وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveotamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Year : ..... Month : ..... Day : .....

ماتریس ها : $A_{n\times m}$ یک ماتریس n سطر و m ستون.

به صورت زیر :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ماتریس مربعی : $n=m \Leftarrow A_{n\times n}$

ماتریس سطری : یک سطر و m ستون : $n=1 \leftarrow A_{1m}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$

ماتریس ستونی : یک ستون دارد و n سطر : $m=1 \leftarrow A_{n1}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

ماتریس قطری (مربعی) : بالا و پایین قطر اصلی صفر است.

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & & \bigcirc \\ & a_{21} & \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

این ماتریس را با نماد $diag[a_{11}\ a_{22}\cdots a_{nn}]$ نشان می‌دهیم.

مثال : $diag\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

$diag\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$ (واحد) ماتریس همانی

ماتریس بالا مثلثی (مربعی) : پایین قطر اصلی صفر است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ 0 & a_{22} & \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بالا مثلثی : $i>j \Rightarrow a_{ij}=0$

ماتریس پایین مثلثی (مربعی) : درایه های بالای قطر اصلی صفر است.

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ & a_{22} & \\ a_{ij} & & 0 \\ & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

پایین مثلثی : $j>i \Rightarrow a_{ij}=0$

ماتریس پلکانی : ماتریس $A_{n\times m}$ را می توان با خطوط فرضی دلخواه به زیر ماتریس ها تبدیل نمود.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

می بینیم که M ماتریس مثلثی نیست اما می تواند پلکانی یا مثلثی باشد.

$$M=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

جمع و تفاضل ماتریس ها : هم باید دقیق تعداد ستون ها و سطر ها با هم برابر باشند.

Year : Month : Day :

$$A_{n\times m} \pm B_{n\times m} = C_{n\times m} = [a_{ij} \pm b_{ij}]$$

ضرب عدد (اسکالر) در ماتریس :

$K \in \mathbb{R}$, $A_{n\times m}$

$$KA = [Ka_{ij}]$$

ضرب ماتریس ها :

$$C_{n\times m} = A_{n\times k} \times B_{k\times m}$$

مثال :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = C_{2\times 3}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow (2\times 0) + (0\times 2) + (4\times 1) = 4$

در اعداد برای پیدا کردن x :

$$2x = 11 \longrightarrow x = \frac{11}{2}$$

در ماتریس مقابل برای پیدا کردن B :

$$A \cdot B = C \xrightarrow[\text{سمت چپ در } A^{-1} \text{ ضرب}]{\text{اگر } A \text{ وارون پذیر باشد از}} \underbrace{A^{-1}A}_{I} B = A^{-1} \times C$$

$$\longrightarrow \boxed{B = A^{-1}C}$$

نکته : ضرب ماتریس ها خاصیت جابجایی ندارد ، ولی ضرب ماتریس های قطری جابجا می شود .

Year : ..... Month : ..... Day : .....

مثال : $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$diag[7\ -3] \cdot diag[4\ 1] = diag[7\times4\ \ -3\times1]$

دترمینان : فقط برای مربعی ها دترمینان داریم.

حالت اول : $A_{1\times1} \Leftarrow$

$A = [a_{11}]$

$|A| = a_{11}$

حالت دوم : $\Leftarrow A_{2\times2}$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc$

حالت سوم : اگر $A_{3\times3}$: دراین فصل روش سارروس گفته می‌شود.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{11}\ a_{12}$

$a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{21}\ a_{22}$

$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{31}\ a_{32}$

$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$

دوستان اول ما کنار ماتریس بی نویسیم و قطر اصلی را کشیده با دو خط موازی اش اعدادی که روی این اقطار هست را با هم ضرب کرده و جمع می کنیم. حین کار راروی عضو فرعی انجام داده و قطر اصلی را از عضو فرعی کم می کنیم در انتها.

Year : ..... Month : ..... Day : .....

مثال :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$+(-12) = -12$

$|A| = -5 - (-12) = 7$

$-8 + 3 + 0 = -5$

حالت های خاص : اگر A بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد، آنگاه :

$$|A| = a_{11} \times a_{22} \times \cdots \times a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

همین است

هم چنین اگر A قطری باشد : $A = diag[a_{11} \cdots a_{nn}]$

آنگاه :

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- A وارون پذیر است اگر و فقط اگر دترمینان A برابر صفر نباشد.

A وارون پذیر است $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

مثال : $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (7 \times (-3)) - 0 = -21 \neq 0$

$\Rightarrow$ پس A^{-1} موجود

وارون ماتریس قطری :

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وارون $A_{2\times 2}$: اگر $|A| = ad - bc \neq 0$ آنگاه A^{-1} موجود است.

Year :..... Month :..... Day :.....

اولین روش برای محاسبه A^{-1} در حالت کلی:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} a=1 \\ b=2 \\ c=3 \\ d=4 \end{matrix} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 6z = -3 \\ 3x + 4z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3y - 6t = 0 \\ 3y + 4t = 1 \end{cases}$$

$$-2z = -3 \rightarrow z = +\frac{3}{2} \rightarrow \boxed{z = \frac{c}{b}} \qquad -2t = 1 \rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$3x + 4\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \longrightarrow 3x + 6 = 0 \rightarrow x = -2 \rightarrow \boxed{x = -b} \qquad \boxed{t = -\frac{a}{b}}$$

$$-3y - 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-3y + 3 = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow \boxed{y = a}$$

اعمال مقدماتی در ماتریس ها: اعمال سطری / اعمال ستونی (در این جزوه فقط سطری بررسی میشود)

اعمال مقدماتی سطری ۳ نوع اند:

۱) جابجایی ۲ سطر. $L_i \leftrightarrow L_j$

۲) ضرب یک سطر در یک اسکالر: $L_i \rightarrow KL_i$ و K اسکالر (ناصفر)

مثال:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Year : Month : Day :

۳) افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

$$K L_i + L_j \longrightarrow L_j$$

مثال:
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_1 + L_2 \to L_2} \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 0 + \frac{3}{2}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

معادله خطی: هر جمله حداکثر یک متغیر با توان یک داشته باشد.

مثال: $x^2 - 5y = 3$ خطی نیست

$3x - 5y + 7z = 12$ خطی است

$\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n-1}}} - y = 0$ خطی نیست

$\sqrt{x} - 3y = 7$ خطی نیست

$xy + z = 2$ خطی نیست

این جمله ۲ متغیر دارد.

