برداری حل کنید.



$$\vec{M}_1 = \vec{r}_{O\to A} \times \vec{F}_1$$

$$= (۱۵۰\cos۴۰\,\hat{i} + ۱۵۰\sin۴۰\,\hat{j}) \times (-۴۰۰\,\hat{j})$$

Scanned by CamScanner

$$\vec{M_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 150\cos 30^\circ & 150\sin 30^\circ & 0 \\ 0 & -400 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_1} = 150\cos 30^\circ \times 400\ \hat{k}$$

$$\vec{M_2} = \vec{r}_{O\to B} \times \vec{F}_2 = 300\ \hat{k} \times -320\ \hat{j}$$

$$\vec{M_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 300 \\ 0 & -320 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M_2} = -320 \times 300\ \hat{i}$$

$$\vec{M_3} = 124000\ N\,mm$$

قوانین نیوتن:

اگر معادل

قانون اول ← اگر برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر یک جسم صفر باشد، آن جسم در حالت سکون باقی می‌ماند یا با سرعت ثابت در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند.

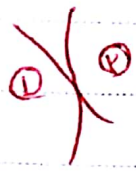
$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum m_{z0} = 0 \end{cases}$$ ← حول هر نقطه دلخواه

قانون دوم: شتاب حرکت یک ذره با نیروی برآیند وارد بر آن متناسب است.

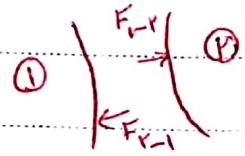
$$\begin{cases} \sum F = m\vec{a} \\ \sum M = I\alpha \end{cases}$$ ← برای حول اینرسی جرم

Scanned by CamScanner

قانون سوم ← نیروهای کنش و واکنش بین اجسامی که بر یکدیگر تاثیر متقابل می‌گذارند.



از نظر مقدار راستا با هم برابر بوده ولی جهت شان مخالف است.



تعادل: در این حالت قانون اول نیوتن حاکم است هدف از استاتیک بررسی اجسام در حالت سکون است شرط لازم و کافی برای تعادل بودن جسم عبارت اند از:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

$$M_O = \sum M = 0 \Rightarrow \sum M_x \vec{i} + \sum M_y \vec{j} + \sum M_z \vec{k} \rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$

← برای اعمال شرایط تعادل گام های زیر بایستی طی شود:

گام اول: رسم دیاگرام آزاد free_body diagram

۱) جدا کردن جسم از محیط اطراف خود به طوری که کاملاً جدا شده و قابل حرکت کردن باشد.

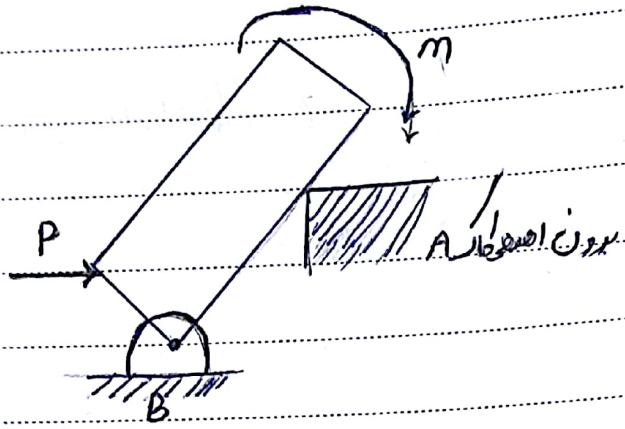
۲) اعمال نیروها و گشتاورها به قطعه جدا شده { نیروهای وزن / نیروهای تکیه گاه / سایر نیروها و گشتاورها }

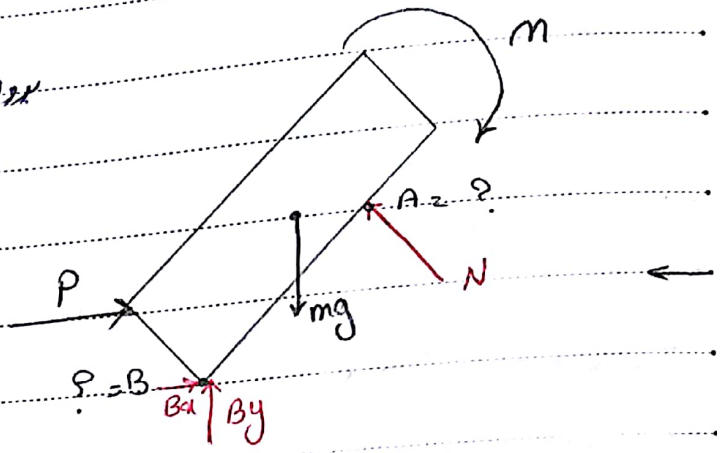
Scanned by CamScanner

گام دوم ← محاسبه برآیند نیروهای موثر بر جسم و برابر صفر قرار دادن آن $\sum \vec{F} = 0$

گام سوم ← محاسبه برآیند گشتاور های حاصل به نقطه دلخواه و برابر صفر قرار دادن آن $\sum \vec{M} = 0$

نحوه رسم دیاگرام آزاد:



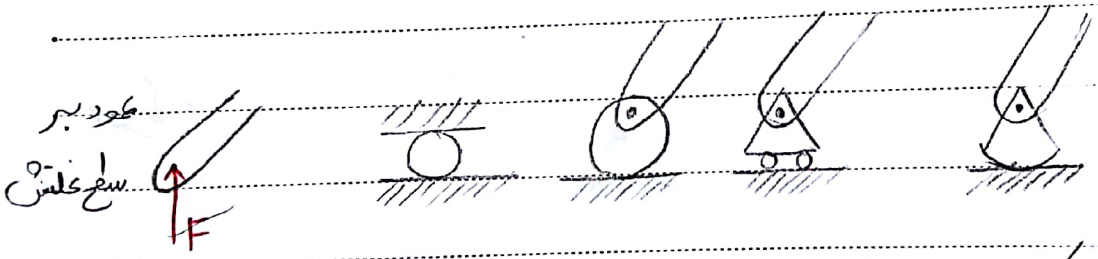


انواع تکیه گاه (قیود):

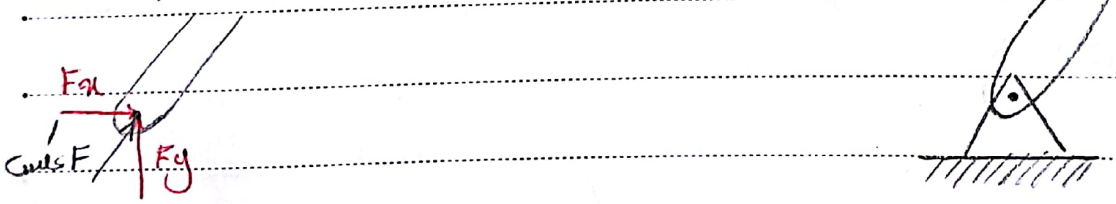
تکیه گاه ها ایجاد قید کرده و مانع از حرکت جسم در یک یا همه جهات می‌شود. قید یعنی ایجاد محدودیت در حرکت و واکنش تکیه گاه ها امکان حرکت نخواهد داشت.

دوبعدی ←

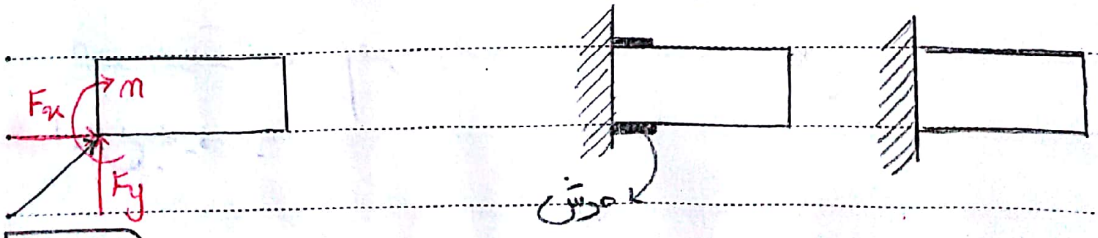
غلتک:



پین یا مفصل:

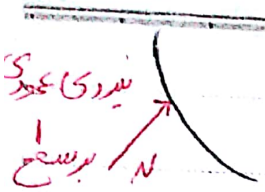


گیردار:



Scanned by CamScanner

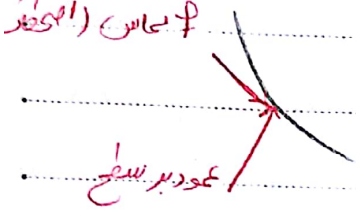
سطح سیقلی (بدون اصطکاک):

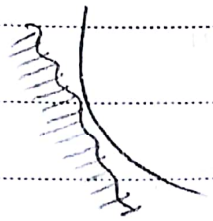




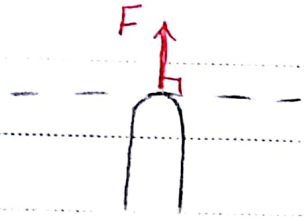
(صاف)

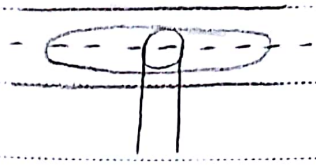
سطح زبر (دارای اصطکاک):



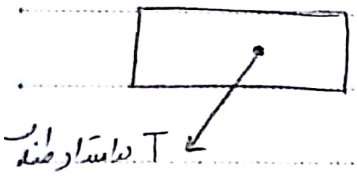


نخ نرمه:

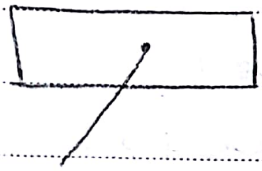




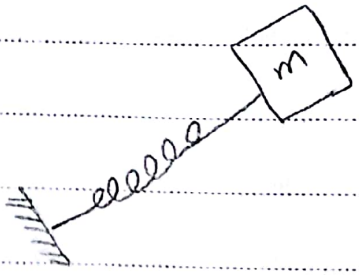
طناب، کابل، زنجیر یا تسمه:

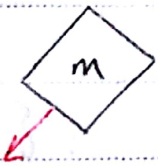


نیروی کشش طناب



فنر:



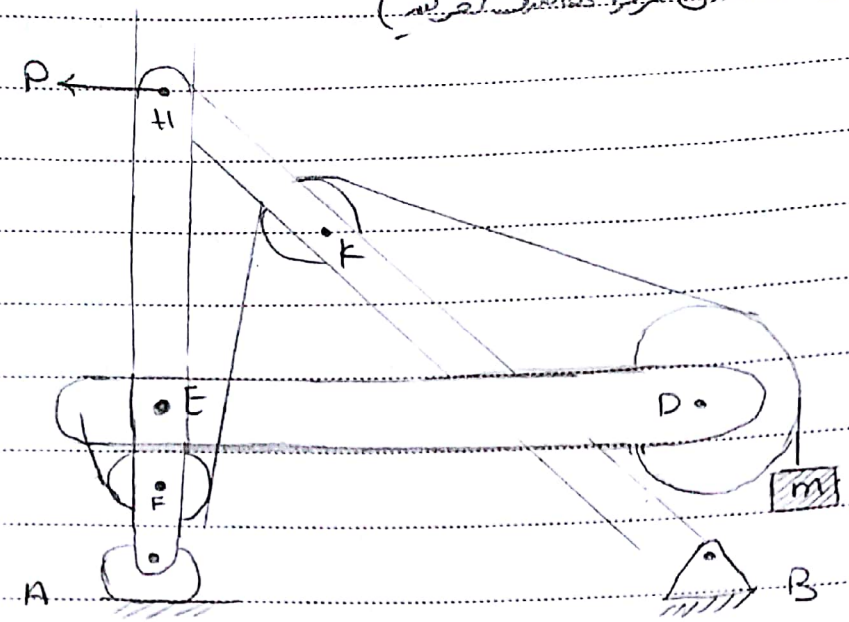


نیروی فنر

نکته ← جهت نیروها و کشش‌هایی که نمی‌دانیم دلخواه می‌گذاریم و در نهایت با حل مسئله جهت درست معلوم می‌شود.

Scanned by CamScanner

مطلوب است دیاگرام آزاد: (مثل قرقره حاصل نظریم)



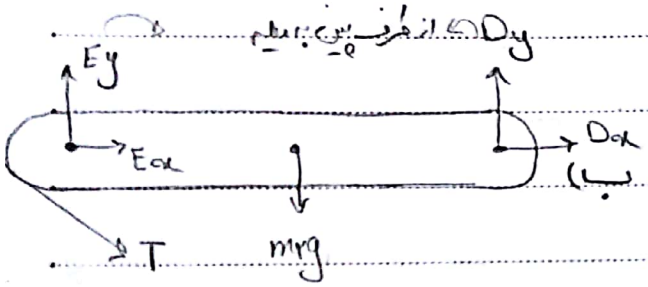
الف) کل مجموعه

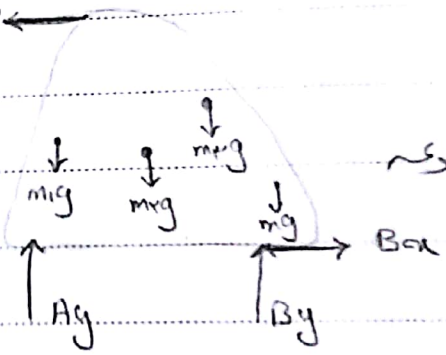
ب) میله ED

ج) میله HA

د) میله HB

ه) قرقره (۱)



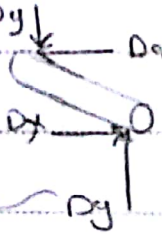


الف) کل مجموعه

و) * بدنه D باید برعکس (عمل و عکس العمل هستیم) عمل بیاشه



از طرف بین به قرقره



از طرف میله ED به بین D

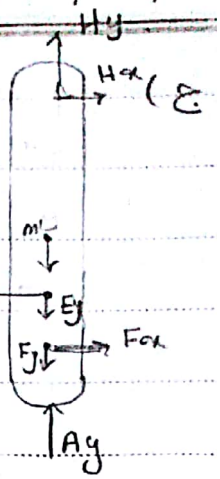
(دیاگرام آزاد بین D):

(* عدد)

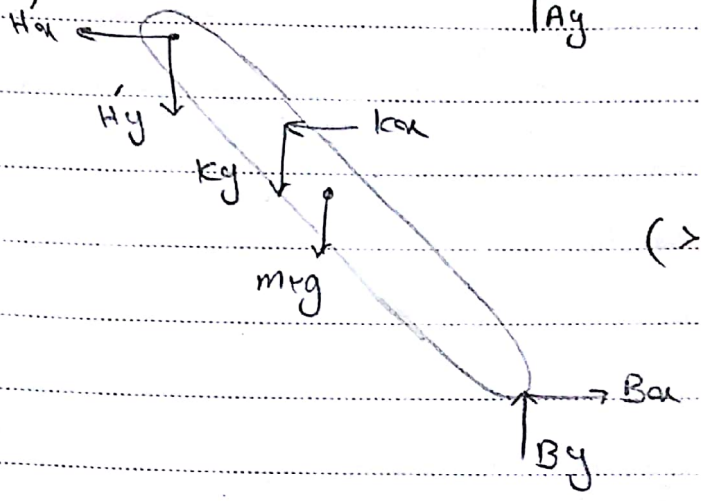
از طرف قرقره به بین D

Scanned by CamScanner

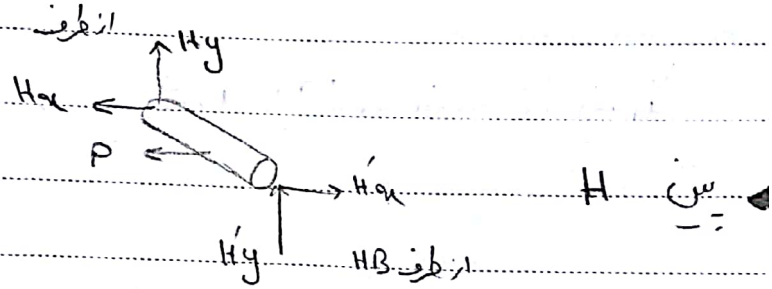
P به پین H وارد می شود نه به خود میله



نقطه E باید حمل و عکس العمل نداشت



از طرف AH به پین



$H_x \neq H'_x$

پین H

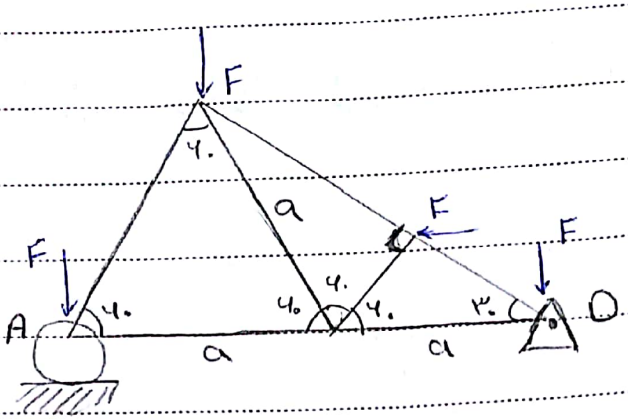
از طرف HB به پین

نتیجه: از آن جایی که پین H نیروی خارجی وارد شده است پس توان عکس العمل پین را دو میله AH و BH یکسان در نظر گرفت.

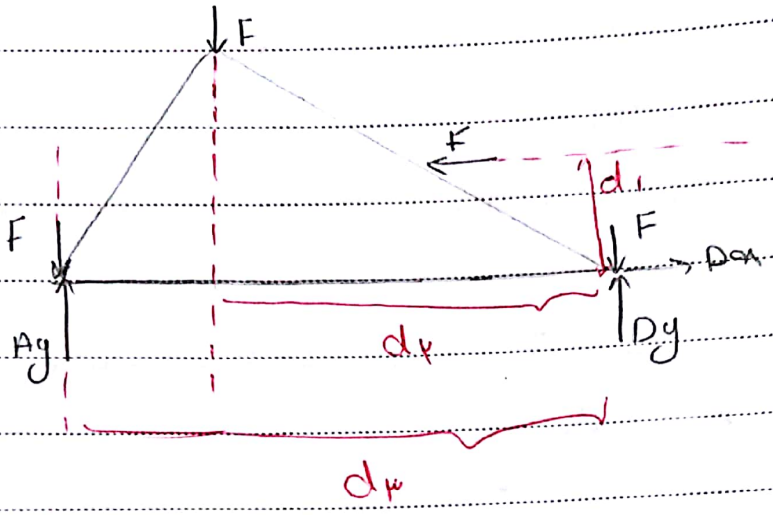
Scanned by CamScanner

مطلوب است تعیین واکنش تکیه‌گاه‌های A و D در سازه نشان داده شده:

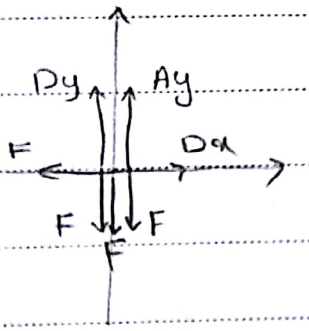
از روش اصل صرفه‌نظر شود.



گام اول ⇐ تبدیل دیاگرام طی



گام دوم ⇐ محاسبه برآیند نیروها و محل قرار دادن آنها



به محض آنکه جواب مجهول است شود یعنی جهت انتخابی آنها درست است

درغیراین صورت جهت اشتباه بوده و باستی اصلاح شود

$$\vec{R} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j}$$

$$\sum F_x = D_x - F_2 \rightarrow D_x = F$$

$$\sum F_y = D_y + A_y - 3F = 0 \rightarrow D_y + A_y = 3F$$

Scanned by CamScanner

گام سوم ← معادله برآیند "گشتاور"ها حول یک نقطه دلخواه و برابر صفر قرار می‌دهیم.

بهترین نقطه "گشتاورگیری" نقطه‌ای است که بیشترین مجهولات از آن بگذرد.

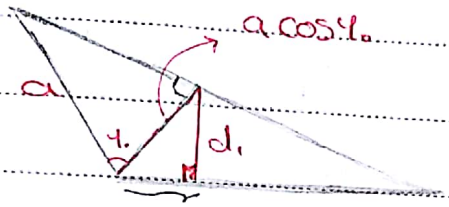
$$\overrightarrow{\Sigma} M_D = 0$$

$$\circlearrowleft Fd_1 \quad \circlearrowleft Fd_2 \quad \circlearrowleft Fd_3 \quad \circlearrowright A_y d_3$$

$$+Fd_1 + Fd_2 + Fd_3 - A_y d_3 = 0$$

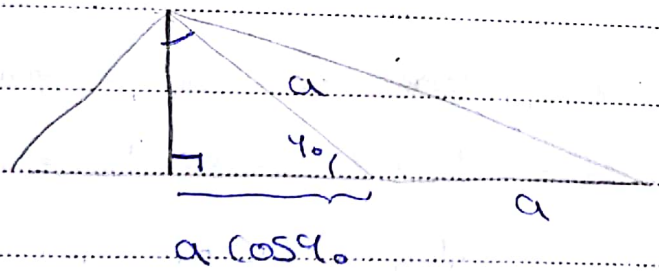
$$a\cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ + (a + a\cos 45^\circ) + 2a - 2a = 0 \rightarrow A_y = 1.94F$$

$d_1 \Rightarrow$



$d_1 = a\cos 45^\circ \cdot a\sin 45^\circ$

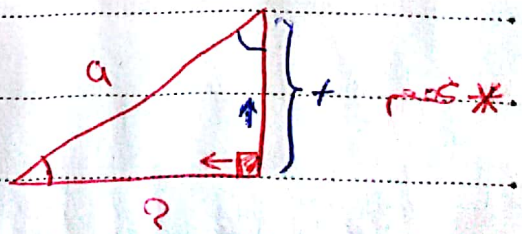
$d_2 \Rightarrow$



از آن جایی که تمامی مجهولات بدست آمده اند، جهت های فرض شده درست انتخاب شده است.

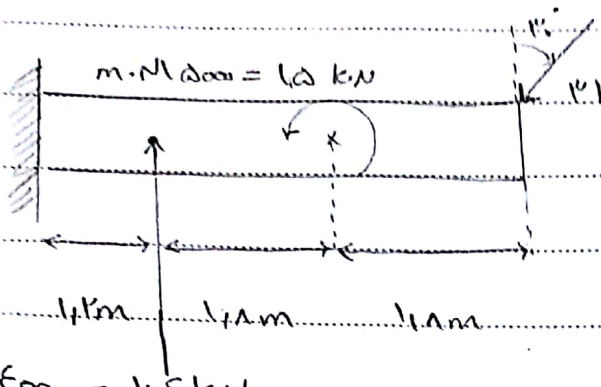
? = a cos زاویه رسم شده ۹۰ درجه

x = a sin زاویه بالای ۹۰ درجه



Scanned by CamScanner

تقاضا است تیرک کش الل شیرآلات دستشویی جرم 500kg

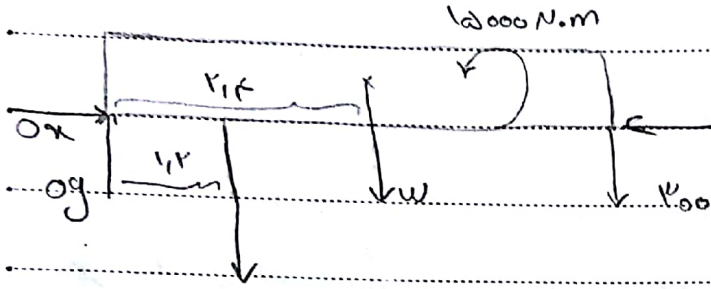


$w = mg = 500 \times 9.8$

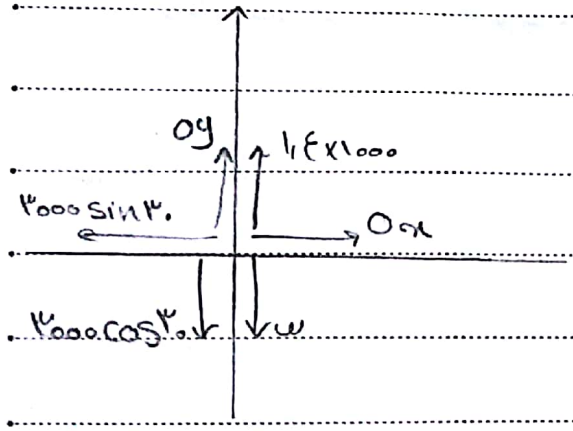
$w = 4900\ N$

گام اول ← انتخاب دستگاه و اعمال مناسب (شرایط)

گام دوم ← تعیین پارامترهای مجهول



گام سوم ← کاربرد شرط مساوی صفر قرار دادن



$\sum F_x = 0 \rightarrow O_x - 3000 \sin 30 = 0$

$O_x = 1500\ N$

$\sum F_y = 0 \rightarrow$

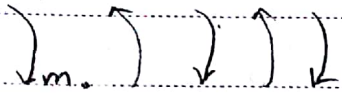
$O_y + 1.4 \times 1000 - 3000 \cos 30 - 490 = 0$

$O_y = 1103.6\ N$

Scanned by CamScanner

گام چهارم ← محاسبه برآیند گشتاورها حول یک نقطه دلخواه و برابر صفر قرار دادن آن:

گشتاور را حول نقطه O می‌گیریم



$$-m_0 + 1.2 \times 1.6 \times 1000 - 490 \times 2.4 + 1500 - 3000 \cos 30 \times 1.8 = 0$$

$$\rightarrow m_0 = -(-7642.76) \ N.m$$

جهت فرضی ←*

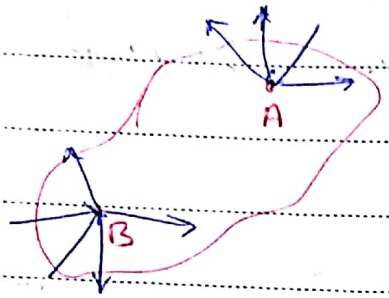
جهت فرضی → ↺ استاد برده

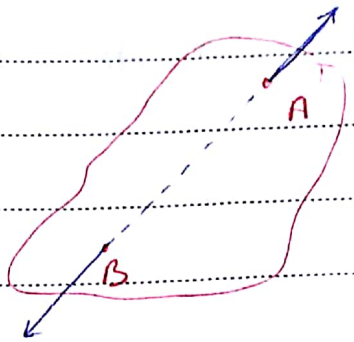
جهت درست → ↻

* علامت منفی نشان می‌دهد که جهت انتخابی m_0 اشتباه بوده است و باید برعکس شود.

Scanned by CamScanner

اعضای دو نیرویی: اعضایی که دارای دو نقطه اثر نیرو هستند اعضای دو نیرویی نامیده می‌شوند.

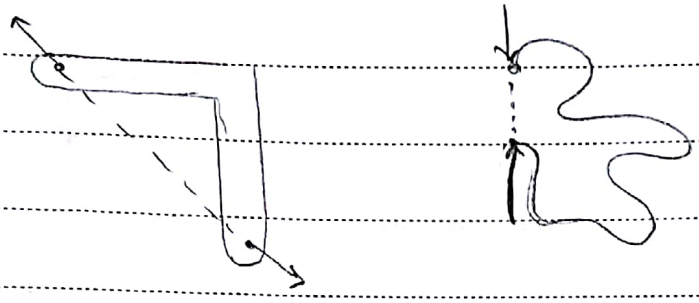




(برآیند نیروها از نقطه A)

R_B (برآیند نیروها از نقطه B)

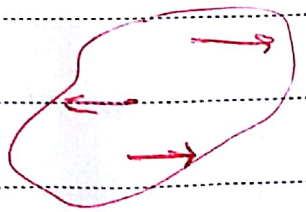
بدیل تعادل: $R_A = -R_B$

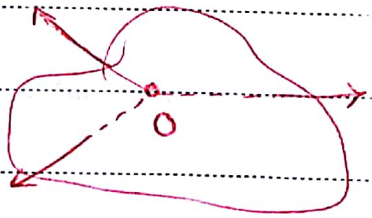


اعضای سه نیرویی: اعضایی که دارای سه نقطه اثر نیرو هستند اعضای سه نیرویی نامیده می‌شوند.

در این صورت دو حالت زیر پیش می‌آید: ۱) برآیند نیروها در سه نقطه اثر بر آن هم صفر هستند

۲) در یک نقطه هم متقاطع خواهند بود.



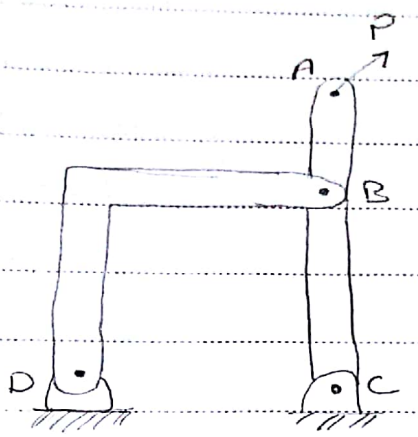


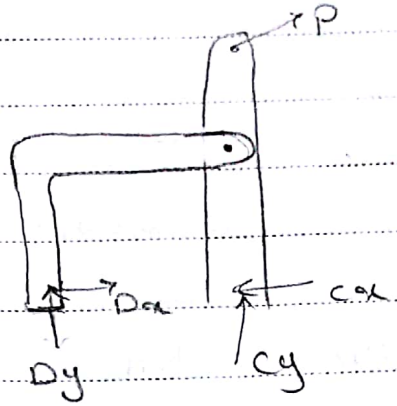
هم‌رس

Scanned by CamScanner

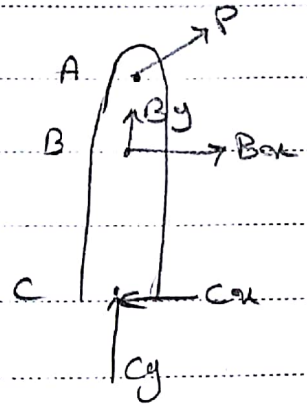
مثال: مطلوب است رسم دیاگرام آزاد

الف) کل مجموعه ب) میله BD ج) میله ABC

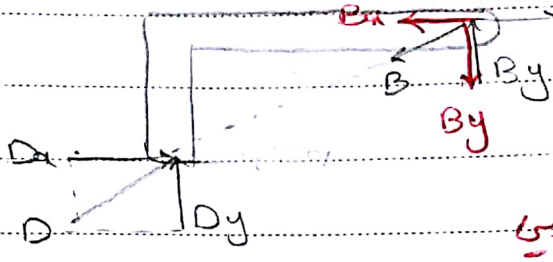




الف)



ج)



ب)

عضو دو نیرویی

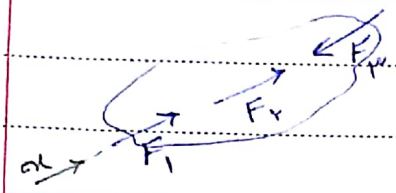
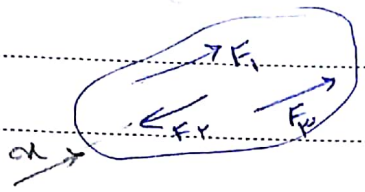
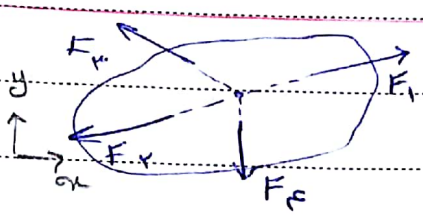
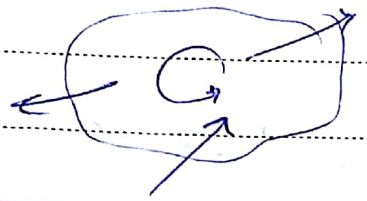
ست به نوع بارگذاری تعداد معادلات مستقل (معادلات مستقل لازم برای اعمال تعادل)

تفاوت خواهد بود (جدول های فوق انواع بارگذاری ها و معادلات مستقل لازم

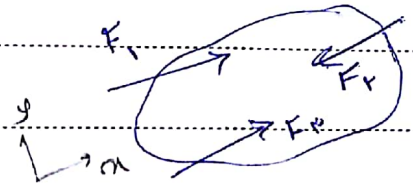
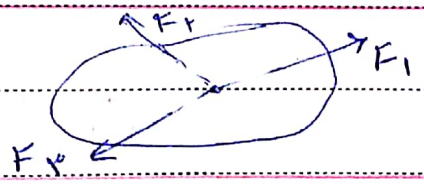
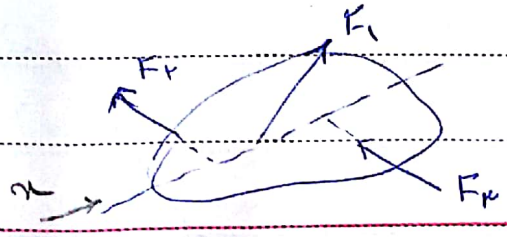
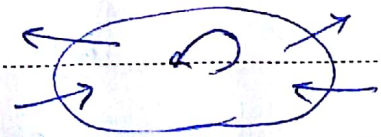
برای حالت دوبعدی و سه بعدی نشان داده شده است.

Scanned by CamScanner

جدول دوبعدی

نوع بارگذاری	شکل	تعداد معادلات تعادل مستقل
همرراستا		$\Sigma F_{ox}=0$
موازی		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma M_z=0$
همرس		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma F_y=0$
کلی		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma M_z=0$

جدول سه‌بعدی

نوع بار	شکل	معادلات تعادل
موازی		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma M_z=0$ $\Sigma M_y=0$
همرس در فضا		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma F_z=0$
متقاطع یا کلی		$\Sigma M_{oy}=0$ $\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma M_z=0$ $\Sigma F_z=0$
کلی		$\Sigma F_{ox}=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma F_z=0$ $\Sigma M_{ox}=0$ $\Sigma M_{oy}=0$ $\Sigma M_z=0$

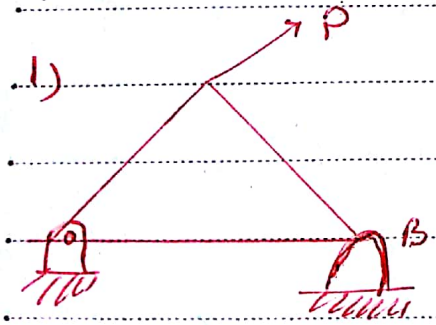
Scanned by CamScanner

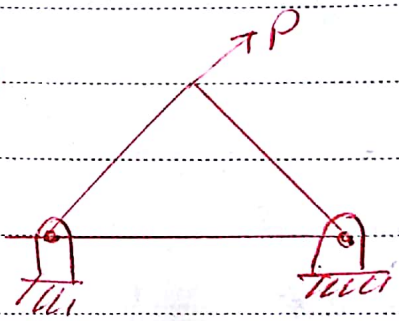
تعادل: تمام بدنه‌ها امتداد شان از خود ثابت می‌کنند بنابراین "شتاب" آنها صفر است.

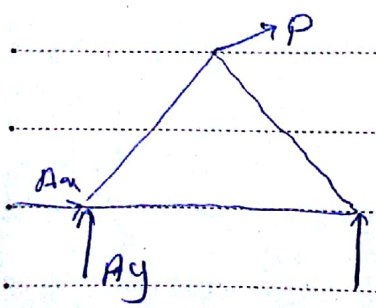
اجسام معین استاتیکی: اجسامی که دارای کمترین تعداد قید لازم برای حفظ تعادل هستند دراین اجسام برای تعیین نیروهای خارجی و اعمال معادلات تعادل کافی است.

اجسام نامعین استاتیکی: اجسامی که دارای قیدهایی بیش از حد نیاز بوده و همچنین شرط تعادل به هم نخورد به این تکیه‌گاه‌های زائد می‌گویند دراین حالت برای یافتن بارهای خارجی، معادلات تعادل کافی نیستند.

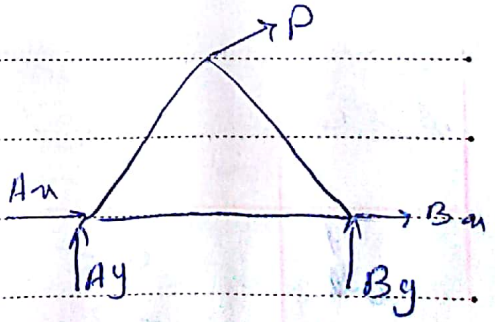
تعداد معادلات مستقل − تعداد بارهای مجهول = درجه نامعینی = تعداد قیدهای اضافی
تعادل خارجی

۱)


۲)




معین استاتیکی $n = 3 - 3 = 0$



نامعین $n = 3 - 4 = 1$

Scanned by CamScanner

شکل ۱: تعداد میله‌ها کافی بوده و می‌توانیم هیچ شرط تعادل به هم نمی‌خورد تمامی مجهولات

با اعمال معادلات تعادل قابل دست یابی هستند.

شکل ۲: اگر یک میله حذف شود تعادل به هم می‌خورد. از آن جایی که چهار مجهول و سه معادله

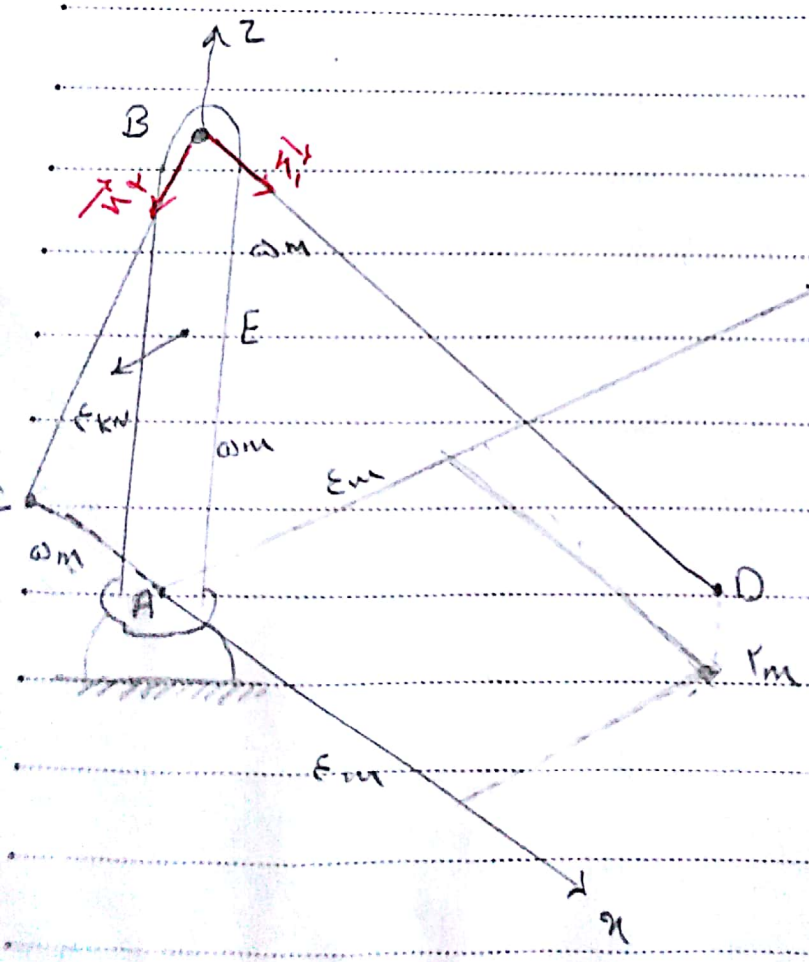
تعادل داریم لذا همه‌ی مجهولات نمی‌توانند حذف شوند.

نکته: برای یافتن همه‌ی مجهولات به فرمول های کلی تغییر شکل از علم مقاومت

نیاز داریم.

مثال: یافتن واکنش تکیه‌گاه (تکیه‌گاه متصل ساچمه‌ای است) و نیز نیروهای مجهول موجود در

میله‌ها:



گام اول: انتخاب دستگاه مناسب مختصات

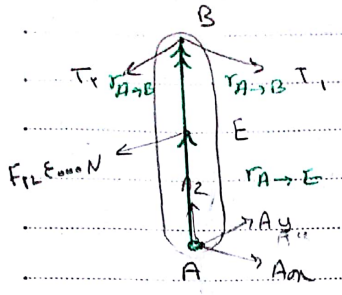
گام دوم: رسم دیاگرام آزاد

Scanned by CamScanner

SUBJECT: ۳۵ DATE: / /

گام سوم ← تعیین بایستم آزاد :

(فاصله بین سرمیخ‌ها)



گام سوم ← محاسبه برآیند نیروها و اعمال تعادل ($\Sigma F_{x=0}$ ، $\Sigma F_{y=0}$ ، $\Sigma F_{z=0}$)

سیستم سه‌بعدی همترازی برقرار باشد

$$\vec{A} = A_{ox}\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{F} = -۶۰۰۰\,\hat{j}$$

$$\vec{T}_1 = |T_1|\vec{n} = |T_1|\frac{BD}{|BD|} = |T_1|\frac{D-B}{|BD|} = |T_1|\frac{\begin{vmatrix}۴\\۰\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}۰\\۱\end{vmatrix}}{|BD|}$$

$$= |T_1|\frac{۴\hat{i} + ۶\hat{j} - ۸\hat{k}}{\sqrt{۴^۲ + ۶^۲ + (۸)^۲}} = |T_1|\frac{۴\hat{i} + ۶\hat{j} - ۸\hat{k}}{۹{,}۷۹۷}$$

$$\vec{T}_2 = |T_2|\vec{n}_2 = |T_2|\frac{BC}{|BC|} = |T_2|\frac{C-B}{|BC|} = T_2\frac{\begin{vmatrix}-۵\\۰\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}۰\\۱۰\end{vmatrix}}{|BC|}$$

$$= |T_2|\frac{-۵\hat{i} - ۱۰\hat{k}}{\sqrt{(-۵)^۲ + (-۱۰)^۲}} = |T_2|\frac{-۵\hat{i} - ۱۰\hat{k}}{۱۱{,}۱۸}$$

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$$

$$= \underbrace{\left(A_{ox} + \frac{۴|T_1|}{۹{,}۷۹۷} - \frac{۵|T_2|}{۱۱{,}۱۸}\right)}_{\Sigma F_{ox}=0}\hat{i} + \underbrace{\left(A_y - ۶۰۰۰ + \frac{۶|T_1|}{۹{,}۷۹۷}\right)}_{\Sigma F_{y}=0}\hat{j}$$

$$+\left(A_z - ۸\frac{|T_1|}{۹{,}۷۹۷} - ۱۰\frac{|T_2|}{۱۱{,}۱۸}\right)\hat{k}$$

$\Sigma F_{z}=0$

Scanned by CamScanner

Subject : Year . Month

کام حیاتی ← عاشه برآیند گشتاور حاصل یک نقطه دلخواه و اصال برابر با صفر

$\sum \vec{M}_A = 0$ حول نقطه A گشتاور می‌گیریم. ($\sum M_{Ax} = 0$ ، $\sum M_{Ay} = 0$ ، $\sum M_{Az} = 0$)

$r_{A\to E} \times F_1 + r_{A\to B} \times T_1 + r_{A\to B} \times T_2 = 0$

$0.5\hat{k} \times -4000\hat{j} + 1.0\hat{k} \times \left(\frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{i} + \frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{j} - \frac{8|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{k}\right) + 1.0\hat{k} \times \left(\frac{-5|T_2|}{11/18}\hat{i} + \frac{10|T_2|}{11/18}\hat{j}\right) = 0$

m_1 m_2 m_3

$m_3 = 0.5\hat{k} \times -4000\hat{j} = 2000\hat{i}$

$m_1 = \frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{j} - \frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{i}$

$m_2 = -\frac{5|T_2|}{11/18}$

$\left(2000 - \frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\right)\hat{i} + \frac{4|T_1|}{9|V_{9T}|}\hat{j} - \frac{5|T_2|}{11/18}\hat{j} + (1.0)\hat{k} = 0$

$\sum M_{Ox} = 0$ $\sum M_{Oy} = 0$

$T_1 = 4891 N$

$T_2 = 4470 N$

علت بزرگی است: همان علت بارهای متقاطع در یک محور (محور z) در حالت سه بعدی است

Seyan

Scanned by CamScanner

Subject : ۳۷ Year . Month . Date . ( )

در این فصل تحلیل نیروی در داخل سازه‌هایی مانند خرپاها و ماشین صورت می‌گیرد که سازه‌ها

۱-۵) خرپاها: خرپاها متشکل از اعضایی هستند که می‌توانند نیروهای I شکل نشان‌دهنده‌ها

و شکل‌های خاص دیگر باشند این اعضا در انتهایشان به یکدیگر متصل می‌شوند به وصل‌هایی می‌توانند

(پین - pin ، پیچ - bolt ، جوش - weld ، پرچ - rivet) باشند.