دستگاه معادلات خطی:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

ماتریس ضرایب:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Year : Month : Day :

بردار مجهول (جواب) :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

بردار ثابت :

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

در این صورت داریم :

$$AX = B$$

یادآوری : نمایش بردار

حالت اول : به صورت چند تایی مرتب

$$\vec{u} = (2, 5)$$

حالت دوم : برحسب بردارهای یکه

$$u = 2i + 5j$$

حالت سوم : به صورت ماتریس ستونی

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس افزوده : ستون B را به انتهای ستون های ماتریس A اضافه می کنیم .

مثال :
$$\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \longrightarrow M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

Year : ..... Month : ..... Day : .....

تعریف دستگاه های هم ارز: دو دستگاه با یکدیگر هم ارزند ($\Leftrightarrow$) جواب های یکسان داشته باشند.

- اگر بر ماتریس افزوده عملیات سطری مقدماتی انجام شود دستگاه جدید با دستگاه اول هم ارز است.

حل دستگاه معادلات خطی به روش حذفی گاوس:

ابتدا در ماتریس افزوده، قسمت ماتریس ضرایب مثلثی می شود (بالا مثلثی یا پایین مثلثی).

مثلاً بالا مثلثی: مراحل را در دستگاه مقابل اجرا می نماییم:

$$\star \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = 3 \\ 3x - z = 6 \end{cases}$$

a_{11} باید مخالف صفر باشد (اگر صفر بود جا به جایی سطر استفاده می کنیم). با استفاده از a_{11} تمام درایه های دیگر ستون اول به صفر تبدیل می شوند.

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\text{برای راحت تر شدن}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right]$$

M: ماتریس افزوده

این ۳ تا باید صفر شوند با استفاده از a_{11}

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to -3r_1 + r_3]{r_2 \to -2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to -r_2 + r_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$$

به شرط $a_{22} \neq 0$ بقیه درایه های زیر a_{22} صفر می شود. به همین ترتیب الی آخر به کمک درایه های روی قطر اصلی درایه های زیر آن صفر می شود.

SEPEHR

Year :..... Month :..... Day :.....

بعد از این مرحله جواب ها را به سمت بالا جایگذاری پیدا می‌کنیم

یعنی از معادله‌ی آخر شروع کردن جواب می‌دهیم :

معادله آخر : $-2z = 0 \longrightarrow z = 0$

معادله دوم : $-3y - 2z \overset{z=0}{=} -3 \longrightarrow y = 1$

معادله اول : $x + y + z = 3 \longrightarrow x = 2$

بردار جواب $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ یا $2i + j$

تعریف معادله تبهگن : معادله‌ای است که ضریب تمام مجهولات صفر باشد.

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

معادله تبهگن بر ۲ نوع است :

۱) حالت اول : $b = 0$ اگر تنها بود بی نهایت جواب داد اما اگر در دستگاه بود جواب تغییر نمی‌کرد.

$\vec{0}\vec{X} = 0$

★ اگر این حالت در دستگاه معادلات بود این معادله هیچ تأثیری در جواب دستگاه ندارد و از آن صرف نظر می‌شود.

۲) حالت دوم : اگر $b \neq 0$

$\vec{0}\vec{X} \neq 0$

در این حالت این معادله و کل دستگاه ناسازگار است.

مثال : $0x + 0y = 8$ ✗

Year: Month: Day:

درایه پیشرو: در ماتریس A، در هر سطر به اولین درایه‌ی غیرصفر، پیشرو گوییم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{3} & -1 \\ \textcircled{2} & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} \end{bmatrix}$$

○ پیشرو

تعریف ماتریس سطری پلکانی: درایه‌ی پیشرو در سطر پایینی در ستون راست‌تر از درایه‌ی پیشرو در سطر بالایی قرار گیرد. یعنی پیشرو آخر در ستون سمت راست‌تر از پیشرو سطرهای بالاتر باشد. اگر در ستون اول و دوم در سطرهای پایینی در ۳ سطر بالا... باشد. اگر در ستون ۳ در سطرهای پایینی در ۳ سطر بالا... باشد. سطرهای صفر در پایین ماتریس قرار گیرند.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

سطرهای صفر

تغییرات سطر ۱ و ۲ برای تبدیل به سطری پلکانی

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(درایه‌های زیر پیشرو صفر باشد)

تعریف متغیر وابسته: بعد از اینکه ماتریس افزوده سطری پلکانی شد در قسمت ماتریس ضرایب متغیرهایی که در ستون ضرایب پیشرو داریم، آن متغیر وابسته است.

اول

مثال: فرض کنید دستگاه $AX=B$ موجود است که ماتریس افزوده آن به صورت زیر سطری پلکانی شده است:

دوم

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{3} & 3 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & -2 \end{array}\right]$$

x_4 ← x_3 ← x_2 ← x_1 ← ضرایب مربوط به x_1

در ستون‌های پیشرو (x_1 و x_3 و x_4) ⇒ متغیر وابسته

Year :..... Month :..... Day :.....

متغیر هایی که وابسته نیستند را آزاد گوییم.

در مثال قبلی: x_2 آزاد است.

بحث در مورد جواب این دستگاه:

چون متغیر آزاد داریم لذا دستگاه بی نهایت جواب دارد.

هم‌ارز یا هم‌جواب هاوتی

★ محاسبه جواب: برای محاسبه جواب عمومی دستگاه به جای متغیر (یا متغیرهای) آزاد پارامتری نداریم سپس بقیه متغیرها را بر حسب پارامتر فوق بدست می‌آوریم.

$x_2 = t$ روش برد و

معادله دوم: $4x_3 + x_4 = 1 \longrightarrow \boxed{x_3 = \frac{1}{2}}$

معادله اول: $2x_4 = -2 \longrightarrow \boxed{x_4 = -1}$

$2x_1 + 3t - x_3 = 4 \longrightarrow \boxed{x_1 = -t + \frac{3}{2}}$

بردار جواب عمومی: $\begin{bmatrix} -t + \frac{3}{2} \\ t \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{t=0}$ $X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

بردار جواب خصوصی

مثال: ماتریس افزوده و سطری پلکانی را بیابید:

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ y + 2z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 10 \end{cases}$$

SEPEHR

Year : Month : Day :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & -3 & 2 & | & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_2+R_3\to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

nay : وابسته

z : آزاد

$rank = 2$

سطر آخر حذف چون صفر است و تاثیری ندارد

$z = t \longrightarrow y + 2t = 0 \to y = -2t$

$x - 2y = 5$

$x + 2t = 5 \to x = 5 - 2t$

$\longrightarrow X = \begin{bmatrix} 5-2t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}$ بردار جواب عمومی

$t = 0 \longrightarrow x = 5$

$y = 0, z = 0$

$\longrightarrow X = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ بردار جواب خصوصی

تعریف بعد ماتریس A ($rank\,A$): تعداد درایه های پیش و بعد از سطری یکانی.

تمرین:

① $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

③ $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ -x - y = 0 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

Year : ..... Month : ..... Day : .....

سپس درایه های بالای درایه ی پیشرو در هر ستون باید صفر شود.
ستونی که پیشرو ندارد با هاشور کاری نداریم.

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}l_3+l_1\to l_1]{\frac{1}{2}l_3+l_2\to l_2}\begin{bmatrix}1&1&0&1&-\frac{1}{18}\\0&-4&0&1&\frac{5}{6}\\0&0&-6&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{-l_2+l_1\to l_1}\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{4}{18}\\0&-4&0&\frac{5}{6}\\0&0&-6&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

در مرحله ی بعد هر سطر را به درایه ی پیشرو خودش تقسیم می کنیم.

$$\xrightarrow[-\frac{1}{4}l_3\to l_3]{-\frac{1}{3}l_2\to l_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{4}{18}\\0&1&0&-\frac{5}{18}\\0&0&1&\frac{1}{18}\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{matrix}x_1=\frac{4}{18}\\x_2=-\frac{5}{18}\\x_3=\frac{1}{18}\end{matrix}$$

تعریف ماتریس تحویل یافته یا ساده شده ی سطری ماتریسی است که در آن درایه های پیشرو یک باشند و بالا و پایین درایه ی پیشرو صفر باشد.

ماتریس های مقدماتی:

یادآوری اعمال سطری مقدماتی

۱) جابجایی ۲ سطر
۲) ضرب اسکالر در سطر
۳) افزودن مضرب سطری به سطر دیگر

برای هریک از اعمال فوق یک ماتریس تعریف می شود. به عنوان مثال برای جابجایی ۲ سطر:

ماتریس های مقدماتی حتماً باید مربعی باشند.

Year : Month : Day :

برای جابجایی سطر i با سطر j در ماتریس $A_{n\times m}$ می‌توان از ماتریس مقدماتی $E_{n\times n}$ استفاده کرد.

نحوه ساختن ماتریس E:

ماتریس واحد $I_{n\times n}$ را تشکیل داده و سطر i را با سطر j جابجا نمایم.

$$I_{n\times n} \xleftrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} E$$

سپس با ضرب E در A (EA)، سطر i ام در A با سطر j ام جابجا می‌شود.

مثال) می خواهیم L_1 را با L_3 جابجا کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

از ماتریس مقدماتی E_1 استفاده می کنیم،

$$I_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

مثال) ماتریس مقدماتی E_2 را چنان بسازید که $3L_1+L_2 \to L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_1+L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_2$$

$$E_2A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Year : ... Month : ... Day : ...

وارون ماتریس های مقدماتی :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad E_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_1+L_2\to L_2}$$

$$E_2A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}=B$$

$$E_2A=B \longrightarrow \boxed{A=E_2^{-1}B}$$

در مثال فوق E_2 معادل $L_2 \to 3L_1+L_2$ بود برای ساختن E_2^{-1} قسمت

قرارداد میکنیم : $-3L_1+L_2 \to L_2$

داریم :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3L_1+L_2\to L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=E_2^{-1}$$

یعنی برای وارون این باید وقتی عددی را ۳ برابر L_1 روی L_2 جمع کردی تو وارون ۳ برابر L_1 رو کم کن از L_2 L_1 وقتی میره جای ۵ برابر L_1 دو جا بجا کردی باید برای وارون تقسیم بر ۵ کنی.

حل دستگاه به روش تجزیه LU :

$$A=\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+5x_3=1 \\ 3x_1-x_2+x_3=1 \end{cases}$$

الف) تجزیه LU :

ماتریس A مفروض است. منظور از تجزیه LU آن است که ماتریس A را به صورت حاصل ضرب یک ماتریس مثلثی پایین و ماتریس U بالا مثلثی موجود باشند که داشته باشیم :

$$\boxed{A=L\cdot U}$$

Year: Month: Day:

ابتدا مانند روش حذفی گاوس ماتریس ضرایب باید بالا مثلثی شود.
دیگر ماتریس افزوده نیاز نیست. اینجا ماتریس ضرایب داریم.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_1+l_2\to l_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-l_3]{3l_1+l_3\to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

E_1 ↓ ↓

E_1A — اینجا عملیات متوقف شد. — E_2E_1A

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2l_1+l_2\to l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\xrightarrow{2l_1+l_2\to l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1^{-1}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3l_1+l_3\to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

$$\xrightarrow{+3l_1+l_3\to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^{-1}$$

اول

$$\xrightarrow{-\frac{4}{3}l_2+l_3\to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} = U$$

E_3

$E_3E_2E_1A$

اینا ماتریس بالا مثلثی U است

$E_3E_2E_1A = U$

دوم

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{4}{3}(2l_2+l_3\to l_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

$$\xrightarrow{\frac{4}{3}l_2+l_3\to l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} = E_3^{-1}$$

SEPEHR

Year : Month : Day :

نکته: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

برای محاسبه L و U:

داریم:

$$E_3 E_2 E_1 A = U$$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} U$$

به دنبال $A = LU$ هستیم

یعنی داریم:

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

L

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

حل دستگاه فوق با تجزیه LU:

داریم:

$$\begin{cases} AX = B \\ A = LU \end{cases}$$

$$\Rightarrow L(UX) = B$$

$$Y_{3\times 1}$$

SEPEHR

بردار جهت‌دار اندازه‌دار آن را اسکالر مقدار اندازه

Year : ..... Month : ..... Day : .....

یادآوری بردارها (فصل اول)

نمایش بردار در $\mathbb{R}^n$:

۱) n تایی مرتب : $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

مثال : در $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (2, 0, -3)$

۲) اگر $e_1, e_2, \dots, e_n$ بردارهای پایه در $\mathbb{R}^n$ باشند.