مثال‌های خرپاها: پل‌ها، دکل‌های حمل انتقال برق و ...

خرپاها دو دسته‌اند: الف) خرپاهای مسطح - plane ب) خرپاهای فضایی - space

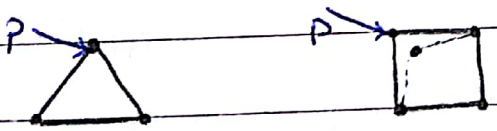
الف) اعضای خرپا در یک صفحه قرار دارند و اصطلاحاً گفته شده شکل است که از اتصال سه میله به هم حاصل می‌آید.

ب) حالت سه‌بعدی خرپاهای مسطح است و اصطلاحاً آن یک هرم بوده که از اتصال شش عضو به هم حاصل می‌آید.

نکته: واحدهای شش‌ضلعی‌ها، سازه‌های صلب هستند یعنی غیرقابل خرد یا شکل بوده و تغییر

شکل اعضای آن کم است ولی اعضای چهارضلعی و بیشتر این‌ها در سازه غیرصلب می‌شوند.

مثال: (دوبعدی)



۱-۱-۵) خرپای ساده: خرپاهایی که از واحدهای شش‌ضلعی ساخته شده‌اند خرپای ساده نامیده می‌شود در این

حالت تعداد عضو خرپا نیز فرمول خاص وجود دارد:

Sevan

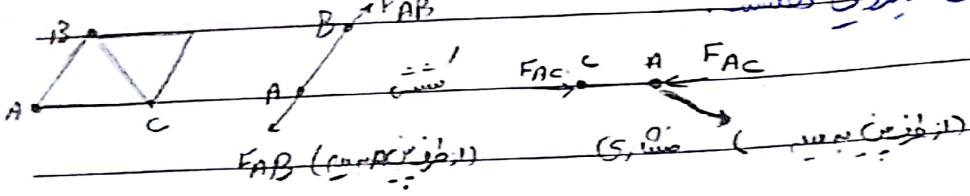
Scanned by CamScanner

Subject : ۲۳ Year . Month . Date . ( )

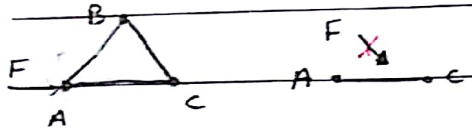
۱ـ خاصیت گیرداری اعضا در محل نقطه (Joint) صرف نظر می‌شود.



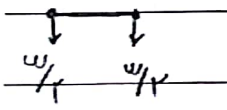
۲ـ تمامی اعضا فرضا اعضای دوسرمفصلی هستند.



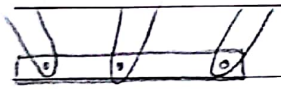
۳ـ تمام نیروهای خارجی به مفاصل وارد می‌شوند.



۴ـ اگر اعضا دارای وزن باشند (W) را در نصف طول عضو به مفاصل منتقل می‌کنیم زیرا عضو به دو نیرو تقسیم می‌شود و این حالت وزن تقسیم شده در مفاصل نیز اعمال می‌شود.



۵ـ اعضا هیچ گاه در مفاصل پیوسته نیستند.



۱ پیوستگی ✗ دو نیرو

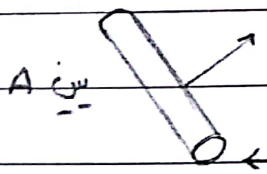


۲ پیوستگی ✓ دو نیرو

یا

۶ـ به دلیل یا شرح نیروهای داخل هریک از اعضا هستیم برای این منظور از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

الف) روش مفاصل



ب) روش مقاطع

نکته: روش مفاصل ←

گام اول ← ابتدا تمامی مفاصل را نام گذاری می‌کنیم.

Scanned by CamScanner

Subject : ۳۹ Year . Month . Date . ( )

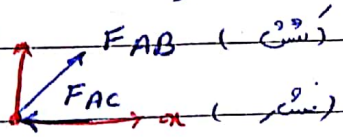
گام دوم ← برای حل بهتر است از بخش شروع کنیم حداقل یک نیروی معلوم و حداکثر دو نیروی مجهول داشته باشد.

گام سوم ← در بخش انتخاب دیاگرام آزاد آن را رسم می‌کنیم به این صورت نیروهای موجود در اعضا که بر بخش وارد می‌شوند به صورت پیکان در امتداد اعضا (استاد خط و محل نقطه اثر نیرو در عضو) نشان می‌دهیم.

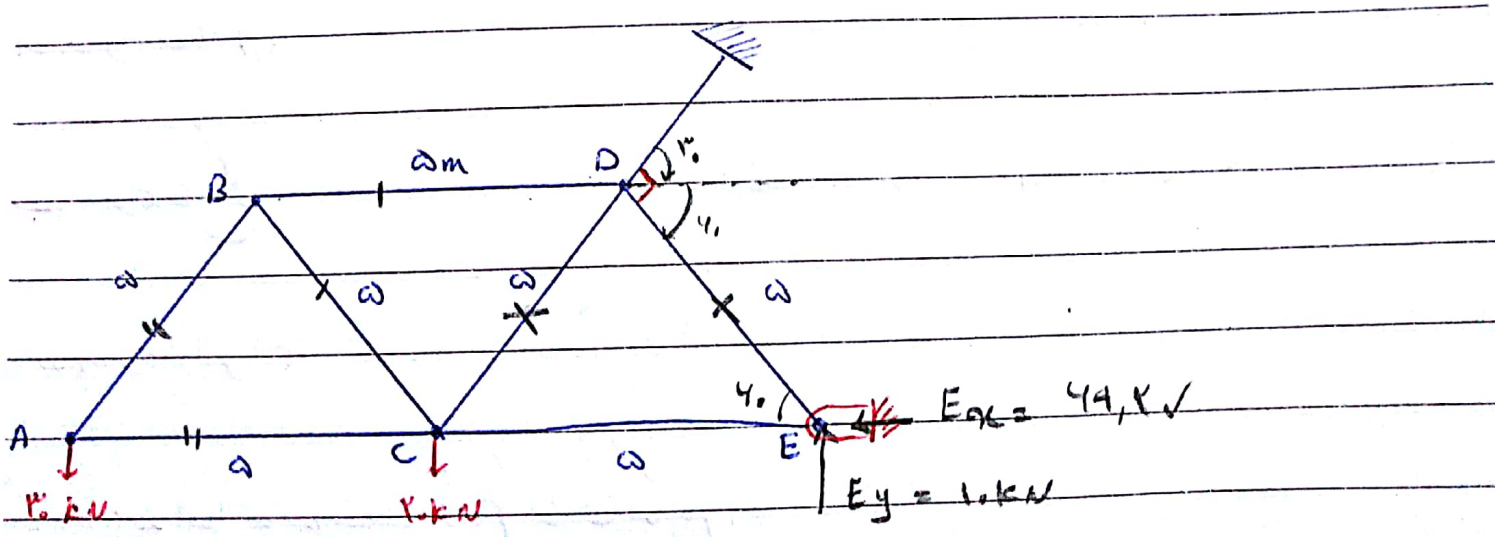
اگر عضو در کشش باشد، جهت فلش به سمت بیرون بخش است

اگر عضو در فشار باشد، جهت فلش به سمت بخش خواهد بود.

گام چهارم ← سپس یک دستگاه مختصات مناسب در بخش را با حداقل مجهول نیروها در بخش هرس هستند نوشته در معادله تعادل $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ خواهی است و نیازی نیست استاد نوشته شود چون هرس هستند.



مثال: در خرپا نشان داده شده مطلوب است تعیین نیرو در تمامی اعضا:

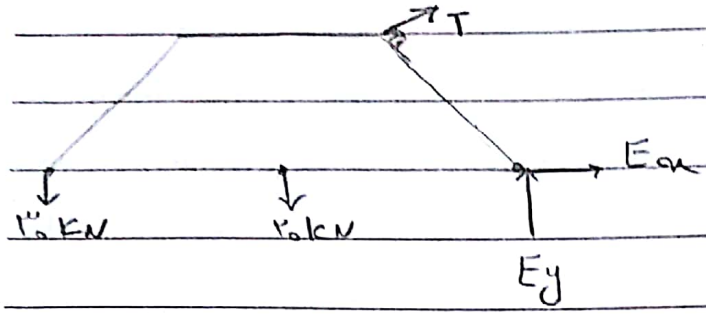


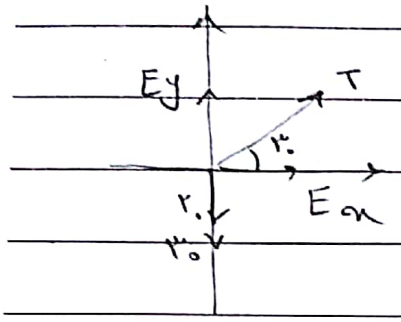
Scanned by CamScanner

Subject : ۲ Year . Month . Date . ( )

گام اول ← انتخاب دستگاه مختصات مناسب (دلخواه)

گام دوم ← رسم دیاگرام آزاد کلیه یا قسمتی از سازه‌های مجهول





$\Sigma F_\alpha = 0 \rightarrow$

$E_\alpha + T\cos 30 = 0 \rightarrow E_\alpha = -49.2\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow$

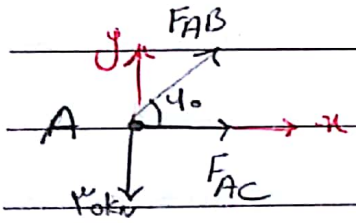
$E_y + T\sin 30 - 30 - 20 = 0 \rightarrow E_y = 10\,kN$

$\Sigma M_E = 0 \rightarrow$

$+20\times 3 + 30\times 1 - T\times 3 = 0 \rightarrow T = 80\,kN$

گام سوم ← استفاده از روش مفاصل برای یافتن نیروهای موجود در هر عضو

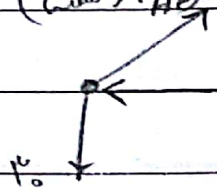
(گام‌های روش مفصل به ترتیب اعمال می‌شوند)



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow F_{AC} + F_{AB}\cos 60 = 0 \rightarrow F_{AC} = -17.3\,kN$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow F_{AB}\sin 60 - 30 = 0 \rightarrow F_{AB} = 34.6\,kN$

$F_{AB} = 34.6\,kN$ (کشش)

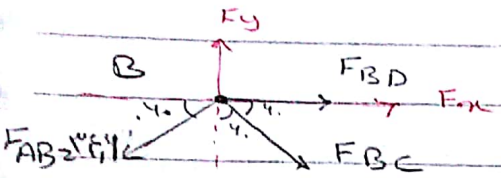


$F_{AC} = 17.3\,kN$ (فشاری) ← دیاگرام اصلاح شده

Scanned by CamScanner

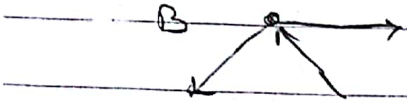
Subject : ٤١ Year . Month . Date . ( )

چون AB در حالت بوده پس در B نیز کشش ترازی دهیم



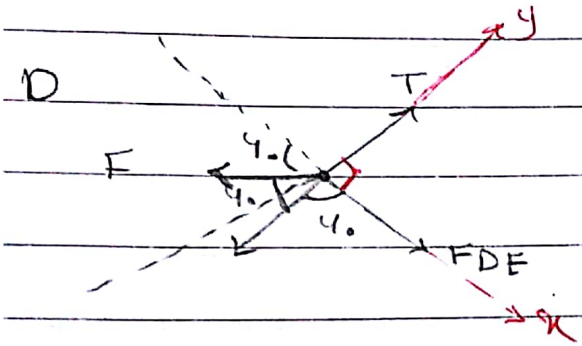
$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{BD} + F_{BC}\cos 60 - 34.4 \cos 60 = 0 \rightarrow F_{BD} = 34.4\ kN$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{BC}\sin 60 - 34.4 \sin 60 = 0 \rightarrow F_{BC} = 34.4\ kN$



$F_{BD} = 34.4$ (کشش) ← پارامتر اصلاح شده

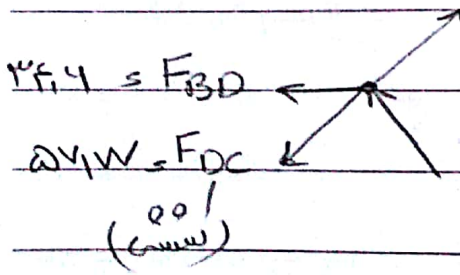
$F_{AB} = 34.4$ $F_{BC} = 34.4$ (فشاری)



$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{DE} + F_{DC}\cos 60 - 34.4 \cos 60 = 0 \rightarrow F_{DE} = -11.58$

$\sum F_y = 0 \rightarrow 80 - F_{DC}\sin 60 - 34.4 \sin 60 = 0 \rightarrow F_{DC} = 97.1$

پارامتر اصلاح شده ← $T = 80$

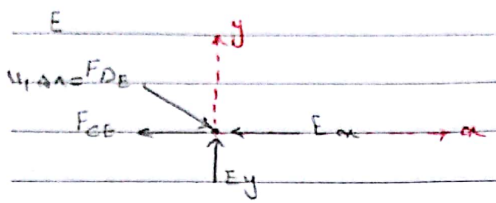


$F_{DE} = 11.58$ فشاری

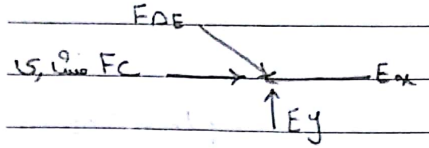
Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : Year . Month . Date . ( )

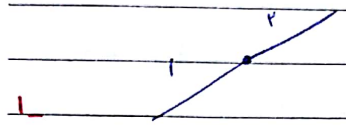


$\sum F_x = 0 \rightarrow -E_x - F_{CE} + F_{DE}\cos 40^\circ = 0 \rightarrow F_{CE} = -43.81\,kN$



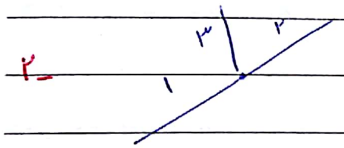
با تشکر اصلاح شد

۱- گاه



$F_1 = F_2$ در عضو همراستا نیروی خارجی نداریم

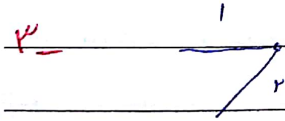
۲-



$F_1 = F_2$, $F_3 = 0$ در عضو همراستا نیروی خارجی نداریم

چون در راستای آن نیروی نداریم

۳-

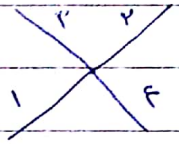


$F_1 = F_2 = 0$ در عضو همراستا نیروی خارجی نداریم

Scanned by CamScanner

Subject : ۴۳ Year . Month . Date . ( )

۴

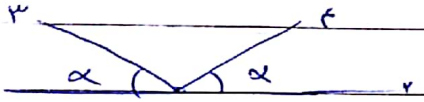


$F_1 = F_2$

$F_3 = F_4$

نیروی خارجی نداریم — دو نیرو هم اندازه

۵

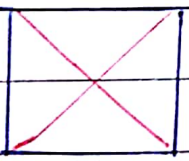


نیروی خارجی نداریم

$F_3 = F_4$

شتاب از نظر مقدار ← جنس، مقدار، بارداری

۶



جرم‌هایی که مطابق شکل به صورت قطری عمل می‌کنند

هر دو قطر می‌توانند نیرو را تحمل کنند اگر یکی از آن‌ها از مقاومت قابل انحراف نیرو در نظر بگیریم مقدار را تحمل نکرده و فقط تحت فشار قرار می‌گیرد. پس از بین دو قطر، قطری را در نظر می‌گیریم که در اثر بارهای وارده تحت کشش باشد برای این منظور یکی از قطرها را به دلخواه در نظر می‌گیریم اگر پس از حل در کشش بود جهت درست انتخاب شده است اما اگر در فشار بود باید قطر دیگر را در نظر بگیریم.

Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : ج ج Year . Month . Date . ( )

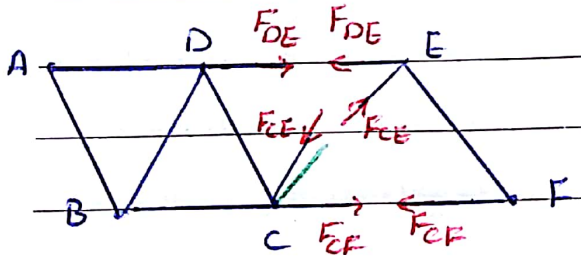
ب- روش تقطع : هدف از به کار بردن این روش یافتن مقادیر مجهول یا نیروهای داخلی در اعضای خرپا است که برای این منظور از گام های زیر استفاده می کنیم

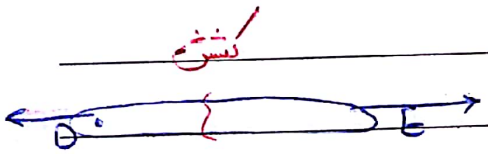
گام اول ← از بین اعضا مقطع می زنیم به نحوی که ← تعداد میله ها از سه تا بیشتر نباشد ← حداکثر سه عضو نباید دارای سه نیروی مجهول می باشد را قطع کند.

گام دوم ← در اثر تقطع زدن در عضو ایجاد می شود که دیاگرام آزاد یکی از عضو ها را به دلخواه رسم می کنیم ← از آنجایی که اعضا دو نیروی هستند نیروی داخل اعضا در امتداد خود عضو خواهد بود.

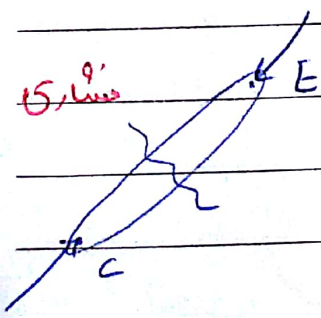
اگر عضو تحت کشش باشد نیروی داخل عضو از مقطع زده شده خارج می شود و اگر عضو در فشار باشد نیرو به مقطع وارد می شود.

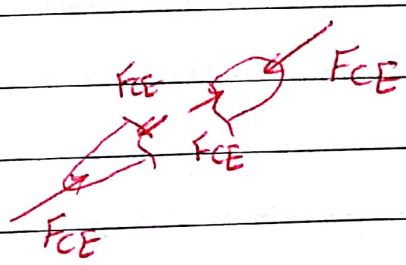
در محل تقطع زدن نیروها در عضو حاصل عمل و عکس العمل هستند.











Sevan

Scanned by CamScanner

Year . Month . Date . ( )

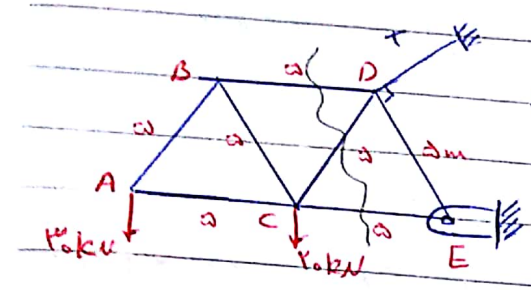
گام سوم ← برای یافتن رابطه بین نیروها از روابط تعادل استفاده می‌کنیم تا مجهولات بدست آید

$\sum F_x = 0$

$\sum F_y = 0$

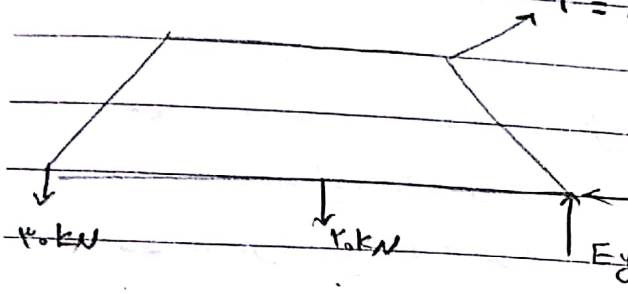
$\sum M_z = 0$

مثال ← مطلوب است تعیین نیروی عضو DE به روش مقاطع:



گام اول ← انتخاب سیستم و اعمال عکس‌العمل‌ها

گام دوم ← رسم دیاگرام آزاد طناب و یافتن مجهولات ناشناخته و اعمال تعادل

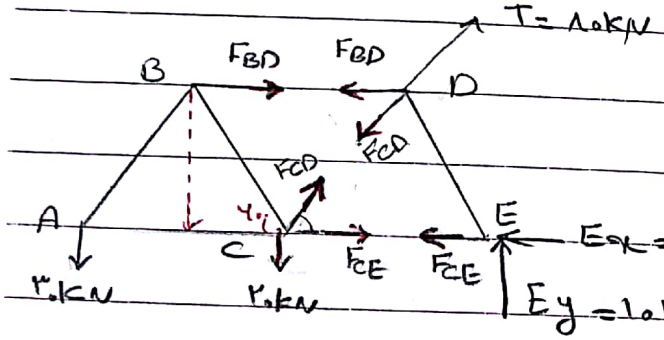


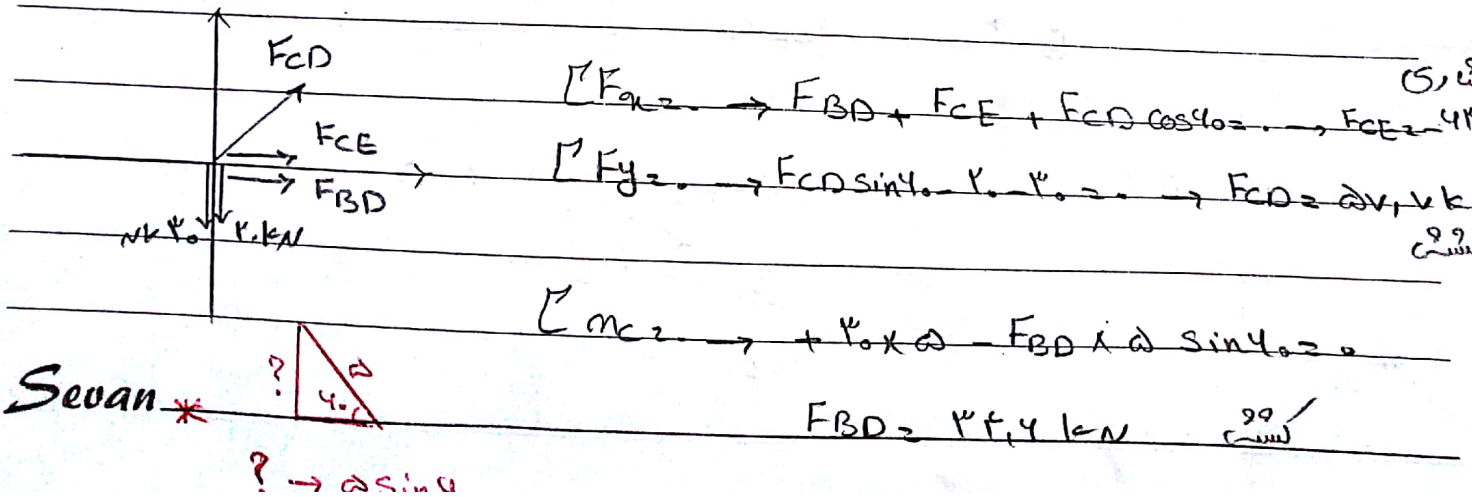
گام سوم ← اعمال روش مقاطع

۳-۱ ← ایجاد مقطع مناسب

۳-۲ ← رسم دیاگرام آزاد مقطع

۳-۳ ← اعمال تعادل





مثال ۵

$\sum F_{x=0} \rightarrow F_{BD} + F_{CE} + F_{CD}\cos 40 = 0 \rightarrow F_{CE} = -43,01$

$\sum F_y = 0 \rightarrow F_{CD}\sin 40 - 20 - 30 = 0 \rightarrow F_{CD} = 81,7\,kN$ کششی

$\sum M_C = 0 \rightarrow +30 \times 5 - F_{BD} \times 5 \sin 40 = 0$

$F_{BD} = 34,6\,kN$ کششی

? $\rightarrow 5\sin 40$

Sevan ✱

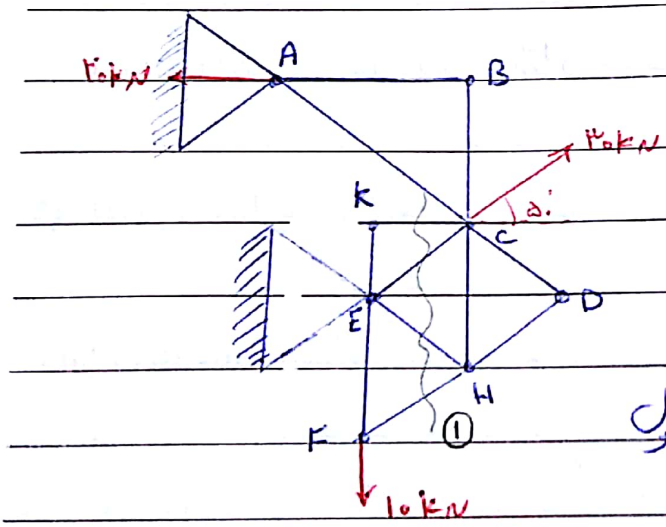
Scanned by CamScanner

Subject : ۷

Year . Month . Date . ( )

روش مقاطع	روش مفاصل
$\sum F_x = 0$	$\sum F_x = 0$
$\sum F_y = 0$	$\sum F_y = 0$
$\sum F_{m_z} = 0$	
در روش مقطع، نیازی به پیش‌بینی نوع مفصل یا غلطکی بودن عضو نیست و در هر مقطع مناسب بزنیم و به راحتی با اعمال شرایط تعادل، نیروی مجهول به دست آید.	در روش مفاصل ابتدا مفصل یا غلطک پیش‌بینی می‌شود تا نیروهای موجود در اعضا به دست آید که این امر زمان‌بر بود.

نکته: می‌توان از ترکیب دو روش استفاده کرد. مثلاً شکل زیر را در نظر بگیرید برای آنکه نیروی عضو EC را به دست آوریم داریم:



مقطع یک را بزنیم چون چهار مجهول دارد

می‌توان از مفصل F به روش مفصل شروع

وجود در عضو FH را به دست آوریم حال تعادل مجهول

در مقطع زده شده داریم.

Scanned by CamScanner

Subject : ٤٧ Year . Month . Date . ( )

قاب ها و پایش ها: سازه هایی که حداقل یکی از اعضای آن دارای عضو چندنیروی (غیردوسری) باشد، قاب و یا پایش نامیده می شود.

الف) قاب ها ← سازه هایی که برای تحمل نیروهای وارده طراحی می شوند و معمولاً متصل به گره اند است مثل چهارچوب پنجره و ...

ب) پایش ها ← سازه هایی که دارای قطعات متحرک هستند برای انتقال نیرو یا گشتاور از اعضای ورودی به اعضای خروجی طراحی می شوند مثل قیچی، پل متحرک ...

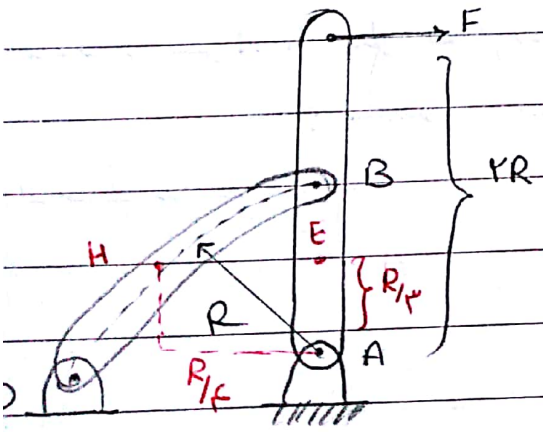
روش حل این سئوال:

۱) رسم دیاگرام آزاد هر جسم و یافتن مجهولات تکیه گاهی با اعمال تعادل

۲) جداسازی اعضا و رسم دیاگرام آزاد هریک از آنها

۳) اعمال تعادل برای تک تک اعضا و یافتن مجهولات.

مثال: نشان داده شده A در سازه ی نشان داده شده.



سازه نشان داده شده قاب است زیرا یکی از اعضای آن دوسری نیست (عضو AC)

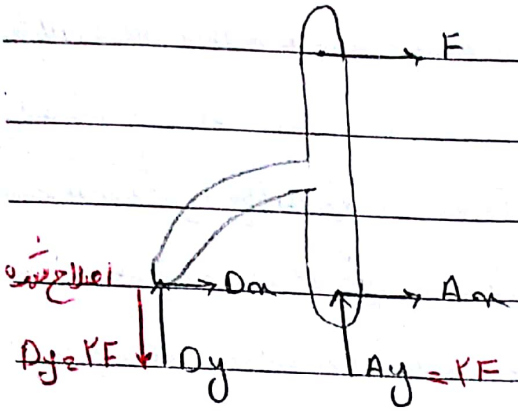
Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : ۴۲

Year . Month . Date . ( )

"حالت اول ← رسم دیاگرام آزاد کل



$\sum F_{ox}=0 \rightarrow F+A_{ox}+D_{ox}=0$

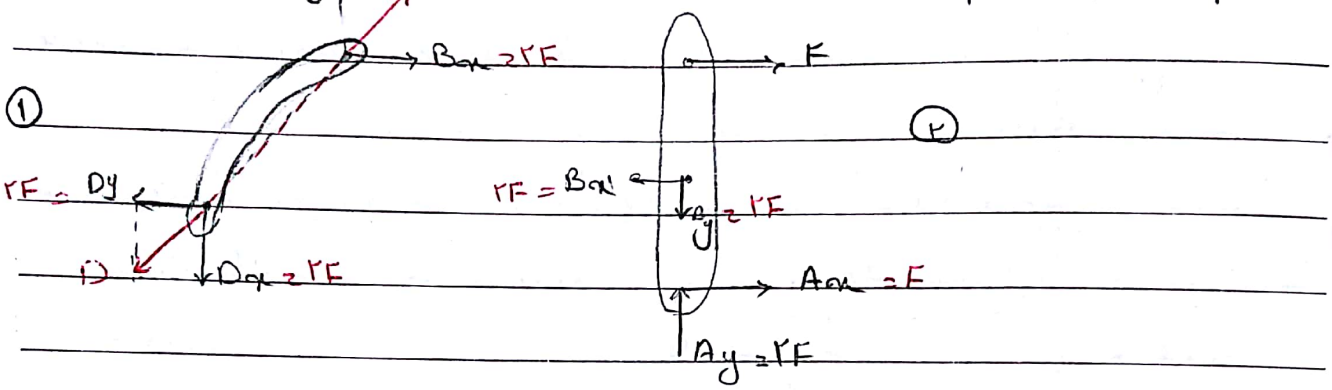
$\sum F_{y}=0 \rightarrow A_y+D_y=0 \rightarrow D_y=-A_y$ *

$\sum M_{A}=0 \rightarrow -F\times 2R-D_y\times R=0$

$\rightarrow D_y=-2F$

$*\ A_y=-D_y=2F$

"حالت دوم ← رسم دیاگرام آزاد اعضا



①: $\sum F_{ox}=0 \rightarrow B_x-D_{ox}=0 \rightarrow B_x=D_x$

$\sum F_{y}=0 \rightarrow B_y-D_y=0 \rightarrow B_y=D_y=2F$

"سادگی در فرمولبندی چون میشه نیرو ای رو تو این حالت دوم غیر این صورت باید بزنی حساب میشود.

②: $\sum F_{ox}=0 \rightarrow F-B_x+A_{ox}=0 \rightarrow B_x=2F$

$\sum F_{y}=0 \rightarrow A_y-B_y=0 \rightarrow B_y=A_y=2F$

$\sum M_{B}=0 \rightarrow +A_{ox}\times R-F\times R=0 \rightarrow A_{ox}=F$

Scanned by CamScanner

Subject : ۲۹

Year . Month . Date . ( )

internal Forces → نیروهای داخلی

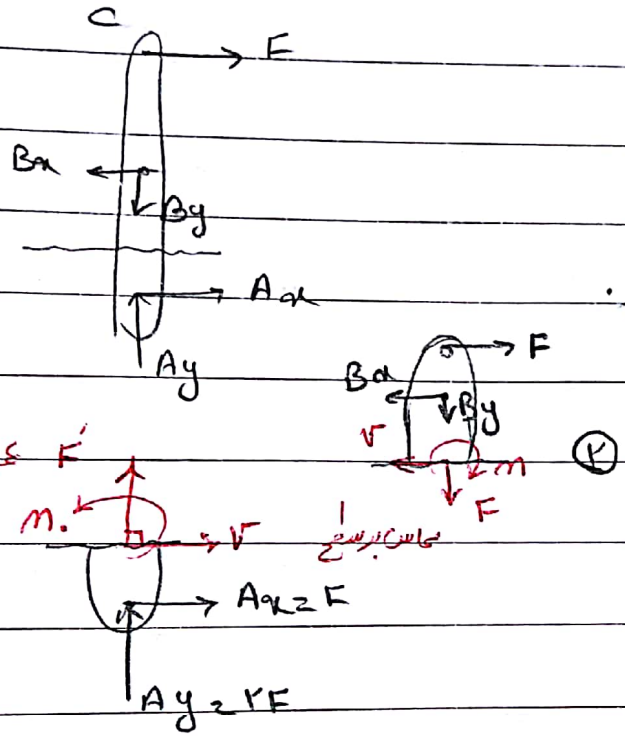
← در مفاصل ایجاد می شوند ← مثل نیرو در نقطه B

" "

← نیروهای موجود در نقاط خود جسم ← مثل نقطه E

مثال: مطلوب است یافتن نیروهای داخلی در نقطه E از میله AC

با توجه به مثال قبل

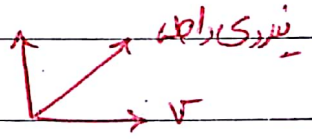


← از نقطه E مقطع می زنیم

← مقطع باطوری می زنیم که بر عضو عمود باشد

← دو قسمت حاصل از آن عضو به دو بخش تقسیم می شود.

یا کدام آزاد هر یک را جدا رسم می کنیم



① $\sum F_x = 0 \rightarrow A_x + 3 = 0 \rightarrow 3 = F$ ← عمدتا باید اصلاح شود

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + F = 0 \rightarrow F' = -2F$

$\sum M_{A=0} \rightarrow -3 \times 1.2 + M_E \cdot 3 = 0 \rightarrow M_E \cdot 3 = 1.2 \times 3 = 1.2F$

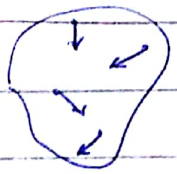
Scanned by CamScanner

Subject : ۵۱

Year . Month . Date . ( )

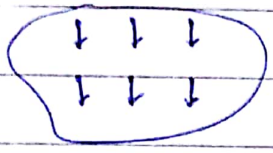
سرکز { گرانش / جرم / هندسی

- اگر جسم در میدان گرانش زمین قرار گیرد از طرف زمین به ذرات مختلف جسم به دلیل داشتن فاصله‌ی



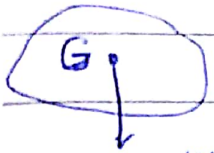
مختلف تا زمین، بردارهای گرانش متفاوت وارد می‌شود که با یکدیگر موازی نیستند.

اما به دلیل آنکه ابعاد جسم در مقایسه با ابعاد زمین کوچک است می‌توان فرض کرد که بردارهای



گرانش با هم موازی و برابر هستند (میدان یکنواخت)

برآیند تمامی بردارهای گرانش از نقطه‌ای واحدی به نام مرکز گرانش می‌گذرند.



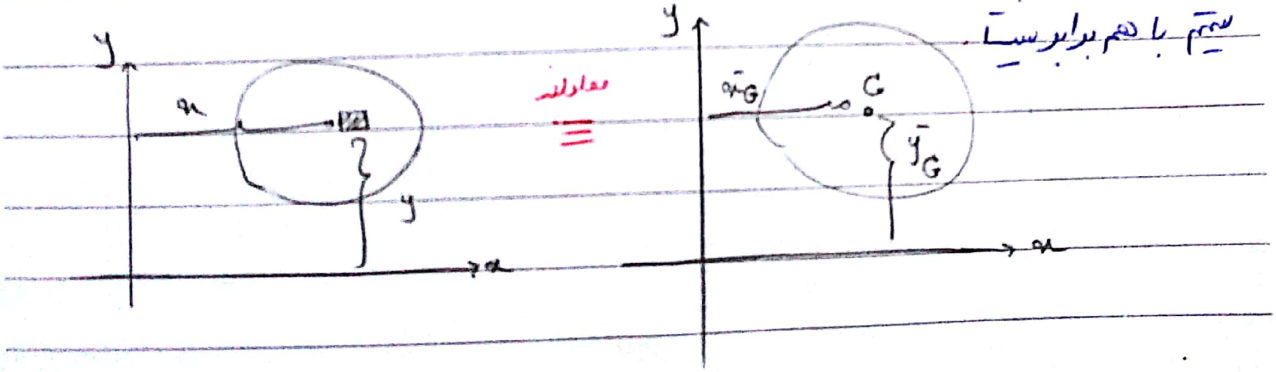
$W = \int dw$ برآیند بردارهای گرانش

نکته: اگر میدان گرانش یکنواخت باشد مرکز گرانش با تقریب در وضعیت قرارگیری جسم، عوض

نمی‌شود. برای یافتن مرکز گرانش به صورت زیر عمل می‌کنیم:

سیم ۱ با سیم ۲ معادل است بنابراین برآیند گرانش بردارها حول محور y یا محور x در هر دو

سیم با هم برابر است.



Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : ۶۷ Year . Month . Date . ( )

برآیند نیروهای وارد بر جسم $\int dw$ برآیند لنگر نیروهای وارد بر جسم نسبت به محور x $\int x\,dw = w\bar{x}_G$

$$\bar{x}_G = \frac{\int x\,dw}{w} = \frac{\int x\,dw}{\int dw}$$

$$\bar{y}_G = \frac{\int y\,dw}{\int dw}$$

$$\bar{z}_G = \frac{\int z\,dw}{\int dw}$$

مختصات مرکز ثقل $G = (\bar{x}_G, \bar{y}_G, \bar{z}_G)$

مرکز جرم:

$$dw = dm\,g$$

$$\bar{x}_m = \frac{\int x g\,dm}{\int g\,dm} = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$$

$$\bar{y}_m = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$$

$$\bar{z}_m = \frac{\int z\,dm}{\int dm}$$

مختصات مرکز جرم $m = (\bar{x}_m, \bar{y}_m, \bar{z}_m)$

نکته: اگر میدان گرانش یکنواخت باشد مرکز جرم و مرکز ثقل بر هم منطبق می‌شوند و غیر این صورت

این دو نقطه از هم جدا هستند و حالت یکنواخت مرکز ثقل را خواهیم داشت.

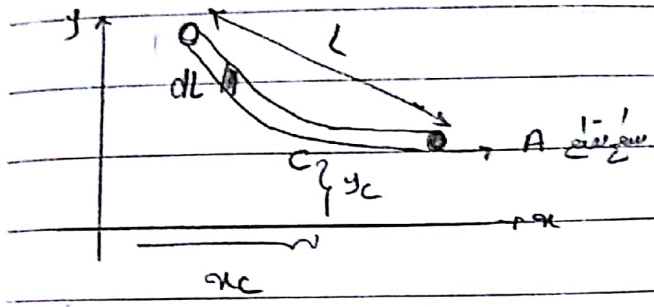
غیر

Scanned by CamScanner

Subject : مرکز

Year . Month . Date . ( )

مرکز هندسی: خط، سطح، حجم



مرکز خط:

$$dm = \rho A\, dL \quad , \quad \bar{x}_c = \frac{\int x \rho A\, dL}{\int \rho A\, dL} = \frac{\int x\, dL}{\int dL}$$

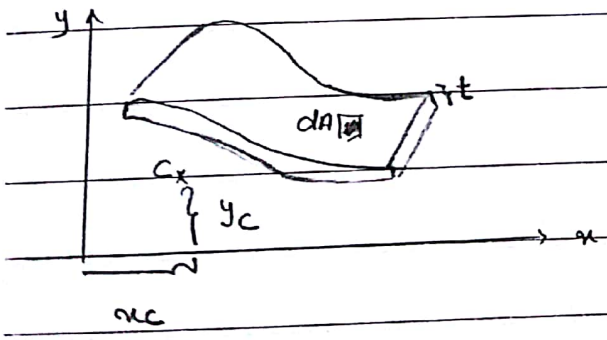
$$\bar{y}_c = \frac{\int y\, dL}{\int dL}$$

$$\bar{z}_c = \frac{\int z\, dL}{\int dL}$$

$$C = (\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c)$$

مرکز سطح

نکته: مرکز خط لزوماً روی سطح نیست



مرکز سطح:

$$dm = \rho\, dA\, t$$

$$\bar{x}_c = \frac{\int x \rho t\, dA}{\int \rho t\, dA} = \frac{\int x\, dA}{\int dA} \qquad \bar{y}_c = \frac{\int y\, dA}{\int dA} \qquad \bar{z}_c = \frac{\int z\, dA}{\int dA}$$

$$C = (\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c)$$

مرکز سطح

Scanned by CamScanner

Subject : o^2 Year . Month . Date . ( )

نکته: گشتاورهای اول سطح: $\int x\,dA \;,\; \int y\,dA \;,\; \int z\,dA$

نکته: مرکز سطح زمانی وقتی سنت‌ی خط سطح واقع شد

مرکز حجم:

$$\bar{x}_c = \frac{\int x\rho\,dv}{\int \rho\,dv} = \frac{\int x\,dv}{\int dv}$$

$$\bar{y}_c = \frac{\int y\,dv}{\int dv}$$

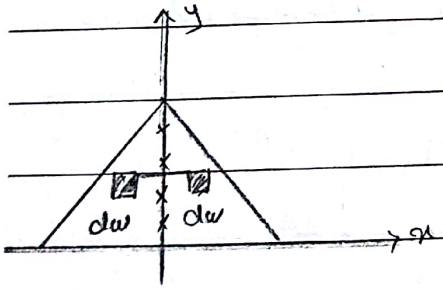
$$\bar{z}_c = \frac{\int z\,dv}{\int dv}$$

مرکز جسم: $C_2(\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c)$

نحوه‌ی محاسبه‌ی مراکز هندسی:

گام اول: ابتدا هندسه مورد نظر را تشخیص داده (خط، صفحه، حجم) و سپس روابط مربوط را می‌نویسیم.

گام دوم: اگر جسم متقارن باشد مرکز هندسی حتماً روی خط تقارن یا صفحه‌ی تقارن است.



$$w\bar{x}_c = \int x\,dw - \int x\,dw = 0$$

گام سوم: انتخاب یک المان مناسب (dw ، dl ، dA)

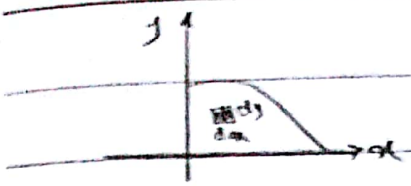
برای انتخاب المان مناسب سعی می‌کنیم که دارای بیشترین تقارن باشد.