$(0, \dots, 0, 1)$ ← n تا

$(0, \dots, 0, 1, 0)$ ← n تا

مثال : در $\mathbb{R}^3$:

$e_1 = i = (1, 0, 0)$

$e_2 = j = (0, 1, 0)$

$e_3 = k = (0, 0, 1)$

$u = (2, 0, -3) = 2i - 3k$

ترکیبی از بردارهای پایه : $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$

۳) به صورت ماتریس ستونی $n \times 1$:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی ۲ بردار (تعمیم): که با نماد $\langle u, v \rangle$ و یا $u \cdot v$ نشان داده می‌شود و داریم:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad , \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

حاصل ضرب داخلی یک عدد است.

ضرب داخلی خاصیت جابجایی دارد.

تعریف نرم بردار (طول بردار): که با نماد $\|u\|$ نشان می‌دهیم

و داریم: $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} = \left(\sum u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

به عبارت دیگر:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|u\|^2 = \langle u, u \rangle}$$

تعریف دیگر ضرب داخلی:

$$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

که θ زاویه‌ی بین u و v است.

Year : ..... Month : ..... Day : .....

بردار یکه (بردار با طول واحد) در راستای $\vec{u}$:

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{||u||}$$

- مطلوبست بردار $\vec{v}$ در راستای و جهت u که $||v|| = 2,1$:

$$\vec{v} = 2,1\ \hat{u} = 2,1 \times \frac{\vec{u}}{||u||} = \frac{2,1}{||u||}\ \vec{u}$$

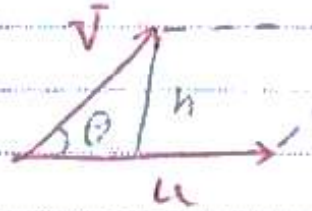
ضرب خارجی ۲ بردار : $u \times v$

که حاصل آن برداری است که بر u و v عمود است و در جهتی است که اگر انگشت بر صفحه‌ای که u و v هستند عمود است با u و v دستگاه راست‌گرد تشکیل دهد، یا در جهت را انگشت بر u و v عمود است.

ابتدا اندازه‌ی بردار $\vec{u} \times \vec{v}$:

$$||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin\theta$$

تعبیر هندسی این عدد :



مساحت متوازی الاضلاع = طول قاعده × ارتفاع

$$||u|| \times h$$

$$S = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \sin\theta \Rightarrow S = ||u \times v||$$

SEPEHR

Year : Month : Day :

حاصل برد طر $\overrightarrow{u \times v}$: در $(\mathbb{R}^3)$ داریم :



$i \times i = 0$ $\quad i \times j = k$

$j \times j = 0$ $\quad \star \quad k \times j = -i$

$k \times k = 0$ $\quad \vdots$

$$(u \times v) = (u_1 i + u_2 j + u_3 k) \times (v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$

★ مؤلفه ها درهم ضرب می شوند به کمک قانون بالا

مثال:

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$(-i+k) \times (2j+3k) = -2\, i \times j - 3\, i \times k + 2\, k \times j + 3\, k \times k$$
$$= -2k + 3j - 2i = -2i + 3j - 2k$$

حالت دوم: با دترمینان مانند :

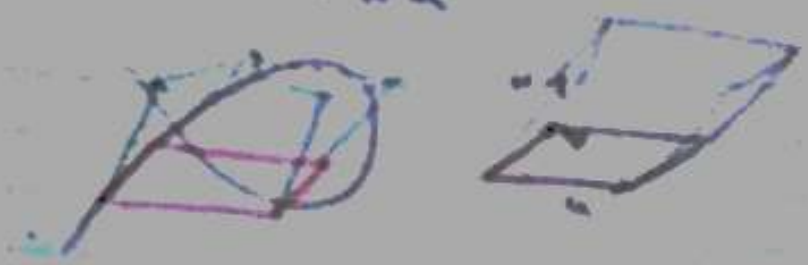
$$\overrightarrow{u \times v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3)\, i - (u_1 v_3 - v_1 u_3)\, j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, k$$

- نکته: $u \times v$ حاصل چه نکته

$$u \times v = -v \times u$$



حجم $\vec{w}$ $= \vec{w} \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

در سال ۹۹ نیامده

مروری بر اعداد مختلط:

یادآوری از اعداد مختلط:

$i = \sqrt{-1}$ که به آن عدد

$z = a+bi$ عدد مختلط

$\bar{z} = a-bi$ مزدوج z

$i^0 = 1$ $\quad i^1 = i$ $\quad i^2 = -1$ $\quad$ مجموعه اعداد مختلط $= \mathbb{C}$

مثال: در $\mathbb{C}^2$ داریم:

$$u = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 5i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Year : Month Day

$\langle u, v \rangle = u \cdot \bar{v}$ ← مزدوج

$= (2-3i)(\overline{5i}) + 8(\overline{1+i})$

$= (2-3i)(-5i) + 8(1-i)$

تمرین : در $\mathbb{C}^2$ بررسی کنید : $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$

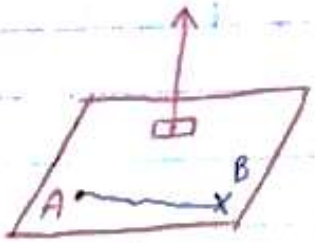
$u \cdot v = (2-3i)(-5i) + 8(1-i) = -10i - 15 + 8 - 8i = -18i - 7$

$v \cdot u = 5i(2+3i) + (1+i)(8) = 10i + 15i^2 + 8 + 8i$

$= 18i - 7$

معادله ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$: معادله صفحه شامل نقطه معلوم

$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و عمود بر بردار $\vec{N} = (n_1, n_2, \dots, n_n)$:



اگر نقطه مجهول و دلخواه $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ در صفحه باشد داریم :

$AB = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$

$AB \perp N = \langle AB, N \rangle = 0$

$$(x_1 - a_1)n_1 + (x_2 - a_2)n_2 + \dots + (x_n - a_n)n_n = 0$$

SEPEHR

فردوس مهم

Year: Month: Day:

مثال: معادله صفحه شامل نقطه $A\begin{vmatrix}2\\0\\3\end{vmatrix}$ و عمود بر $i=j+2k$

و بردارهای $B=\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$ و ... و ... باشد.