Sevan

Scanned by CamScanner

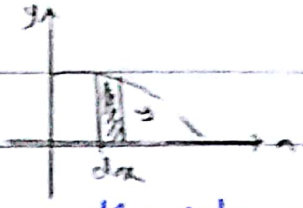
Subject : ۵۵ Year Month Date ( )

۱. مرتبه‌ی المان کمترین باشد.



$dA = dx\,dy$

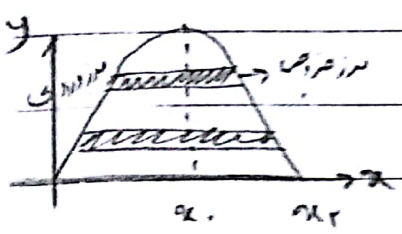
مرتبه دو

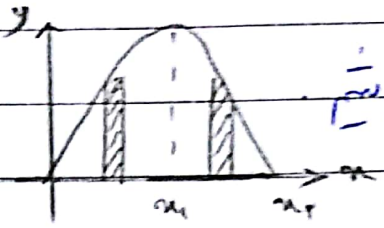


$dA = y\,dx$

مرتبه یک ✓✓

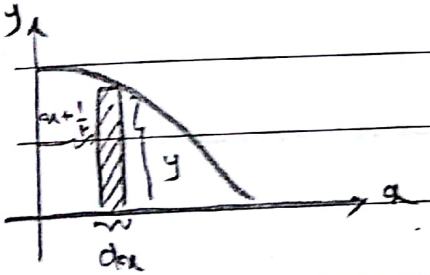
۲. المان انتخابی طوری باشد که در سراسر شکل از تغییر مرزهای دوری مفروض دارای شرایط یکسان باشد نیازی به شکستن انتگرال نداشته باشیم.





$\int dx$ ✓✓ $\int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{x_1}^{x_3} dx + \int_{x_3}^{x_2} dx$

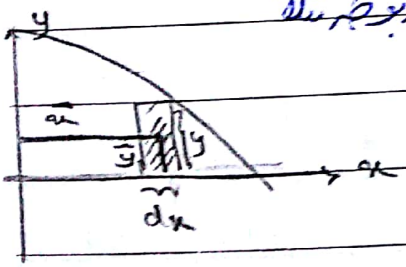
۳. در عبارت از جمله‌های مرتبه بالا در مقایسه با جملات مرتبه پایین صرف‌نظر شود.



$dA = y\,dx + \frac{1}{2}\,dx\,dx$

صرف‌نظر

نکته مهم: انتخاب مرکز المان و قرار دادن مختصات آن در روابط مربوط به گشتاور

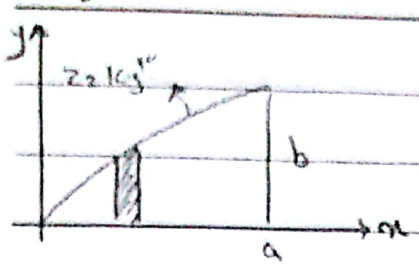


$\bar{x}_c = \frac{\int \tilde{x}\,dA}{\int dA} \Rightarrow \bar{y}_c = \frac{\int \tilde{y}\,dA}{\int dA}$, $\bar{z}_c = \frac{\int \bar{z}\,dA}{\int dA}$

مختصات مرکز المان $C^e = (x, \frac{y}{2})$

Scanned by CamScanner

Subject : ۵-۱ Year . Month . Date . ( )



مطلوب است تعیین مرکز سطح مربوط به سطح زیر نمودار

$a = kb^{۳} \rightarrow k = \frac{a}{b^{۳}}$

$z = ky^{۳} \rightarrow y = (\frac{x}{k})^{\frac{۱}{۳}}$

$\bar{x}_C = \frac{\int x\,dA}{\int dA}$

$\bar{y}_C = \frac{\int y\,dA}{\int dA}$

۱) مستطیل است

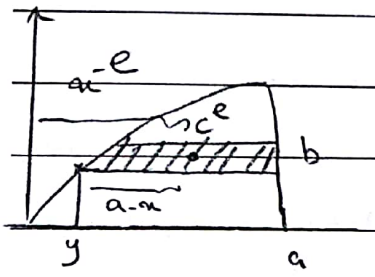
$dA = y\,dx \leftarrow dA = ۲,۳$

$c^{e} : (x^{-e}, y^{-e})$ ۴

۵

$\bar{x}_C = \frac{\int xy\,dx}{\int dx} = \frac{\int_{۰}^{a} x(\frac{x}{k})^{\frac{۱}{۳}}\,dx}{\int_{۰}^{a} (\frac{x}{k})^{\frac{۱}{۳}}\,dx} = \frac{۴}{۷}a$

$\bar{y}_C = \frac{\int \frac{y}{۲} xy\,dx}{\int y\,dx} = \frac{\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{b} (\frac{x}{k})^{\frac{۱}{۳}}\,dx}{\int_{۰}^{a} (\frac{x}{k})^{\frac{۱}{۳}}\,dx} = \frac{۳}{۵}b$



حل مسئله فوق با استفاده از فرمول های اخیر

۲) $dA = dy\,(a-x)$

۴) $c^{e} : (x + \frac{a-x}{۲}, y)$

$\frac{a+x}{۲}$ y^{-e}

x^{-e}

۵) $\bar{x}_C = \frac{\int_{۰}^{b} \frac{a+x}{۲}(a-x)\,dy}{\int_{۰}^{b} (a-x)\,dy} = \frac{۴}{۷}a$

$\bar{y}_C = \frac{\int_{۰}^{b} y(a-x)\,dy}{\int_{۰}^{b} (a-x)\,dy} = \frac{۳}{۵}$

$x = ky^{۳}$

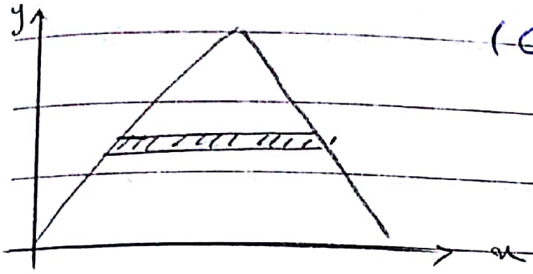
$ky^{۳}$

Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : ۵۷

Year . Month . Date . ( )



مطلوب است تعیین مرکز سطح مربوط (سطح مثلث شکل)

۱) $\bar{x}_c = \dfrac{\int x\,dA}{\int dA}$

$\bar{y}_c = \dfrac{\int y\,dA}{\int dA}$

۲) تعریف نماد

۳) $dA = dy\,L = \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy$

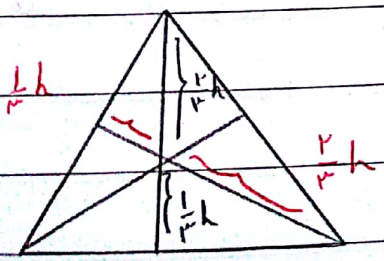
تشابه مثلث $\dfrac{h-y}{h} = \dfrac{L}{b}$, $L = \dfrac{b}{h}(h-y) = b - \dfrac{b}{h}y$

۴) $(\bar{x}_e \text{ و } \bar{y}_e)$, $c^e = \left(\left(x + b - \frac{b}{h}y\right), y\right)$

$$\bar{x}_c = \frac{\int_0^h \left[x + \frac{1}{2}\left(b - \frac{b}{h}y\right)\right]\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy}{\int_0^h \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy}$$

$$\bar{y}_c = \frac{\int_0^h y\left(b - \frac{b}{h}y\right)dy}{\int_0^h \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy} = \frac{1}{3}h$$

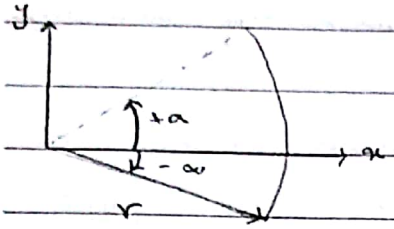
نکته: نقطه تقاطع ارتفاع ها: مرکز سطح مثلث خواهد بود.



Scanned by CamScanner

Subject : ۵۶ Year . Month . Date . ( )

تعاریف است تعیین مرکز هندسی کمان نشان داده شده



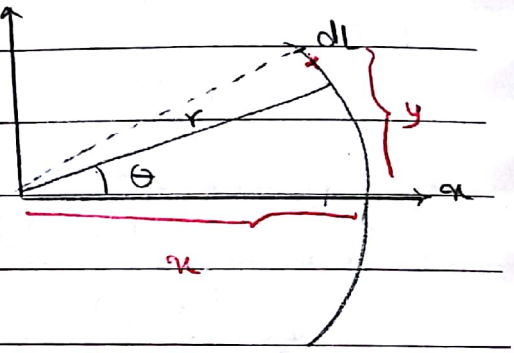
گام اول: تشخیص شکل

گام دوم: تشخیص شکل متقارن است یا نه.

گام سوم: انتخاب مختصات

چون کمان داریم دستگاه مختصات مورد است (منحنی)

گام چهارم: مرکز المان را بدست آریم.



گام پنجم: جایگذاری در روابط

$$\bar{x}_c = \frac{\int x^e \, dL}{\int dL}$$

$$\bar{y}_c = \frac{\int y^e \, dL}{\int dL}$$

۱) منفی

۲) مختصات هندسی ← نسبت به x ← تقارن دارد روی محور x ← $\bar{y}_c = 0$

۳) $dL = r\,d\theta$ در دستگاه قطبی

۴) $c^e(x, y)$

$(r\cos\theta, r\sin\theta)$

۵) $\bar{x}_c = \frac{\int r\cos\theta \, r\,d\theta}{\int r\,d\theta} = \frac{r^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \, d\theta}{r \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta}$

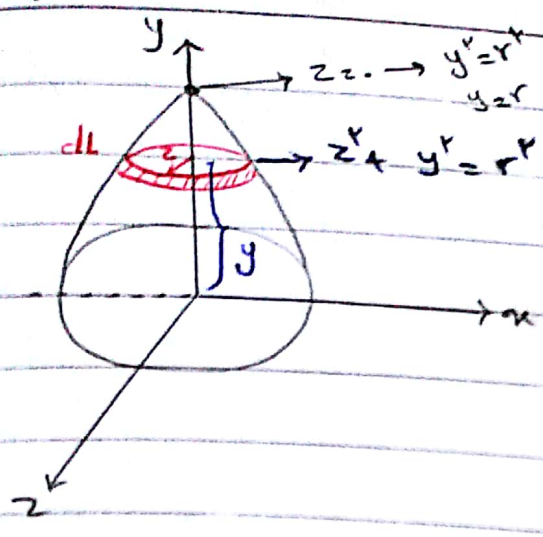
r ثابت است

$= \frac{r\sin\alpha}{\alpha}$

Scanned by CamScanner

Subject : ۵۹

Year . Month . Date . ( )



مطلوب است تعیین مرکز هندسی جسم نشان داده شده ←

گام اول تشخیص شکل ← جسم

گام دوم تشخیص تقارن ← با صفحه yz تقارن دارد،
با صفحه xy نیز تقارن دارد پس $\bar{z}_c = 0$ میشود

گام سوم المان گیری

گام چهارم پیدا کردن مرکز المان

۲) تقارن $\begin{cases} yz \text{ صفحه} \rightarrow \bar{x}_c = 0 \\ xy \rightarrow \bar{z}_c = 0 \end{cases}$

۱) $\begin{cases} \bar{x}_{c_2} = \dfrac{\int x^e \, dv}{\int dv} \\ \bar{y}_{c_2} = \dfrac{\int y^e \, dv}{\int dv} \\ \bar{z}_{c_2} = \dfrac{\int z^e \, dv}{\int dv} \end{cases}$

۳) $dv = \underbrace{\pi z^2 \, dy}_{\text{مقدار } x \text{ مساحت دایره}}$

۴) $c^e (0, y, 0)$

گام پنجم جایگذاری

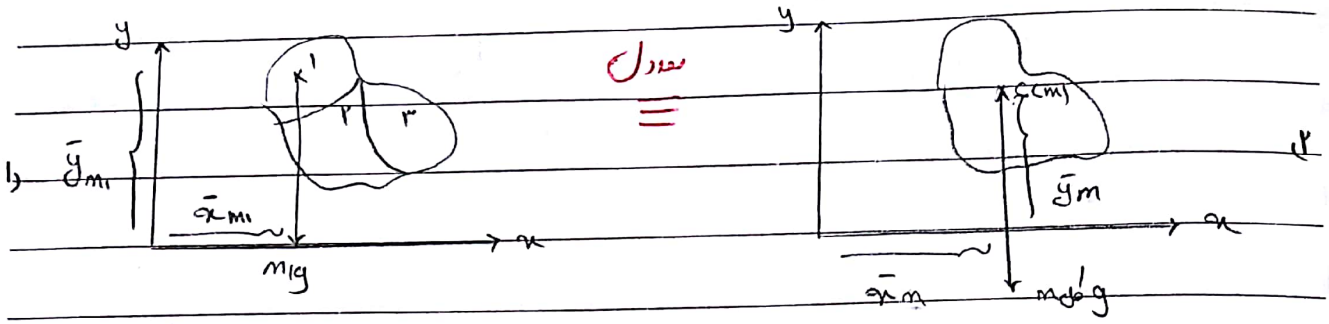
۵) $\bar{y}_{c_2} = \dfrac{\int y \pi z^2 \, dy}{\int \pi z^2 \, dy} = \dfrac{\int_{y=0}^{y=r} y(r^2 - y^2) \, dy}{\int_0^r (r^2 - y^2) \, dy} = \dfrac{3}{8} r$

* $z^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow z^2 = r^2 - y^2$

Scanned by CamScanner

Subject : ۲۰ Year . Month . Date . ( )

مرکز هندسی یا مرکز جرم اجسام سه بعدی: اگر یک جسم را بتوان به تعداد بسیار زیادی تقسیم کرد به طوری که هر کدام مرکز جرم یا مرکز هندسی هر یک از آنها به سادگی قابل تعیین باشد با استفاده از اصل گشتاورها به راحتی می‌توان مرکز هندسی یا مرکز جرم کل شکل را بدست آورد.



گشتاور کل = $m_1 g \bar{x}_{m_1} + m_2 g \bar{x}_{m_2} + m_3 g \bar{x}_{m_3} = m_{ت} g \bar{x}_m$

$$\bar{x}_m = \frac{m_1 \bar{x}_{m_1} + m_2 \bar{x}_{m_2} + m_3 \bar{x}_{m_3}}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad \bar{y}_m = \frac{m_1 \bar{y}_{m_1} + m_2 \bar{y}_{m_2} + m_3 \bar{y}_{m_3}}{m_{ت}}$$

$$\bar{z}_{cg} = \frac{m_1 \bar{z}_{m_1} + m_2 \bar{z}_{m_2} + m_3 \bar{z}_{m_3}}{m_{ت}}$$

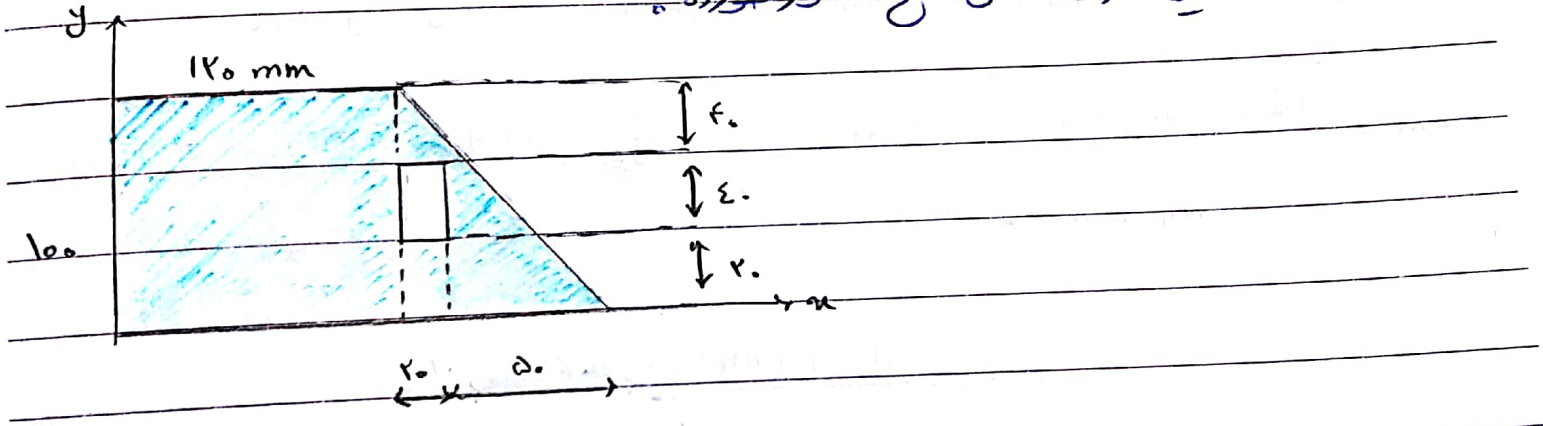
نکته: اگر سوراخ یا حفره داشته باشیم کافی است جرم، حجم، سطح یا طول آن را در روابط منفی بنویسیم.

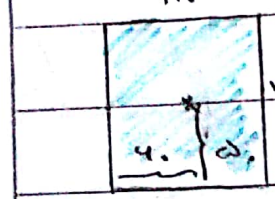
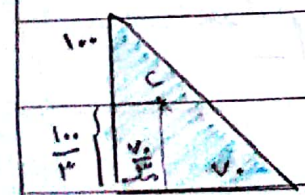
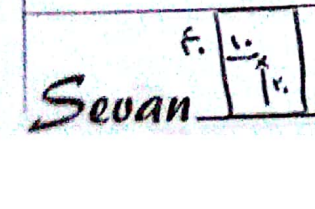
Scanned by CamScanner

Subject : Year . Month . Date :

مرکز جرم	مرکز هندسی		
	حجم	سطح	منحنی (خط)
$\bar{x}_m = \frac{\sum m_i \bar{x}_{mi}}{\sum m_i}$			
	$\bar{x}_c = \frac{\sum v_i \bar{x}_{ci}}{\sum v_i}$	$\bar{x}_c = \frac{\sum A_i \bar{x}_{ci}}{\sum A_i}$	$\bar{x}_c = \frac{\sum L_i \bar{x}_{ci}}{\sum L_i}$
$\bar{y}_m = \frac{\sum m_i \bar{y}_{mi}}{\sum m_i}$	$\bar{y}_c = \frac{\sum v_i \bar{y}_{ci}}{\sum v_i}$	$\bar{y}_c = \frac{\sum A_i \bar{y}_{ci}}{\sum A_i}$	$\bar{y}_c = \frac{\sum L_i \bar{y}_{ci}}{\sum L_i}$
$\bar{z}_m = \frac{\sum m_i \bar{z}_{mi}}{\sum m_i}$	$\bar{z}_c = \frac{\sum v_i \bar{z}_{ci}}{\sum v_i}$	$\bar{z}_c = \frac{\sum A_i \bar{z}_{ci}}{\sum A_i}$	$\bar{z}_c = \frac{\sum L_i \bar{z}_{ci}}{\sum L_i}$

← مطلوب است تعیین مرکز هندسی سطح هاشور خورده :



شکل	مساحت	$(\bar{x}_c, \bar{y}_c)$
	100×120	$(+60, +50)$
	$\frac{1}{2} \times 100 \times 70$	$(120+\frac{70}{3}, \frac{100}{3})$
	40×20	$(120+10, 20+20)$

← مشخصات هاباعلامت برداشت شود

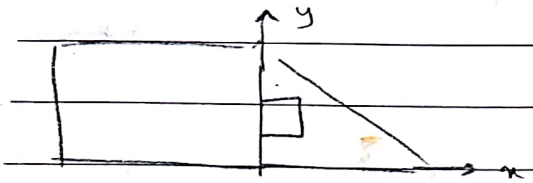
Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : مکانیک ۲ Year . Month . Date . ( )

$$\bar{x}_C = \frac{A_1\bar{x}_{C_1} + A_2\bar{x}_{C_2} + A_3\bar{x}_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{100\times12\times40 + \frac{100\times70}{2}\times(120 + \frac{70}{3}) + (-800\times120)}{100\times120 + \frac{100\times70}{2} - 800}$$

$$\bar{y}_C = \frac{A_1\bar{y}_{C_1} + A_2\bar{y}_{C_2} + A_3\bar{y}_{C_3}}{A_1 + A_2 + A_3} =$$



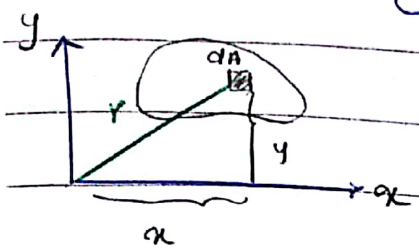
تمرین ← شکل مقابل را با دستگاه مختصات مقابل حل کنید!!!

Scanned by CamScanner

Subject : ۴۳

Year . Month . Date . ( )

گشتاورهای سطح: الف) گشتاور اول سطح ب) گشتاور دوم سطح



الف) گشتاور اول سطح:

$$\begin{cases} Q_y = \int x\, dA = A\bar{x}_c \\ Q_x = \int y\, dA = A\bar{y}_c \end{cases}$$

$$\bar{x}_c = \frac{\int x\, dA}{A} \quad , \quad \bar{y}_c = \frac{\int y\, dA}{A} \qquad **$$

نکته: گشتاورهای اول هر سطح ریاضی حتی هسته دارای مفهوم فیزیکی نمی‌باشند.