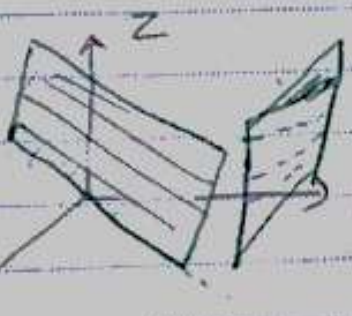
$1(x-2)-1(y-0)+2(z-3)=0$: فرم نرمال

$\longrightarrow x-y+2z=8$

در حالت کلی در $\mathbb{R}^3$ هر معادله به شکل $ax+by+cz=d$ یک صفحه صفحه است.

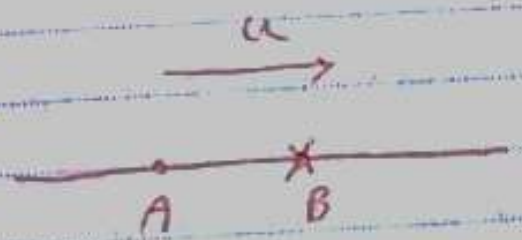
مثال: در $\mathbb{R}^3$: $2x+y=7$

معادله $y=6$ $\longrightarrow$



$2x+y=7$

معادله خط در $\mathbb{R}^n$: شامل نقطه معلوم $A:\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{vmatrix}$ و موازی بردار $\vec{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$



اگر نقطه مجهول $B=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ روی خط باشد داریم:

SEPEHR

Year : Month : Day :

$\overrightarrow{AB} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$

$\overrightarrow{AB} \parallel \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = t\vec{u}$

$$\begin{cases} x_1 - a_1 = t u_1 \\ x_2 - a_2 = t u_2 \\ x_n - a_n = t u_n \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = a_1 + t u_1 \\ x_2 = a_2 + t u_2 \\ x_n = a_n + t u_n \end{cases}}$$

معادلات پارامتری خط

مثال) معادله پارامتری خطی که از $A(5,0,1)$ می‌گذرد و با $\vec{j} - 2\vec{i}$ موازی است به:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

معادلات دکارتی خط:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - a_1 = t u_1 \rightarrow t = \frac{x_1 - a_1}{u_1} \\ x_2 - a_2 = t u_2 \rightarrow t = \frac{x_2 - a_2}{u_2} \end{aligned}\right\} =$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x_1 - a_1}{u_1} = \frac{x_2 - a_2}{u_2} = \dots = \frac{x_n - a_n}{u_n}}$$

$\vec{j} - 2\vec{i}$

معادله دکارتی خطی که از $A(5,0,1)$ می‌گذرد و با $\vec{j} - 2\vec{i}$ موازی است به:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-1}{0} \quad ; \quad z = 1$$

اگر مثل این صورت تقسیم کنیم، مخرج صفر می‌شود.

این دو تا با هم به خط عمود هستند.

SEPEHR

Year : Month : Day :

ماتریس های خاص :

۱) اگر $A_{n\times m}$ باشد ترانهاد A را با نماد A^T نشان می دهیم و کافیست جای سطرها و ستون ها A جابجا شود.

$$A_{n\times m}=[a_{ij}] \Rightarrow A^T_{m\times n}=[a_{ij}]$$

مثال) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & -۱ & ۷ \end{bmatrix}$ $\quad A^T=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۳ & -۱ \\ ۴ & ۷ \end{bmatrix}$

۲) ماتریس متقارن $(A_{n\times n})$:

$$A=A^T$$

تمرین : مثال :

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۳ & ۵ \\ -۳ & ۶ & ۷ \\ ۵ & ۷ & ۴ \end{bmatrix}$$

۳) پاد متقارن :

$$A^T=-A$$

تمرین : مثال :

$$\begin{bmatrix} ۰ & -۵ & -۳ \\ ۵ & ۰ & -۱ \\ ۳ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴) ماتریس نرمال :

$$AA^T=A^TA$$

تمرین :

مثال :

$$\begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

SEPEHR

پذیرفته شود

۵) ماتریس متعامد :

$$A^T = A^{-1} \Rightarrow AA^T = A^T A = I$$

تعریف + مثال :

خواص ماتریس متعامد : داریم :

$AA^T = I$ (به عنوان مثال) 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

سطر اول × ستون اول = ۱

$$\star \quad a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1$$

اگر توان دهیم : $R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ← جذر یک همان یک :

$$\|R_1\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2} \overset{\star}{=} 1 \Rightarrow R_1 \text{ یکه است}$$

$\Rightarrow$ سطر اول A بردار یکه است

به روش مشابه تمام سطرهای A بردار یکه اند .

سطر اول × ستون دوم = ۰

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \quad \star\star$$

Year : ..... Month : ..... Day : .....

اگر تعریف:

$R_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$

$\overrightarrow{R_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$

$\xrightarrow{**} \langle R_1, R_2 \rangle = 0 \Rightarrow R_1 \perp R_2$

به روشن شابه سطرهای A ، ۲ و ۲ عمودند (متعامدند).

تعریف: مجموعه ای دو به دو را متعامد گوییم: $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

$\Leftrightarrow \langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad , \quad i \neq j$

تعریف: مجموعه‌ی فوق را متعامد نرمال گوییم

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \langle u_i, u_j \rangle = 0 & i \neq j \\ \langle u_i, u_j \rangle = 1 & i = j \end{cases}$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

تابع دلتای دیراک: $= \delta_{ij}$

نتیجه: سطرهای ماتریس متعامد تشکیل مجموعه متعامد نرمال می دهند،

ستون های

سطرها یکه اند.

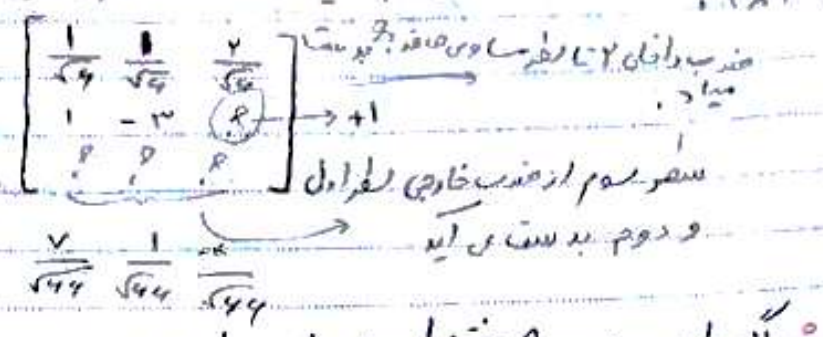
در ماتریس متعامد

دو به دو عمودند.