ب) گشتاور دوم سطح:

$$I_y = \int x^2\, dA$$

$$I_x = \int y^2\, dA$$

$$I_z = \int r^2\, dA = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA = I_y + I_x$$

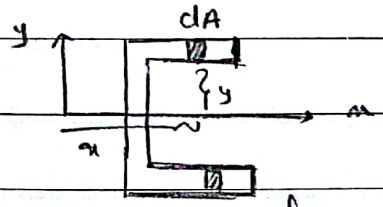
I_z گشتاور قطبی

I_z را با گشتاور قطبی نیز نام برده.

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$

حاصل ضرب اینرسی

نکته: اگر جسم متقارن باشد حتماً محورهای متقارن یکی محورهای تقارن قرار گیرد $I_{xy} = 0$



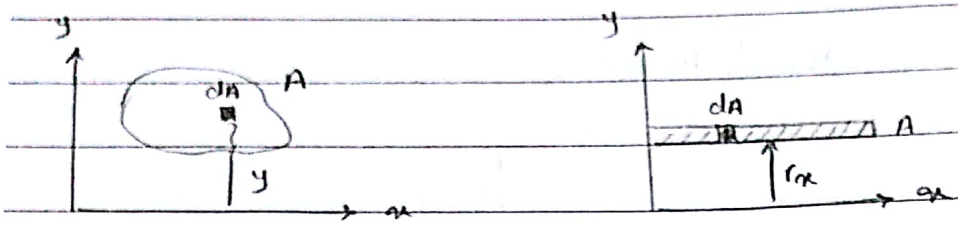
$$I_{xy} = \int xy\, dA - \int xy\, dA = 0$$

Sayan

Scanned by CamScanner

نکته: واحد تست ممان‌های دوم سطح m^4 می‌باشد.

شعاع ژیراسیون (گردش جرمی): اگر سطح مورد نظر را به صورت یک نوار باریک به موازات محورها بخش کنیم داریم:



$$I_{ox})_1 = I_{ox})_2$$

$$I_{ox} = \int y^2 dA = \int r_{ox}^2 dA = r_{ox}^2 \int dA \rightarrow r_{ox}^2 = \frac{I_{ox}}{A}$$

r^2 ثابت

$$\begin{cases} r_{ox} = \sqrt{\frac{I_{ox}}{A}} \\ r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \\ r_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \end{cases}$$

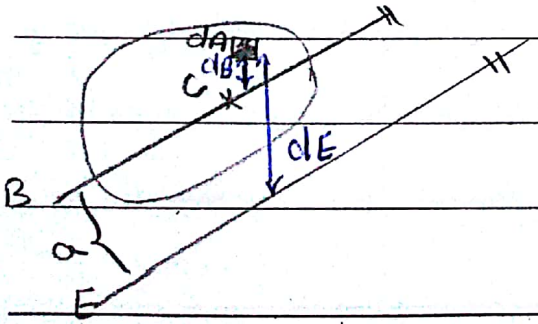
عمود بر سطح $I_z = I_{ox} + I_y$

$$A r_z^2 = A r_{ox}^2 + A r_y^2$$

- تعیین محورهای موازی (انتقال محورها):

گر در محور موازی هم باشند یکی از آنها از مرکز سطح صفحه‌ای عمود نظر بگذرد بین گشتاورهای دوم سطح

حول هریک از آنها رابطه‌ای وجود دارد که برای یافتن آن از تعیین محورهای موازی استفاده می‌شود



$$I_E = I_B + A\alpha^2$$

I_B = $\bar{I}$

Seva

Scanned by CamScanner

Subject :

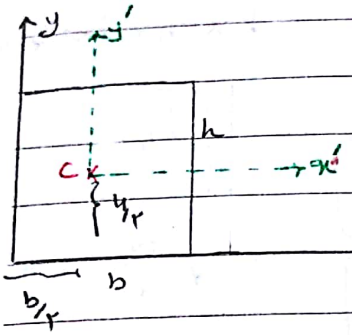
$I_B = \int dB^2 dA$ * مساحت × مجذور بعد گشتاور اول سطح

$I_E = \int dE^2 dA = \int (a + dB)^2 dA = \int dB^2 dA + \int a^2 dA + \int 2a\, dB\, dA$

$= I_B + a^2 A + 2a \int dB\, dA$ *

گشتاور اول سطح $Q = A\, dB$

فاصله مرکز سطح تا محور B فرعی است.



مثال: در مستطیل شکل زیر داده شده مطلوب است:

الف) گشتاور های دوم سطح حول محورهای x و y و گشتاور قطبی

ب) حاصل ضرب اینرسی حول محورهای x و y

ج) شعاع ژیراسیون حول محورهای x و y

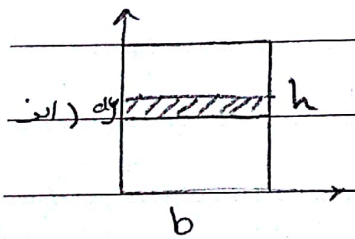
د) گشتاور های دوم سطح و حاصل ضرب اینرسی حول محورهای x', y'

ه) گشتاور اول سطح حول محورهای x و y

ه) $Q_x = \int y\, dA = A\bar{y} = bh \times \frac{h}{2}$

$Q_y = \int x\, dA = A\bar{x} = bh \times \frac{b}{2}$ ← با تقارن

الف) $I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2\, dy = \boxed{\frac{1}{3} b h^3}$ ← مستطیل

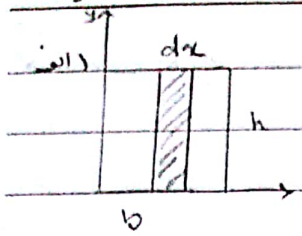


Sevan

Scanned by CamScanner

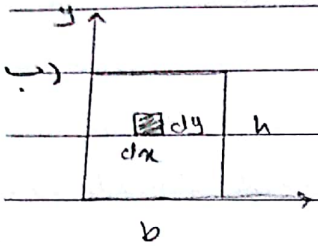
Subject : ۴ع Year . Month . Date . ( )

الف)



$$I_y = \int x^2 dA = \int_0^b x^2 h\,dx = \frac{1}{3} h b^3$$ ← مطلوب

ب)



$$I_{xy} = \int xy\,dA = \iint xy\,dx\,dy =$$

$$\int_{y_1=0}^{h} \underbrace{\left[\int_{x_1=0}^{b} x\,dx\right]}_{\frac{1}{2}b^2} dy = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{4}b^2h^2$$

ج) بدست آوردن J حول مبدأ O $\quad J = I_x + I_y = \frac{1}{3}bh^3 + \frac{1}{3}hb^3 = \frac{1}{3}(bh^3 + hb^3)$

د) شعاع ژیراسیون $\quad I_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}}$

$$I_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{12}bh^3}{bh}}$$

ه) محور موازی $\quad x' \parallel x$: $\quad I_x = I_{x'} + A\bar{y}^2$

از گذشته

$$\frac{1}{3}bh^3 = I_{x'} + bh + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$$ ← مطلوب

$y' \parallel y$: $\quad I_y = I_{y'} + A\bar{x}^2$

$$\frac{1}{3}hb^3 = I_{y'} + hb\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12}hb^3$$ ← مطلوب

x' و y' برای محورهای تقارن جسم استفاده از حاصل ضرب ممان سطح نسبت به آنها ($I_{x'y'}$) صفر است.

$$I_{xy} = I_{x'y'} + A\bar{x}\bar{y}$$

$$\frac{1}{4}b^2h^2 = I_{x'y'} + hb \times \frac{b}{2} \times \frac{h}{2}$$

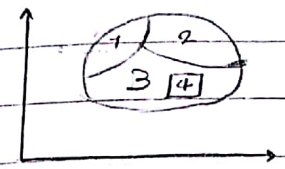
$$I_{x'y'} = 0$$

Se

Scanned by CamScanner

Subject : ۱۷ Year . Month . Date . ( )

۵ شتاب‌های اینرسی سطح برای سطوح مرکب :



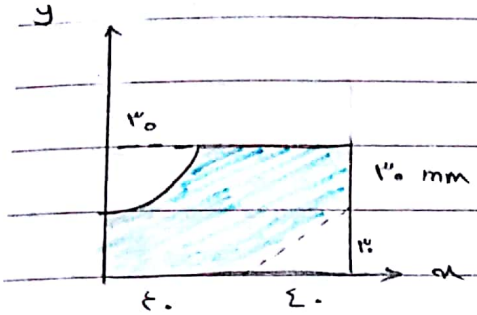
حفره بودن

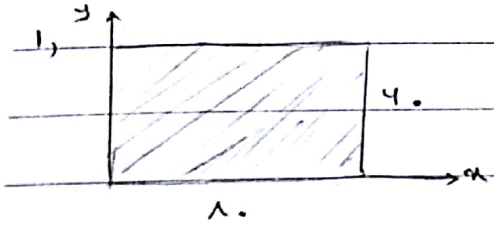
$$I_{ox} = I_{ox_1} + I_{ox_2} + I_{ox_3} - I_{ox_4}$$

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} + I_{y_3} - I_{y_4}$$

مثال: برای سطح هاشور خورده، مطلوب است تعیین شتاب دوم سطح حول محورهای x و y :

شتاب تبدیل حول محورهای x و y



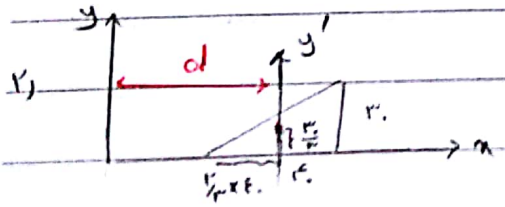


$$A_1 = 80 \times 40$$

$$I_{ox_1} = \frac{1}{3} \times 80 \times 40^3$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{3} \times 40 \times 80^3$$

حفره بودن از جدول



$$A_2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 30$$

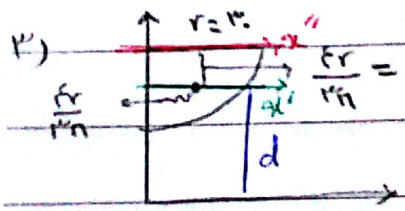
$$I_{ox_2} = \frac{1}{12} \times 40 \times 30^3$$

$$I_{y_2} = ?$$

$$I_{y'} = \frac{1}{36} \times 30 \times 40^3$$

از دو سطح $y \parallel y'$:

$$I_{y_2} = I_{y'} + A d^2 = \frac{1}{36} \times 30 \times 40^3 + \frac{1}{2} \times 30 \times 40 \times \left(40 + \frac{2}{3} \times 40\right)^2$$



$$A_3 = \frac{1}{4} \pi r^2 = \frac{1}{4} \pi \times 30^2$$

$$I_{y_3} = \frac{1}{16} \pi r^4 = \frac{1}{16} \pi (30)^4$$

$$I_{ox_3} = ?$$

Sevan

Scanned by CamScanner

Subject : Year . Month . Date . ( )

$I_{ox''} = \frac{1}{16}\pi r^4 = \frac{1}{16}\pi(30)^4$ ← دایره

$x' \parallel x''$: $I_{ox''} = I_{ox'} + A(\frac{4r}{3\pi})^2 \rightarrow I_{ox'} = I_{ox''} - A(\frac{4r}{3\pi})^2 \rightarrow$ مستطیل

$I_{ox'} = \frac{1}{16}\pi(30)^4 - \frac{1}{4}\pi \times 30^2 \times (\frac{4\times 30}{3\pi})^2$

$y' \parallel x$: $I_x = I_{ox'} + A d^2 \Rightarrow I_{ox} = I_{ox'} + \frac{1}{4}\pi \times 30^2 \times (30+12.72)^2$ مستطیل

$I_{xy'} = I_{x1} - I_{x2} - I_{x3}$

$I_{y'} = I_{y1} - I_{y2} - I_{y3}$

↓ برش منفی بودن ↑

$r_x = \sqrt{\frac{I_{xy'}}{A_{y'}}} = \sqrt{\frac{I_{xy'}}{A_1 \ominus A_2 \ominus A_3}} =$ ← شعاع ژیراسیون

منفی بودن

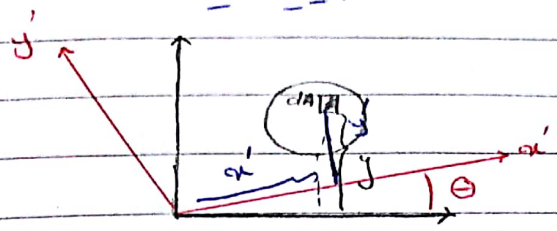
$r_y = \sqrt{\frac{I_{y'}}{A_{y'}}} =$

$J = I_{xy'} - I_{y'}$ ← مان عطبی

نکته: دقت شود که علامت های منفی سهمی بر حفره بودن ریزول های خیلی قرار دهیم.

Scanned by CamScanner

دوران محورها: ممان لختی مقابل شکل را در دستگاه xy در نظر بگیرید در این صورت مشتاورهای دوم سطح نسبت به این دستگاه عبارت اند از:



دستگاه xy $\quad I_x = \int y^2 \, dA$

$I_y = \int x^2 \, dA$

$I_{xy} = \int xy \, dA$

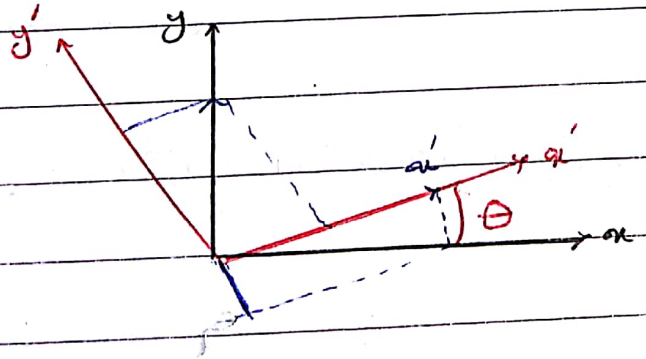
حال محورهای x و y به اندازه θ دوران داده و به محورهای جدید $x'y'$ می‌رسیم که مشتاورهای دوم سطح حول این محورهای جدید عبارت اند از:

دستگاه $x'y'$ $\quad I_{x'} = \int y'^2 \, dA$

$I_{y'} = \int x'^2 \, dA$ *

$I_{x'y'} = \int x'y' \, dA$

به دنبال یافتن رابطه‌ای بین مشتاورهای دوم سطح در دستگاه جدید و دستگاه قدیم هستیم



برای این منظور داریم:

دو بردار xy را بر حسب $x'y'$ تجزیه می‌کنیم

$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

Scanned by CamScanner

Subject : ۵ Year . Month . Date . ( )

* جابجایی : $I_{x'} = \int (y\cos\theta - x\sin\theta)^2 dA =$

$\int y^2 \cos^2\theta \, dA + \int x^2 \sin^2\theta \, dA - \int 2xy \sin\theta \cos\theta \, dA$

از نکات مهندسی $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$

جابجایی روابط مثلثاتی

۱ $I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2}$ (میانگین I_{ave}) $+ \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$

۲ $I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$

۳ $I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$

به دنبال آن هستیم که $I_{x'y'}$ را برحسب $I_{x'}$ یا $I_{y'}$ بیان کنیم برای این منظور باید داشته باشیم:

حل می‌کنیم : $\left(I_{x'} - I_{ave} = \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta\right)^2$ → (+)

$\left(I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta\right)^2$

$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2$

به معادله به دایره میرسیم که مرکز و شعاع آن عبارت است از

معادله دایره : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

c | a, b , R

Sevan

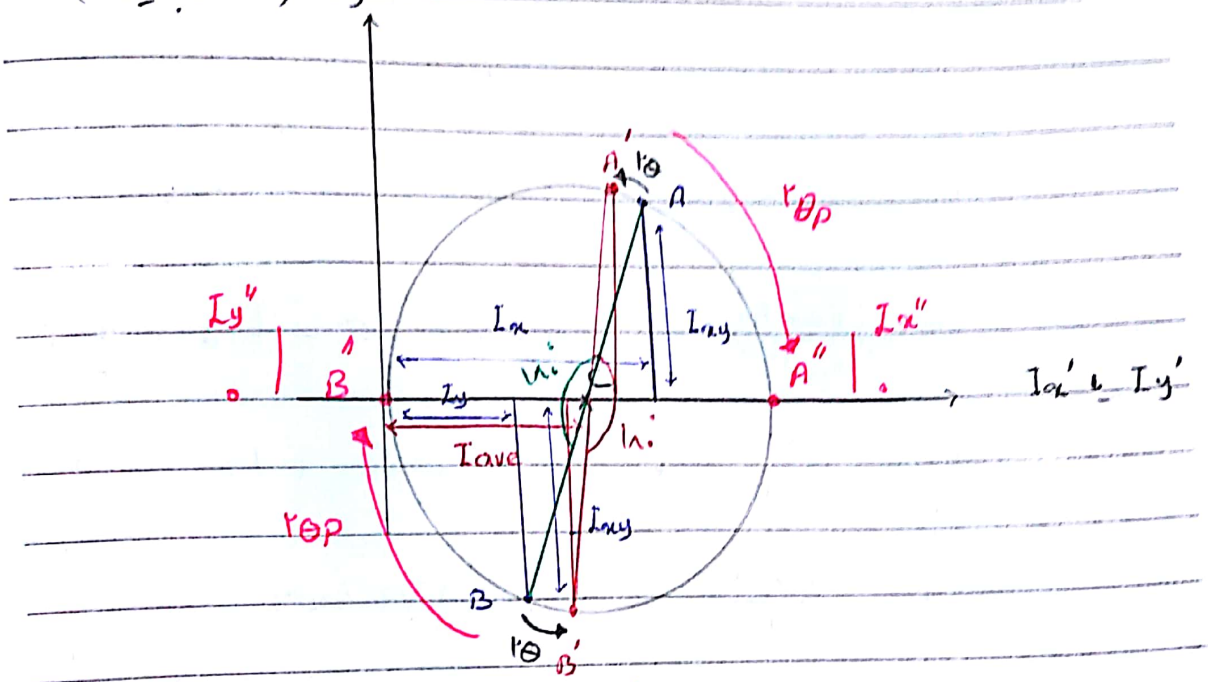
Scanned by CamScanner

Subject : V1

Year , Month , Date , ( )

$C \left| \begin{matrix} I_{ave} \\ 0 \end{matrix} \right.$ $\qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$

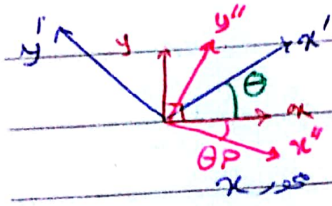
(حداکثر ممان اینرسی) $I_{x'y'}$



← به دایره‌ی حاصله دایره مور (هندسی) می‌گویند.

دقت ۱۰

۱- هر نقطه روی دایره مور بیانگر لشتاورهای اینرسی حول یک محور است از این رو محور x و y را با نقطات A و B به صورت زیر نشان می‌دهیم قرارداد می‌کنیم همه محور عمود بر هم دارای حداکثر اینرسی غالب پیدیری دایره مور باشند



محور x : A | I_x , I_{xy}

محور y : B | I_y , $-I_{xy}$ } قرارداد

سمت xy

Scanned by CamScanner

Subject : ۷۲ Year . Month . Date . ( )

دستگاه x'y' { محور x' : A' | $I_{x'}$ / $I_{x'y'}$; محور y' : B' | $I_{y'}$ / $-I_{x'y'}$

۲- بردی دایره ی نور از هر محور به محور بعدی ۹۰ برابر زاویه ی بین آنها طی می شود زیرا در روابط ۱ تا ۳ جلالت داشت sin2θ ، cos2θ داریم.

۳- براساس نکته قبل، هر ۹۰ درجه محور عمود بر هم، بردی دایره ی نور در سر یک قطر هستند یعنی زاویه بین آنها در برابر شده است.

۴- اگر زاویه بین دو محور ۹۰ باشد بردی دایره نور یا دو ساعت گرد می کنیم و اگر نباشد ساعت گرد می کنیم.

۵- برای دیدن زاویه $\alpha_{p''}$ به دو محور خاص "x" و "y" می رسیم که شاخص های ایزنسی حول آنها عبارت اند از:

دستگاه "x"y" { محور x" : A" | $I_{x''} = I_{max} = I_{ave} + R$ حاصلضرب ایزنسی صفر است. ; محور y" : B" | $I_{y''} = I_{min} = I_{ave} - R$ }

محورهای نرمال اینرسی اصلی

به این محورهایی که حاصلضرب ایزنسی حول آنها صفر بود شاخص دوم ایزنسی حول "y" یعنی max و حول دیگری min است، محورهای نرمال اینرسی اصلی می گویند.

Scanned by CamScanner

Subject : ۷۳ Year . Month . Date . ( )

$\tan 2\theta_p = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$ ← تکمیل

θ_p : زاویه‌ای که باید از محورهای اولیه حول آن شود تا به محورهای سرنوشتاری اصلی برسیم.

۶- چون ایستی عطبی دهری دستگاه باهم برابر است زیرا محور Z یکسان می‌باشد پس داریم :

$J = I_x + I_y$

$J = I_{x'} + I_{y'}$

$J = I_{x''} + I_{y''}$

۷- برای بدست آوردن گشتاورهای هم‌سطح حول محورهای جدید از دو روش زیر می‌توانیم استفاده کنیم :

الف) از فرمول‌های ۱ تا ۳ با جایگذاری زاویه‌ی دوران استفاده کرده و $I_{x'}$ ، $I_{y'}$ ، $I_{x'y'}$ را محاسبه کنیم.

ب) براساس خواص محورهای اولیه حول مایروی دوران رسم کرده و از نقاط مربوط به این محورها به اندازه دو برابر زاویه مورد نظر به صورت ساعت‌گرد یا پادساعت‌گرد، حرکت کنیم تا به محورهای جدید برسیم سپس به صورت هندسی از روی شکل مقادیر $I_{x'}$ ، $I_{y'}$ ، $I_{x'y'}$ بدست آوریم.