SEPEHR

Year: Month: Day:

یک ماتریس متعامد و نرمال ۳×۳ :



ماتریس در اعداد مختلط : اگر درایه های A مختلط باشه داریم ،

$A^H = \bar{A}^T = A$ ترانهاده و مزدوج

۱) A هرمیتی است $\Leftrightarrow A^H = A$

تمرین : مثال :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱-۲i & ۴+۷i \\ ۱+۲i & -۴ & -۲i \\ ۴-۷i & ۲i & ۵ \end{bmatrix}$$

۲) A پاد هرمیتی است $A^H = -A$

تمرین : مثال :

۳) A ~~نرمال~~ یکانی است $\Leftrightarrow A^H = A^{-1}$

تمرین : مثال :

$$\begin{bmatrix} ۳ & ۱-۲i & ۴+۷i \\ ۱+۲i & -۴ & -۲i \\ ۴-۷i & ۲i & ۵ \end{bmatrix}$$

Year : Month : Day :

۴) A نرمال است $\Leftrightarrow AA^H = A^H A$

تمرین : مثال :

$$\begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$$

تعریف : اگر $A_{n\times n}$ مربعی باشد اثر A را با نماد trA نشان می‌دهیم

و داریم : $trA = \text{جمع درایه‌های قطر اصلی} = \sum_{n=1}^{n} a_{ii}$

نکته :

$$trA^T = trA$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$K \in \mathbb{R} \text{ و } (KA)^T = KA^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

ادامه مطالب فصل ۳ :

تحلیل معادله (X) : $aX = b$

۱) اگر $a \neq 0$ آنگاه معادله جواب یکتا دارد.

$$X = \frac{b}{a}$$

Year : Month : Day :

دستگاه همگن : $AX = \vec{0}$

اگر $A_{n\times m}$ باشد و $|A| \neq 0$ آنگاه A وارون پذیر است و دستگاه جواب یکتا دارد.

$$X = A^{-1}\,0 = 0 \qquad \boxed{X = 0}$$

* اگر دستگاه همگن بی‌نهایت جواب مخصر به فرد داشته باشد آن جواب همراست *

نکته : $X = \vec{0}$ همیشه جواب دستگاه همگن است (جواب بدیهی)

پس دستگاه همگن همیشه سازگار است

یادآوری : تعداد درایه های پیوت = $rank\,A$ = تعداد متغیرهای وابسته

نکته : $rank\,(A_{n\times m}) \leq \min(m, n)$

$A_{3\times 5}$

$rank\,A \leq 3$

$3 \geq$ تعداد متغیرهای وابسته

$2, 1$ تعداد متغیرهای آزاد

قضیه : در دستگاه همگن اگر تعداد متغیرها از تعداد معادلات (تعداد سطرها) بیشتر باشد آنگاه دستگاه بی‌نهایت جواب دارد.

تعداد ستون بیشتر از تعداد سطر ← متغیر آزاد وجود دارد ← بی‌نهایت جواب دارد

Year : ..... Month : ..... Day : .....

- دستگاه $AX=B$ ...

$$M=\left[\begin{array}{c|c} A & B \end{array}\right] \xrightarrow{\text{سطری پلکانی}} \left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \\ \hline 0\ 0\ \cdots\ 0 & b_n \end{array}\right]$$

تعداد بیشترهای A > تعداد بیشترهای M

$rankM > rankA \Rightarrow$ دستگاه جواب ندارد

نتیجه: در دستگاه $AX=B$ اگر M ماتریس افزوده باشد

الف) $rankA < rank_M$ آنگاه دستگاه جواب ندارد.

ب) $n = rankA = rankM$ تعداد مجهول ها (همه مجهول ها وابسته اند $\Leftarrow$ آزاد نداریم) $\Leftarrow$ جواب یکتا

پ) $n \neq rankA = rankM$ تعداد مجهول ها $\Leftarrow$ (متغیر آزاد داریم) $\Leftarrow$ بی نهایت جواب داریم. $\Leftarrow$ متغیر وابسته

- تعریف ترکیب خطی: ترکیب خطی بردارهای $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ و ... و $\vec{u_n}$ بردارهی هم بعد است به صورت زیر:

$$\vec{v} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + \cdots + a_n\vec{u_n}$$

که در آن $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

مثال) ترکیب خطی دلخواهی از بردارهای زیر بنویسید.

SEPEH

Subject:
Year. Month. Date.

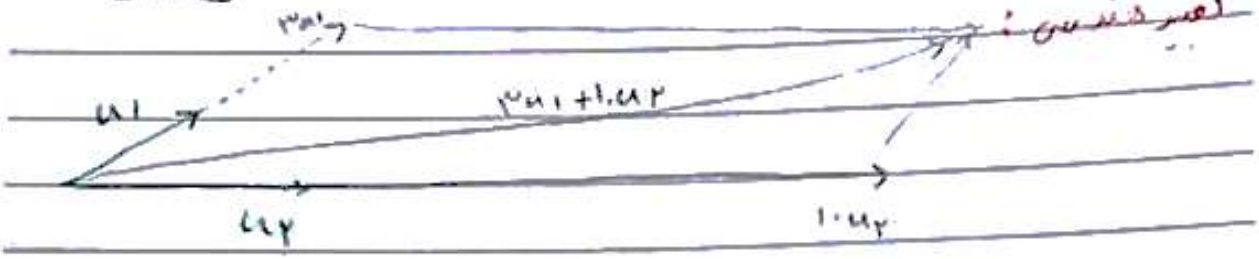
Sa Su Mo Tu We Th Fr

$u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$v = 3u_1 + 1.u_2$ مجموع ۲ برابر اول + مضرب از دوم

$= \begin{bmatrix} 19 \\ -10 \\ 5 \end{bmatrix}$

تعبیر هندسی:



تمام ترکیب های خطی دلخواه u_1 و u_2 تشکیل صفحه گذرنده از این دو بردار را می دهد.

و برعکس: هر بردار دلخواه در صفحه فوق حتماً به صورت ترکیب خطی از u_1 و u_2 است.

مثال) بردار $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از بردارهای $u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ بنویسید.

$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2 \\ -3a_1 - 2a_2 = -1 \end{cases}$

$a_1 = 3$

$a_2 = -4$

$a_1 u_1 + a_2 u_2 = v$ ← معادل

مثال) ۳ و ۶ و ۱۱ ب) ج) و ۱۲ از الف) و ۱۴ و ۲۴ ب)

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

فصل چهارم: فضاهای برداری

فضای برداری شامل یک مجموعه از بردارها (V) و یک مجموعه از اسکالرها (K) می باشد که با یکدیگر در شرایط زیر صدق می کنند و K باید میدان باشد.

هشت گانه

A1 $(u+v)+w = u+(v+w)$

A2 یک بردار در V وجود داشته باشد که آنرا بردار صفر می نامیم و با صفر نشان می دهیم
طوری که به ازای هر $u \in V$
$u+0 = 0+u = u$

A3 به ازای هر $u \in V$، یک بردار در V وجود داشته باشد که آنرا قرینه می نامیم
و با $-u$ نشان می دهیم، طوری که $u+(-u) = (-u)+u = 0$

A4 $u+v = v+u$

M1 به ازای هر اسکالر $k \in K$، $k(u+v) = ku+kv$.

M2 به ازای هر دو اسکالر a و $b \in K$، $(a+b)u = au+bu$.

M3 به ازای هر دو اسکالر a و $b \in K$، $(ab)u = a(bu)$.

M4 به ازای اسکالر یک $1 \in K$، $1u = u$.

قرارداد: در این درس همواره داریم:

$K = R$

MEHR

Plate 3 of 5
Black 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Mouth. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

مثال: فضای برداری $V=R^n$

مثال: فضای برداری چند جمله‌ای‌ها: مجموعه‌ی همه‌ی چند جمله‌ای‌ها $= V=P(n)$

$\sum_{i}^{n} a_i x_i$

i: عدد طبیعی

$u_1 = 2n^4 + 7n - 3$ یک بردار دلخواه

$u_2 = 3n + 5$ یک بردار دلخواه

مثال: فضای برداری چند جمله‌ای‌ها حداکثر از درجه‌ی n:

$V = P_n(n)$

مثلاً: $u = P_3(n)$

$u_1 = n^2 - 1$ ، $u_2 = n + 5$ ، $u_3 = -7$ ، $\vec{v} = 3n^2 + 2n$

$a u_1 + b u_2 + c u_3 = \vec{v}$

$a = 3$ ، $b = 2$ ، $c = 0$

مثال: فضای ماتریس‌های $m \times n$ $= V = M_{m \times n}$

زیرفضا: فضای برداری V فرض است اگر $W \subseteq V$ مجموعه

داشته باشیم که W نیز فضای برداری باشد آنگاه W زیرفضای V است.

مثلاً: $P_4(n)$ زیرفضای $P(n)$ است.

MEHR

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

در حالت کلی اگر U فضای برداری باشد برای اثبات اینکه $W \subset U$ زیرفضا است باید شرایط هشت گانه برای W ثابت کنیم.

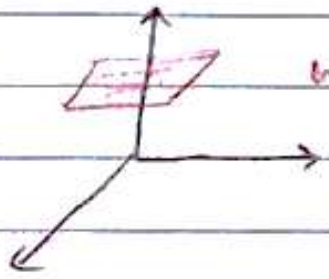
قضیه: اگر U فضای برداری باشد و $W \subseteq U$ آنگاه برای آن که W زیر فضا باشد کافی است داشته باشیم:

۱- بردار صفر U باید در W باشد $\vec{0} \in W$

۲- اگر $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$ آنگاه $\vec{w_1} + \vec{w_2} \in W$ یعنی W به جمع برداری بسته است.

۳- اگر $\vec{w} \in W$ و a اسکالر باشد آنگاه $a\vec{w} \in W$ یعنی W به ضرب اسکالر بسته است.

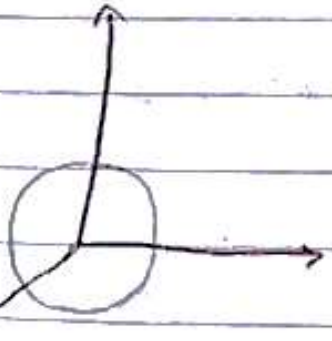
مثال) $U = R^3$



W = صفحه $z=2$

باید از مبدأ بگذرد که این نکته نشد

مثال) کره‌ای به مرکز (۰،۰،۰) و شعاع یک.



$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ یک

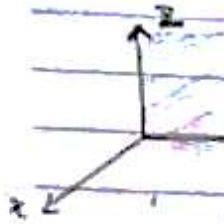
مثلاً (۰،۰،۱) و (۰،۰،-۱) که W شد $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

بسته یا

MEHR

(۰،۰،۰) W اگر ۱۰ برابر شود شرط ۳ نقض میشه زیر فضا نیست.

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr



مثال ۱) صفحه $y=0$ نسبت این بردها فضا است.
اولاً صفحه یک زیرفضا است.
ثانیاً اگر u و v دو بردار صفحه باشند جمع آنها در صفحه $y=0$ قرار می‌گیرند.
ثالثاً اگر $u \in W$ و c عددی حقیقی باشد cu در صفحه حاصل قرار می‌گیرد.

تعریف: مولد در فضای برداری V: مجموعه $S=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ و $(u_i \in V)$

را مولد گوییم $\Leftrightarrow$ هر بردار دلخواه در V ترکیب خطی از u_i ها باشد

گاهی $V = \text{Span}\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ برای مولد از نماد Span استفاده می‌کنیم.