Sevan

Scanned by CamScanner

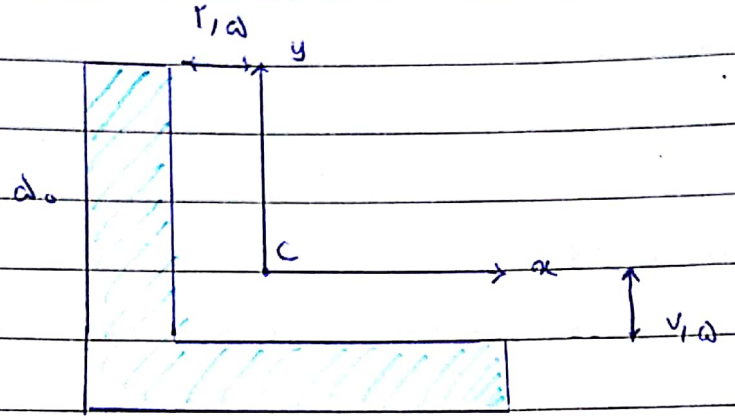
Subject : ۷۴ Year . Month . Date . ( )

مثال: اگر یک سرکل شکل هاشور خورده باشد

الف) تعیین گشتاور دوم سطح و حاصلضرب اینرسی حول محورهای x و y

ب) رسم دایره مور

ج) با فرض زاویه دوران برای رسیدن به محورهای مرکزی اصلی گشتاور دوم سطح حول آنها

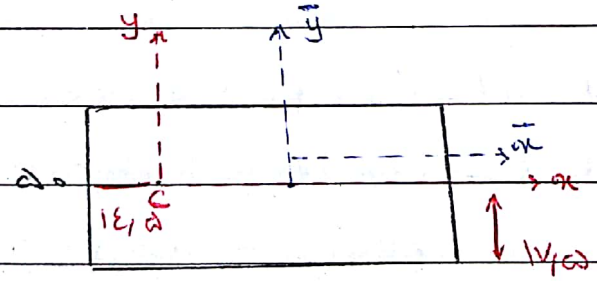


۴۰ mm

$I_{ox} = + I_{1,x} + I_{2,x}$

$I_y = + I_{1,y} - I_{2,y}$

$I_{xy} = + I_{xy_1} - I_{xy_2}$



۴۰

$x \parallel \bar{x}$, $I_x = I_{\bar{x}} + A d^2$

$\Rightarrow I_{1,x} = \frac{1}{12} \times ۴۰ \times ۵۰^3 + ۵۰ \times ۴۰ (۲۵ - ۱۷٫۵)^2 = ۵۲۹۱۴۶٫۹ mm^4$

Scanned by CamScanner

Subject : Year . Month . Date . ( )

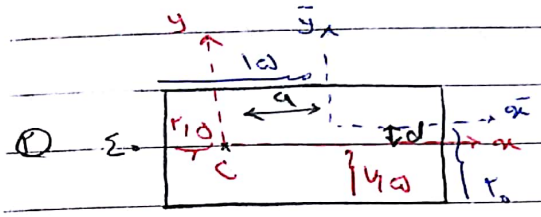
$y \parallel \bar{y}$ $\quad I_y = I_{\bar{y}} + A a^2$

$I_y = \frac{1}{12} \times 5 \times 40^3 + 5 \times 40 \times (20 - 12{,}5)^2 = 379144{,}4 \text{ mm}^4$

$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + A a d = 0 + 5 \times 40 \times (20 - 12{,}5)(25 - 17{,}5)$

$= 11250 \text{ mm}^4$

$I_{\bar{x}\bar{y}} = 0$ در شکل



$x \parallel \bar{x} \rightarrow I_x = I_{\bar{x}} + A d^2$

$I_{2x} = \frac{1}{12} \times 30 \times 40^3 + 30 \times 40 \times (20 - 17{,}5)^2 = 374500 \text{ mm}^4$

$y \parallel \bar{y} \rightarrow I_y = I_{\bar{y}} + A a^2$

$I_{2y} = \frac{1}{12} \times 40 \times 30^3 + 30 \times 40 \times (15 - 2{,}5)^2 = 277500 \text{ mm}^4$

$I_{xy} = I_{\bar{x}\bar{y}} + A a d = (15 - 2{,}5)(20 - 7{,}5) \times 30 \times 40 = 187500 \text{ mm}^4$

$I_x = I_{1x} - I_{2x} = 379144{,}4 - 374500 = 18{,}14 \times 10^4$

$I_y = I_{1y} - I_{2y} = 379144{,}4 - 277500 = 10{,}14 \times 10^4$

$I_{xy} = I_{xy_1} - I_{xy_2} = 112500 - 187500 = -7{,}5 \times 10^4$

Scanned by CamScanner

Subject :

Year . Month . Date . ( )

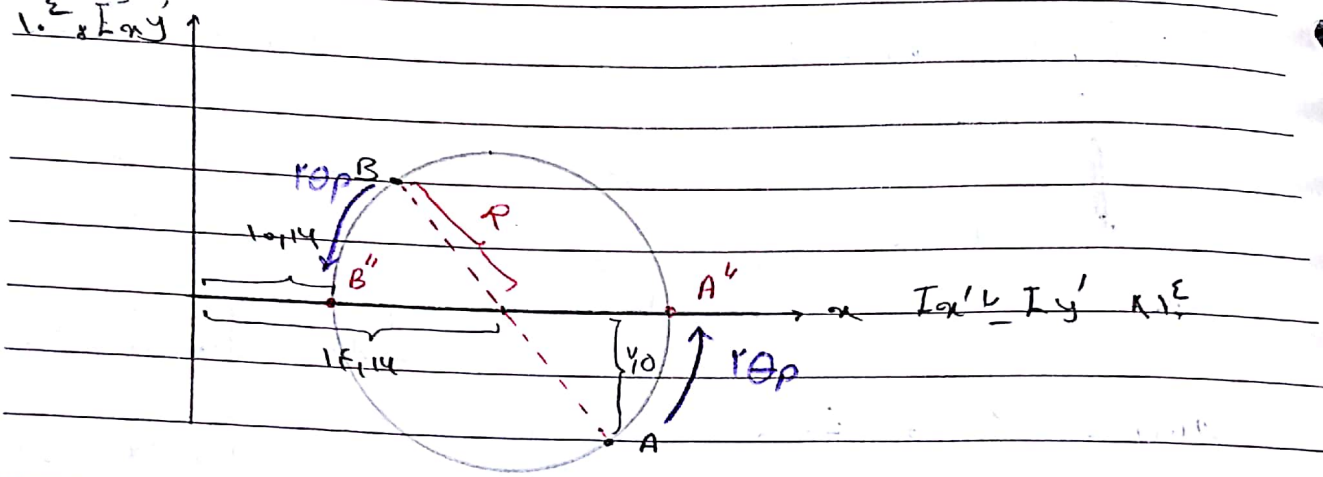
$$I_{ave} = \frac{I_x - I_y}{2} = 14.14 \times 10^{4}$$

C

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} = 8.5 \times 10^{4}$$

A: $I_x = 18.14 \times 10^{4}$, $I_{xy} = 7.5 \times 10^{4}$

B: $I_y = 10.14 \times 10^{4}$, $I_{xy} = 7.5 \times 10^{4}$



$$\tan 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{-2 \times 7.5 \times 10^{4}}{(10.14 - 18.14) \times 10^{4}} \Rightarrow \theta_p = +31^{\circ}$$

ج

A''

$$I_{max} = I_{ave} + R = (14.14 + 8.5) \times 10^{4}$$

B''

$$I_{min} = I_{ave} - R = (14.14 - 8.5) \times 10^{4}$$

خیلی مهم نیست: اگر دوره‌ای مقدارت روی سطح مقابل جسم برود از آنجایی که عاملش ایستس

نیست به آنها صفر است این خورها مربوط‌اند اضافی هستند.

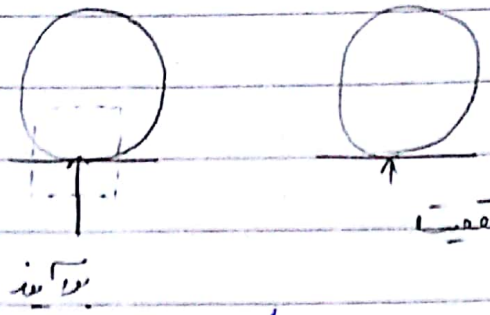
Sevan

Scanned by CamScanner

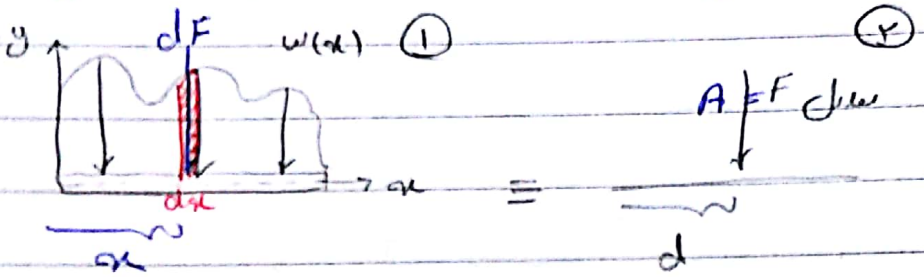
Subject : ۷۷ Year . Month . Date .

بارهای گسترده : بارهای متمرکز به فضای دیتی وجود خارجی ندارند زیرا خارجی نه بر جسم است

می‌تواند بر روی یک سطح عدد هر چند کوچک هم باشد گسترده خواهد بود



بار گسترده w را به صورت زیر در نظر بگیرید که w_{dx} شدت بار گسترده و یا به عبارت دیگر چگالی نیرو بر واحد طول است. معادل $A = F$



$$\int dF = \int w\,dx = F_{معادل}$$

$$w(x) = \frac{\text{نیرو}}{\text{طول}} \;,\; \frac{N}{m} \;,\; \frac{N}{m} \;,\; \frac{lb}{in} \Rightarrow F_{معادل} = \int w\,dx = \int dA = A$$

به دنبال آن هستیم به جای بار گسترده از یک نیرو معادل در یک مکان مشخص استفاده کنیم

به عبارت دیگر می‌خواهیم سیستم ۱ و سیستم ۲ را با یکدیگر معادل قرار دهیم.

در سیستم زیر نیز با یکدیگر برابرند : مساحت زیر نمودار $w-x$ $\Rightarrow A$

الف) برآیند نیروهای آنها با یکدیگر برابر باشد.

ب) گشتاور نیروها حول یک محور دلخواه در هر دو سیستم باید با هم برابر باشد.

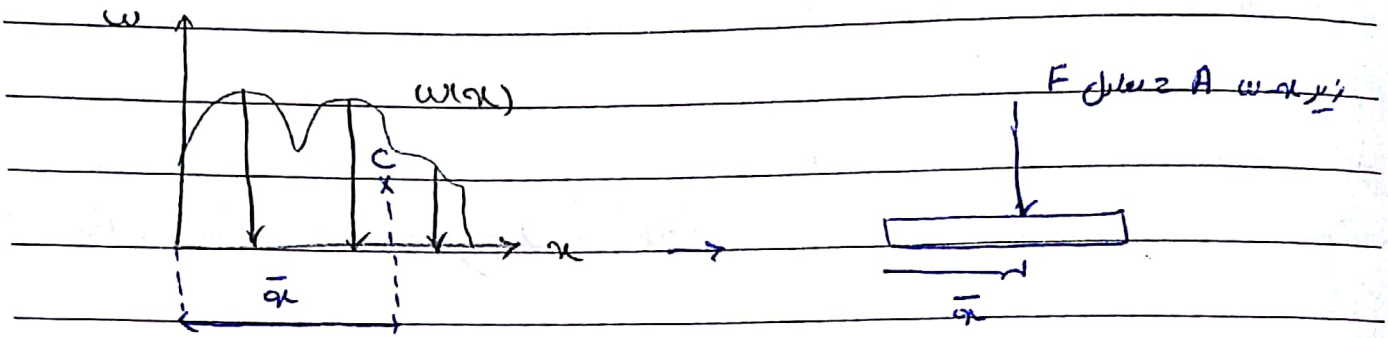
Sevan

Scanned by CamScanner

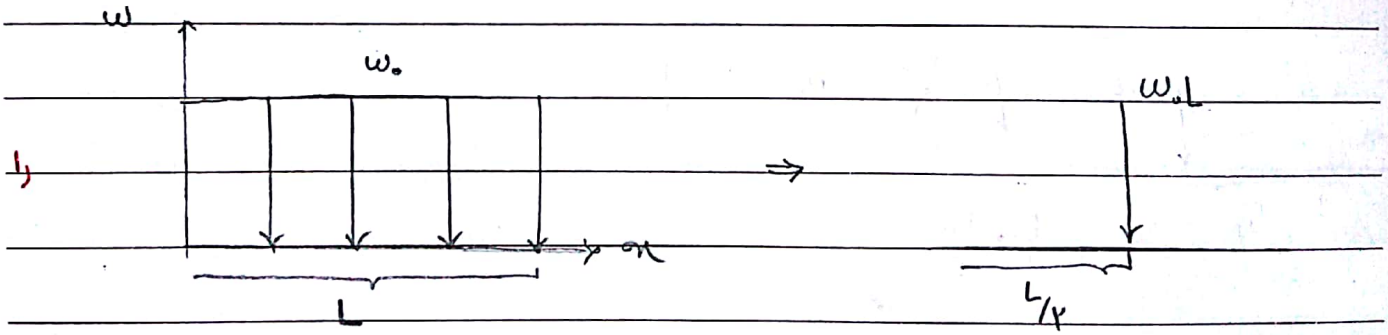
مثال است مرکز سطوح محور y را برای هر دستگاه مشخص کنید:

۱ = ۲

$\int x dF = Fd \rightarrow d = \frac{\int x\, dF}{F} = \frac{\int x\, dx}{A} = \bar{x}$ ← مرکز سطح ۱ / زیر x-w

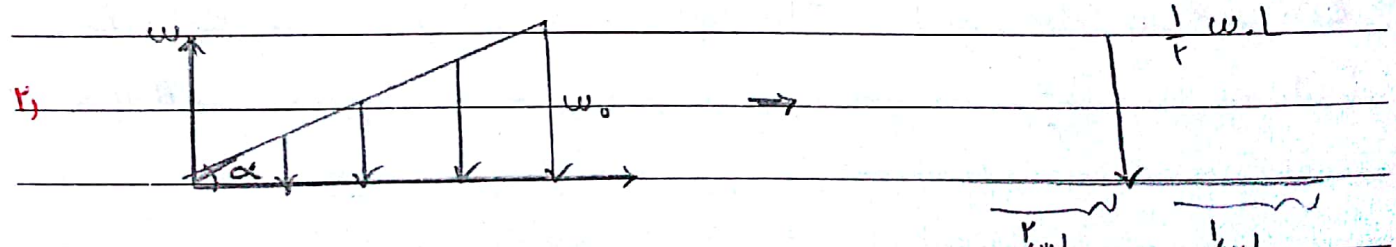


مطلوب است تعیین نیروی معادل و مکان اعمال آن در بارهای گسترده زیر نشان داده شده



۱)

$w(x) = w_0 \Rightarrow$ بار گسترده یکنواخت (uniform)



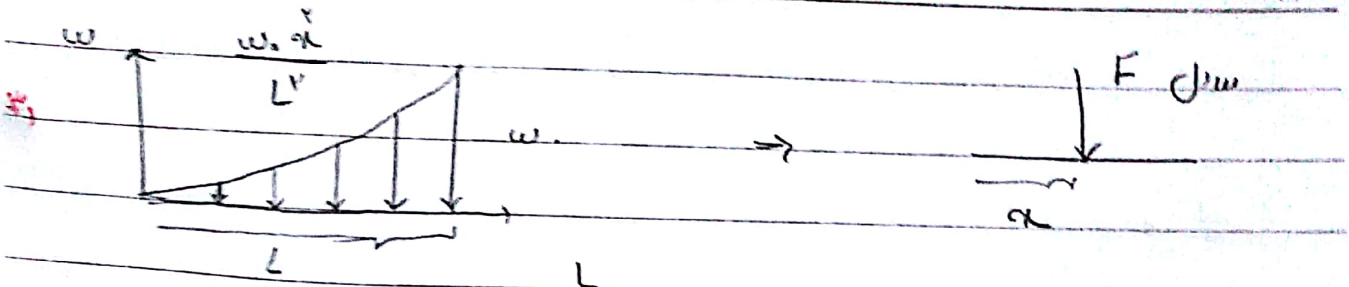
۲)

$w(x) = \tan\alpha\, x = \frac{w_0}{L} x$ ← بار گسترده مثلثی / شیب

Sevan
Scanned by CamScanner

Subject : ۷۹

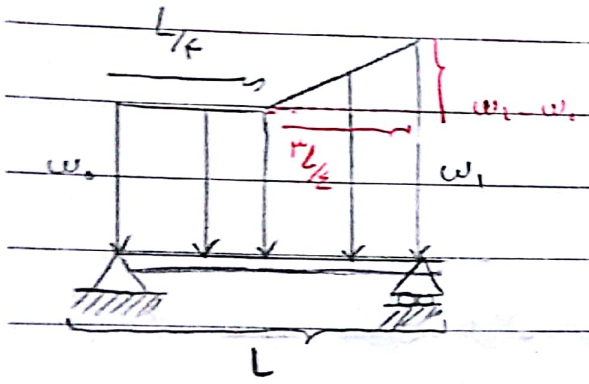
Year . Month . Date . ( )

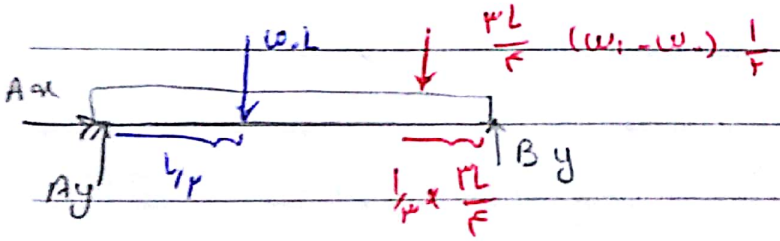


$$w(x) = \frac{w_0}{L^2} x^2 \qquad \int_0^L \frac{w_0}{L^2} x^2 dx = \frac{w_0}{L^2} \times \frac{1}{3} L^3 = \frac{w_0 L}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A} = \frac{\int x w dx}{\frac{w_0 L}{3}} = \frac{\int_0^L x \, w_0/L^2 \, x^2 dx}{w_0 L/3}$$

سؤال: مطلوب است تعیین نیروهای عکل تکیه گاهی:





$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

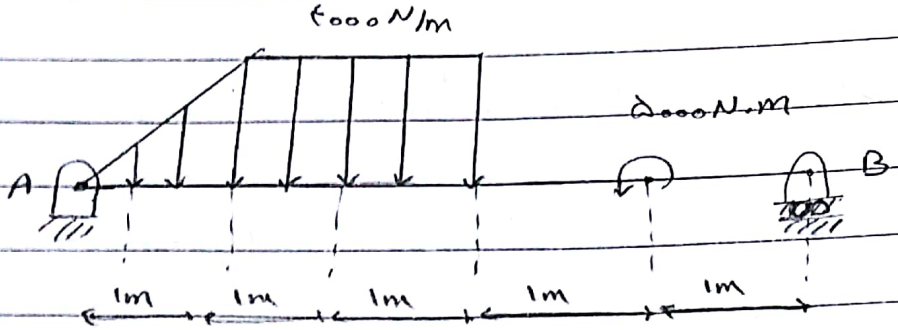
$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - w_0 L - \frac{3L}{8}(w_1 - w_0) + B_y = 0 \rightarrow B_y = \surd\surd$

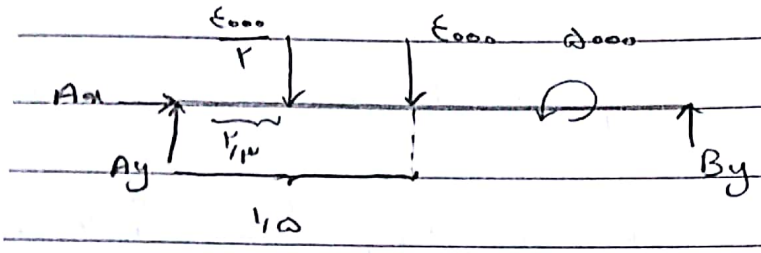
$\Sigma M_B = 0 \rightarrow \frac{3L}{8}(w_1 - w_0)\frac{L}{4} + w_0 L \frac{L}{2} - A_y L = 0 \rightarrow A_y = \surd\surd$

Scanned by CamScanner

Subject : ۸۰ Year . Month . Date . ( )

مثال: مطلوب است یافتن بردهای تکیه‌گاهی:



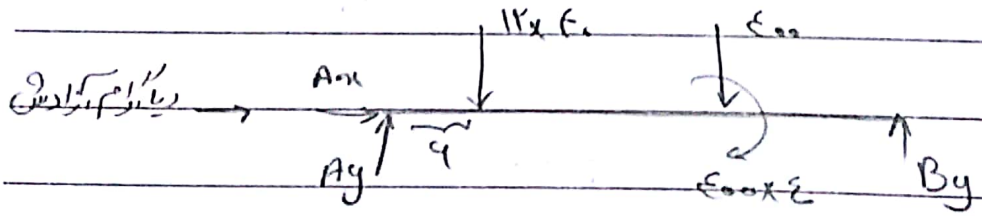


$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y - 2000 - 4000 + B_y = 0 \rightarrow A_y = \checkmark$

$\sum M_{A_z} = 0 \rightarrow 2000 \times \frac{2}{3} - 2000 \times 1.5 + 5000 + B_y \times 4 = 0 \rightarrow B_y = \checkmark$

سوال ۴ سری دوم فصل ۵

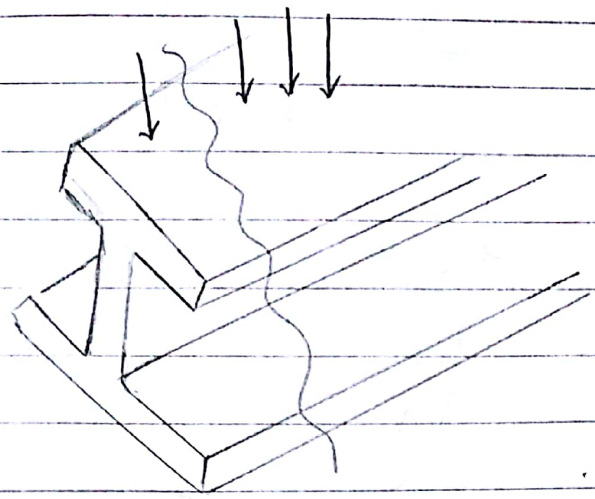


Scanned by CamScanner

Subject : ۸۱ Year . Month . Date . ( )

تیرها

اعضای طویل که سطح مقطع آنها نسبت به طول تیر ثابت می‌ماند به جز اعضایی اعضای



سطحی می‌گویند. در این بارهای بر تیر را

عمود بر محور طولی آن تیر به صورت عضو

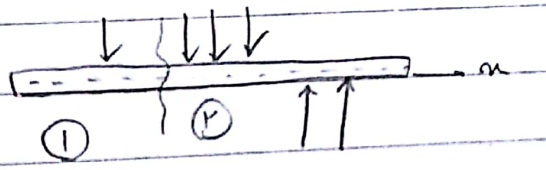
(تنش عرضی Trans verse) تنش می‌گیریم

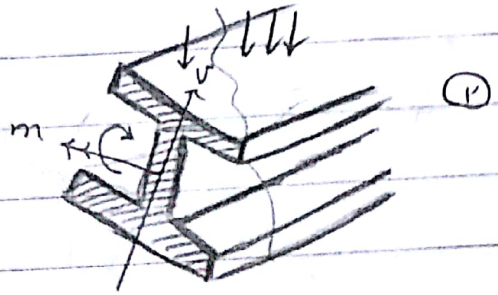
به دنبال آن هستیم که ببینیم از این تیرها در داخل

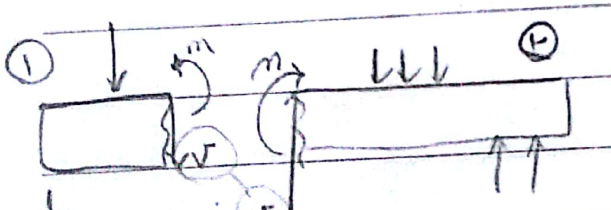
تیر به چه صورت است. برای این منظور باید مقطع بزنیم در اثر مقطع زدن دو عکس عامل می‌شود

که یکی از آنها را در نظر گرفته و با آن کار می‌کنیم آزاد آن را رسم می‌کنیم.

به عنوان مثال عکس ۲ را در نظر می‌گیریم.







بارهای داخلی صلب

V: نیروی برشی (عامل برش)

m: ممان خمشی (عامل برش مقطع تیر است)

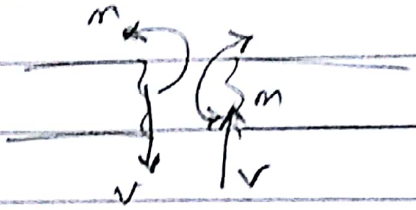
n: نیروی محوری (برشی)

Sevan

عمل عکس العمل

همان طور که مشاهده می‌شود در سطح داخلی برش خورده ۱۲ اتم پیوند یونی رشته B و یک میان خسته m است.

طبق قرارداد جهت بُرد m و v روی قطعات ایجاد شده به صورت زیر می‌باشد



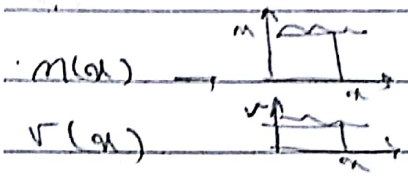
به ازای آن جسم مزبور m و v برحسب q_e به دست آوردیم

q_{e1} : v_1 , m_1

q_{e2} : v_2 , m_2

q_{e3} : v_3 , m_3

⋮



برای این منظور گام‌های زیر را طی می‌کنیم:

۱- دیاگرام طی سرراست و با اعمال تعادل نیروهای مجهول را می‌یابیم.

۲- میله را (شکل اصلی) از بار تا بار تقسیم بندی می‌کنیم به عبارت دیگر از بار تا بار شرایط شناخته از لحاظ بارگذاری برای نقاط وجود دارد.

۳- در هر تقسیم بندی صورت گرفته تعادل زده و یکی از عضوهای حاصله را نگه می‌داریم دیاگرام آزاد

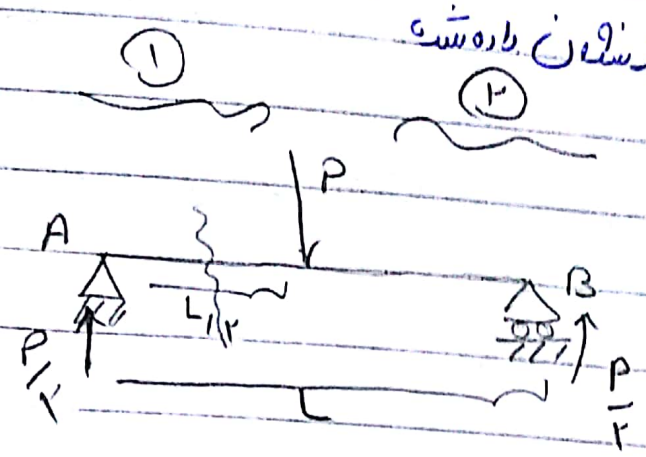
Scanned by CamScanner

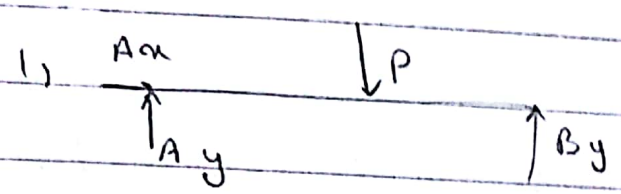
Subject : ۸۳

Year . Month . Date .

آن را رسم کرده و اعمال نقاط ۲، ۱ را محاسبه می‌کنیم

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام V و M برای تیر شکل زیر:



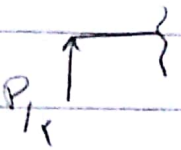


$\sum F_{x=2} \rightarrow A_x = 0$

$\sum F_{y=2} \rightarrow A_y + B_y - P = 0 \rightarrow A_y = \frac{P}{2}$

$\sum m_{A=2} \rightarrow -P\frac{L}{2} + B_y L = 2 \rightarrow B_y = \frac{P}{2}$

①: $0 < x < \frac{L}{2}$

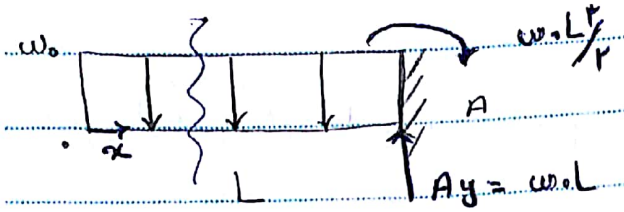


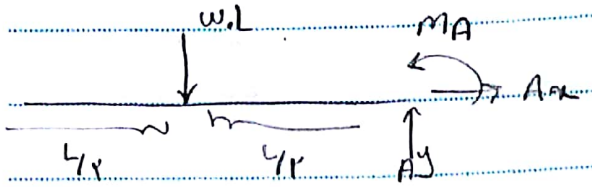
Scanned by CamScanner

Year: Month: Date:

Subject:

مثال مطلوب است تعیین نحوه‌ی m و v برای تیر شکل زیر:





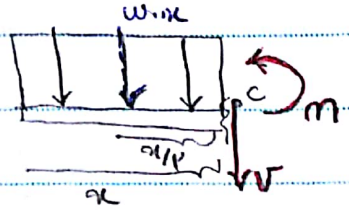
$$\sum A_x = 0$$

$$A_y - w_0L = 0 \rightarrow A_y = w_0L$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_A + w_0L \times L/2 = 0$$

$$M_A = -w_0L^2/2$$

① $0 < x < L$

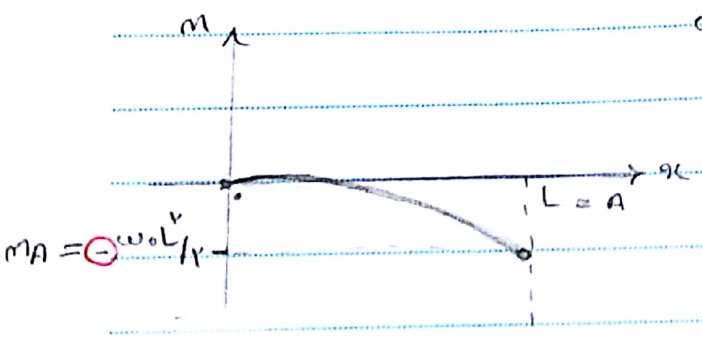


$$V + w_0x = 0 \rightarrow V = -w_0x$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow m + w_0x \times x/2 = 0 \rightarrow$$

$$m = -w_0x^2/2$$

↓



از m شروع شده و تقعر منفی
به $(w_0x^2/2)$ میخورد
منفی شد تحت بار ○
پشت شد تحت بار ∪

* در محل دو بار در شکل شکستگی.



(پس شکست m همان ۲ است)

شکل کلی است

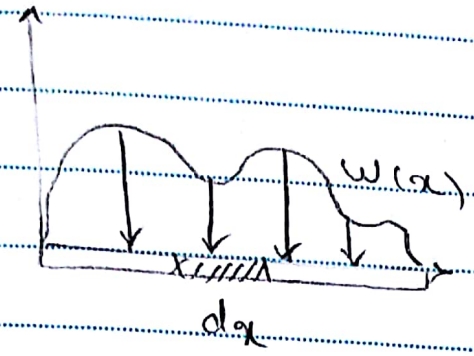
تراز بالای

Scanned by CamScanner

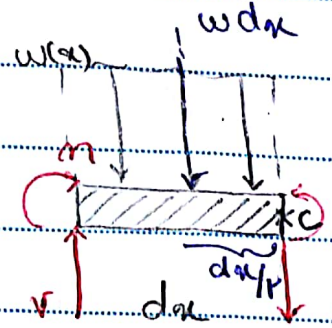
Subject:

Year: Month: Date:

تعاریف معادلات: تیری مطابق شکل تحت بارگذاری گسترده $w(x)$ قرار دارد:



المان کوچک به اندازه dx از تیر را می‌بریم



$V + dV + w\,dx - V = 0 \rightarrow dx\,w = dV$

$w = -\frac{dV}{dx}$ ← بر حسب x

$\Sigma M_C = 0 \rightarrow m + dm + w\,dx \times dx/2 - V\,dx - m = 0$

صرف نظر می‌شود

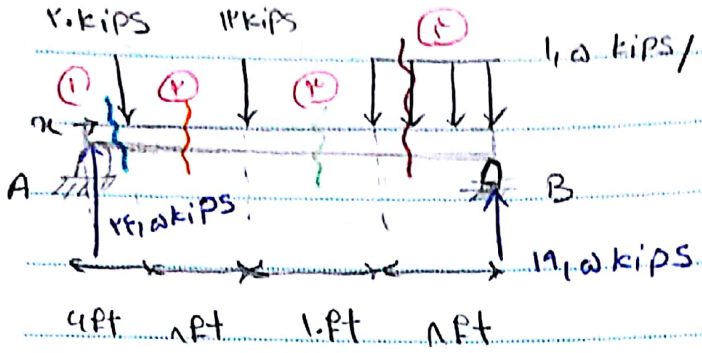
$\rightarrow dm = V\,dx \rightarrow V(x) = \frac{dm}{dx}$

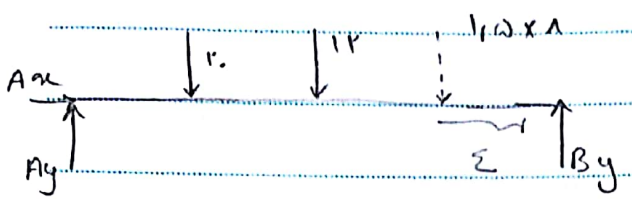
$$\begin{cases} V(x) = \frac{dm}{dx} \\ w(x) = -\frac{dV}{dx} \\ w(x) = -\frac{d}{d(x)}\left(\frac{dm}{dx}\right) = -\frac{d^2m}{dx^2} \end{cases}$$

← هر سه معادله

Scanned by CamScanner

مثال: مطلوب است رسم دیاگرام های نیروی برشی و لنگر خمشی تیر زیر:





$A_x = 0$

$A_y - 20 - 12 - 8 \times 1.5 + B_y = 0$

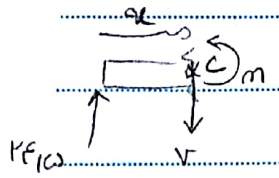
$\Sigma m_B = 0 \rightarrow 1.5 \times 8 \times 4 + 12 \times 18 + 20 \times 44 + (-A_y \times 32) = 0$

$A_y = 24.5\ kips$

$B_y = 19.5\ kips$

* اگر بیرونی بودن نقطه ای برش مهم انتخاب کردی شرط همین است انتخاب کن.

① $0 < x < 4\ ft$

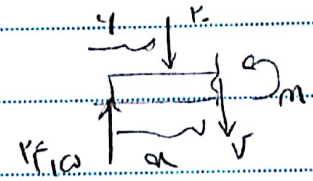


$V - 24.5 = 0 \rightarrow V = 24.5$

$\Sigma m_C = 0 \rightarrow m - 24.5 \times x = 0$

$m = 24.5x$ ✓

② $4 < x < 14$



$V + 20 - 24.5 = 0$

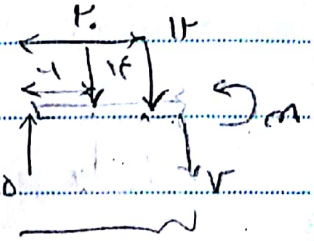
$V = 4.5\ kips$

$\Sigma m_C = 0 \rightarrow$

$m + 20(x-4) - 24.5(x) = 0$

$m = 4.5x + 120$

③ $14 < x < 24$



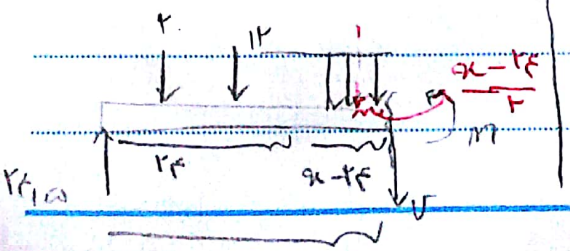
$V + 12 + 20 - 24.5 = 0$

$V = -7.5\ kips$

$m + 12(x-14) + 20(x-4) - 24.5(x) = 0$

$m = -7.5x + 248$

④ $24 < x < 32$ $\quad x - 24$



Scanned by CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

$v + \omega_{1,\omega}(x-4) + 12 + 2 - 24{,}5 = 0 \rightarrow v = -1{,}\omega x + 28{,}5$

$m + \omega_{1,\omega}(x-4)\frac{x-4}{2} + 12(x-1) + 2(x-4) - 24{,}5x = 0$

$m = 0{,}75x^2 + 28{,}5x - 134$

① $0 < x < 4$: $v = 24{,}5$

$m = 24{,}5x$ → $x=0 \rightarrow 0$, $x=4 \rightarrow 98$

② $4 < x < 14$: $v = 4{,}5$

$m = 4{,}5x$ → $x=4 \rightarrow 18$, $x=14 \rightarrow 63$

③ $14 < x < 24$: $v = -7{,}5$

$m = -7{,}5x + 28{,}5$ → $x=14 \rightarrow 63$, $x=24 \rightarrow -105$

④ $24 < x < 32$: $v = -1{,}5x + 28{,}5$

$m = -0{,}75x^2 + 28{,}5x - 134$

$x=24 \rightarrow -38$, $x=32 \rightarrow -70$

ریشه‌ها قسمتی نیستند

$-1{,}\omega x + 2\cdot$

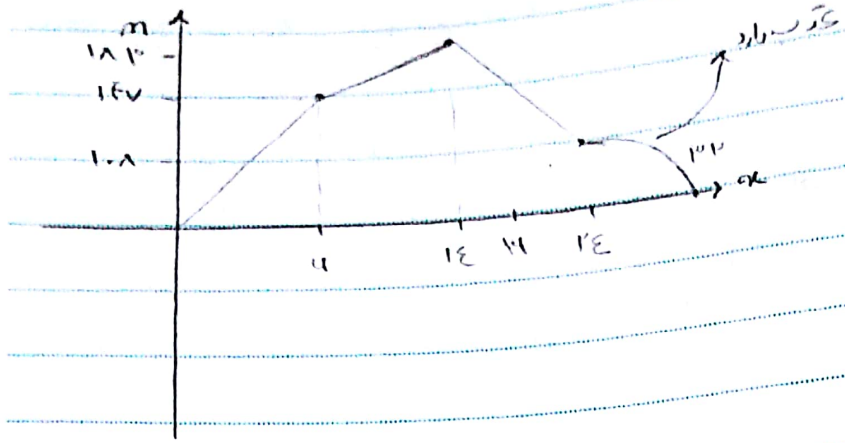
↓

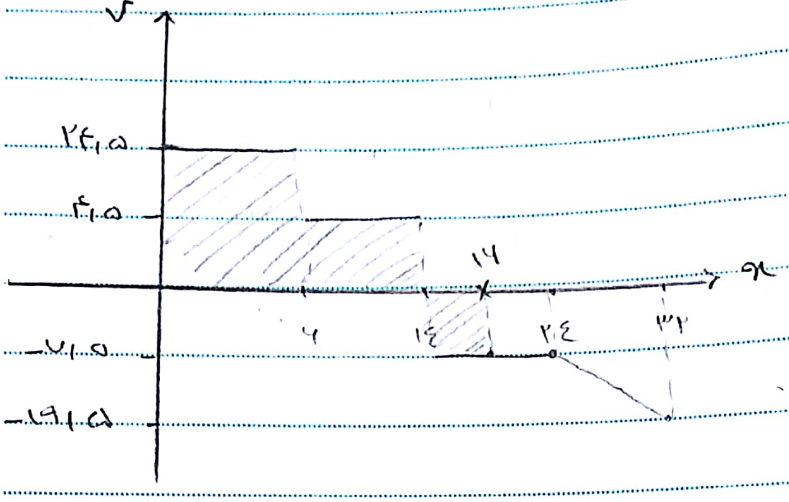
غیرقابل

$x=21 \rightarrow 1{,}5$

$x=32 \rightarrow 0$

Scanned by CamScanner





by =

اگر معمولی داشتیم که از انتهای سمت راست $M = 0$ می‌شد
(معمولی حمار خارجی)

مطلوب است تعیین M و V داخلی در نقطه $x=14$ از سمت:

$x=14$

$V = -7.5 \text{ kips}$

$M = -7.5 \times 14 + 288 = 183$

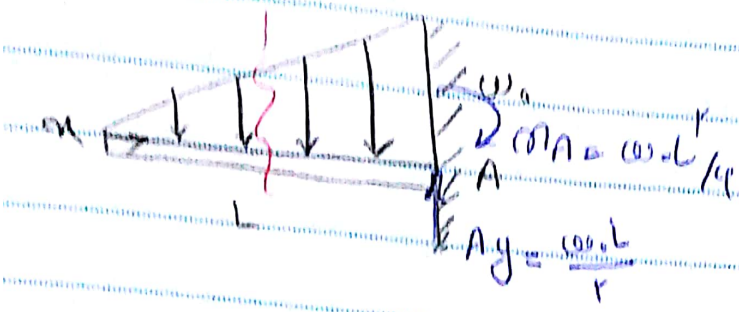
$V = -7.5 \text{ kips}$

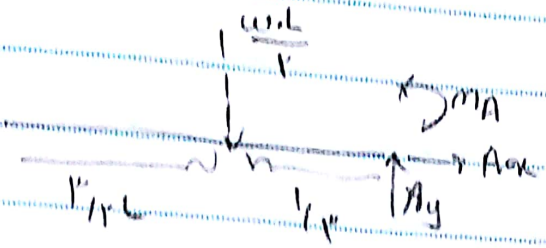
$\frac{V = dM}{dx} \rightarrow M = \int V\,dM = V \cdot x$ مساحت سطح زیر نمودار

SOBHAN

$M = +24.5 \times 4 + 6.5 \times 8 - 7.5 \times 2 = 183$

بالای خط است / زیر خط است





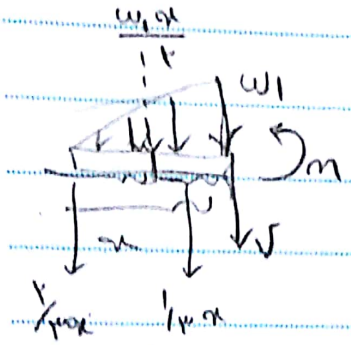
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

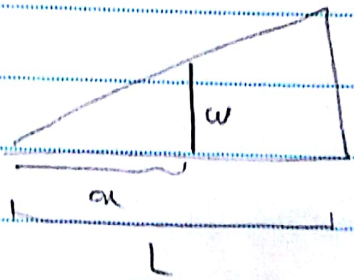
$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y - wL/2 = 0 \Rightarrow A_y = wL/2$

$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + wL/2 \times L/2 = 0$

$M_A = -wL^2/4$

جهت آن ساعتگرد است.





$\frac{x}{L} = \frac{w_1}{w_0} \Rightarrow w_1 = w_0 \frac{x}{L}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow -V - \frac{w_1 x}{2} + \frac{w_0 x}{2} = 0 \Rightarrow V = \frac{w_0 x}{2L}(L - x)$

$\sum M = 0 \Rightarrow M + \frac{w_1 x}{2} \times \frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow M = -\frac{w_0 x^3}{6L}$

بار مثلثی با شیب رو به بالا را بار نوع (۳) می‌نامند.

بار مثلثی با شیب رو به پایین را بار نوع (۲) می‌نامند.

Scanned by CamScanner