یعنی: $\forall v \in V, \exists a_1, \dots, a_n \mid a_1u_1 + \dots + a_nu_n = v$

مثال ۱) ثابت کنید: $S = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}\right\}$ مولد $\mathbb{R}^2$ است

بردار دلخواه در $\mathbb{R}^2$ می‌گیریم

$u = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = xu_1 + yu_2 + zu_3$ حل کنید

استقلال و وابستگی خطی:

مثال: بردارهای $u_1 = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ موجودند $u_3 = -2u_1 - u_2 = \begin{bmatrix}7\\-2\end{bmatrix}$

مطلوبست: $xu_1 + yu_2 + zu_3 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

MEHR

صفحه ۱۴۸ : ۸ شروه

$-2u_1 + u_2 + u_3 = [\vdots]$

$a u_1 + \circ u_2 + a u_3 = [\vdots]$

$\begin{cases} 3x - y + 7z = 0 \\ ax + 2y - 2z = 0 \end{cases}$ دستگاه همگن

تعریف: مجموعه بردارهای $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ وابستهٔ خطی اند $\Leftrightarrow$ معادله برداری $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = \vec{0}$ جواب غیرصفر داشته باشد. یعنی حداقل یکی از a_i ها صفر نباشد در غیراین صورت مستقل خطی اند. همه صفر باشند مستقل، آنگاه یکی صفر نباشد وابسته.

یعنی تنها جواب معادله برداری عبارت باشد از

$a_1 = \dots = a_n = 0$

تمرین) ثابت کنید u_1 و u_2 مستقل خطی اند.

$x u_1 + y u_2 = \vec{0}$

$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{x=0}$

فصل ۴۰ تمرین های ۲، ۵، ۶، ۹، ۱۱، ۱۲

MEHR

در دستگاهی اگر تعداد مجهولات از معادلات بیشتر باشد دستگاه جواب غیرصفر دارد پس وابسته است.

Subject:
Year. Month. Date.
Sa Su Mo Tu We Th Fr

مثال) ثابت کنید بردارهای $u_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ، $u_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ ، $u_3=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ وابسته خطی اند.

$$au_1+bu_2+cu_3=0$$

$$\begin{cases}2a+b+c=0\\ a+b+2c=0\end{cases}$$

این دستگاه جواب منحصربفرد $a=b=c=0$ دارد پس u_1 و u_2 و u_3 مستقل خطی اند در غیر این صورت وابسته اند.

$$\xrightarrow{\text{ضرب در } -1}\begin{cases}(a)+b+2c=0\\ 0(-b)-2c=0\end{cases}$$

دارای بی نهایت جواب است علاوه بر صفر جواب های دیگری هم دارد که وابسته می شود.

$$\xrightarrow[\text{جواب دیگر}]{\text{برای باقی}} c=1 \rightarrow b=0,\ a=0$$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ وابسته اند $\Leftarrow$ یک جواب غیرصفر $=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

تعریف پایه فضای برداری:

مجموعه $S=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ پایه V است $\Leftrightarrow$

1) S مولد V باشد.

2) S مستقل خطی باشد.

نکته: بردارهای پایه حالت کلی منحصربفرد نیستند ولی تعدادشان

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

منحصربه‌فرد است. به‌این تعداد بعد فضای V می‌گوییم:

$\dim V = n$

آیا تعداد اعضای مولد نیز منحصربه‌فرد است؟ خیر

مثال:

$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Span}\{u_1, u_2, u_3\}$

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$

نکته: به مولد یک فضا می‌توان هر بردار دلخواهی را اضافه نمود.
پس اعضا به مولد اضافه‌کنی از مولد است.

نکته: به بردارهای پایه نمی‌توان بردار اضافه‌کرد یا حذف نمود.

نکته: کوچکترین مولد فضا همان پایه است.

قضیه: تعداد بردارهای پایه فضای $\mathbb{R}^n$ است.

مولد منحصربه‌فرد است. پایه منحصربه‌فرد نیست.
ولی تعداد آنها منحصربه‌فرد است.

قضیه: در یک ماتریس سطری پلکانی سطرهای غیرصفر تشکیل بردارهای مستقل خطی می‌دهند و ستون‌هایی که شامل درایه‌ی پیشرو باشند مستقل خطی‌اند.

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

تعریف: گیریم $A_{m\times n}$ یک ماتریس $m\times n$ باشد

داریم:

A فضای سطری $= row\ SPA = Span\{L_1, L_2, \dots, L_m\}$

تعداد ردیف‌های مستقل خطی

A فضای ستونی $= colm\ SPA = Span\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$

تعداد ستون‌های مستقل خطی

که C_iها ستون‌های A هستند.

دستگاه روبرو:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$row\ SPA$ پایه $= \left\{ L_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, L_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ و $dim\ row\ SPA = 4$

$colm\ SPA$ پایه $= \left\{ C_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}, C_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ و $dim\ colm\ SPA = 4$

نتیجه کلی: $rank = dim(row\ SPA) = dim(colm\ SPA)$

MEHR

Plate 5 of 5
Black 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year Month Date

Sa Su Mo Tu We Th Fr

پایه برخی فضاهای خاص:

۱) فضای $\mathbb{R}^n$ با پایه استاندارد $= \{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{bmatrix}, \dots, e_n = \begin{bmatrix} \cdot \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\}$

$dim\, \mathbb{R}^n = n$

۲) فضای $P_n(x)$ = چند جمله‌ای های حداکثر از درجه‌ی n:

$S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ $dim\, P_n(x) = n+1$

~~$P(x) = 1$~~

~~$P(x) = x$~~

~~$P(x) = x^n$~~

۳) فضای $P(x)$ = چند جمله‌ای ها

$S = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

$dim\, P(x) = \infty$

۴) فضای ماتریس های $M_{m \times n} = m \times n$

$S = \{M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \dots, M_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\}$

مثال: در $M_{2 \times 2}$:

$S = \{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_4}\}$

MEHR

Subject:
Year. Month. Daty.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}M_1 + a_{12}M_2 + \cdots$

متقابل a_{12} ، M_{12}

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$ M_{12} حذف و 3 در

$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ به M_{12} هست و تغییر کرده ضرب در $(-1)^{1+2}$

آیا در $\mathbb{R}^2$ با شیم که این مجموعه مستقل خطی ۲ عضو دارد و عضو دوم

دیگه مضرب ثابتی از دیگری است.

بعد تعداد مجموعه مستقل خطی n عضو دارد. $\dim \mathbb{R}^n = n$

به بیان دیگه: بزرگترین مجموعه مستقل خطی = پایه فضا

مجموعه دارد $\mathbb{R}^2$ فضا بستگی است.

نکته: یک بردار به تنهایی مستقل خطی است.

در فضای برداری W داریم:

$W = \{\vec{0}\} \longrightarrow \dim W = 0$

زیر فضا است

$\vec{0} \neq \vec{u_1} \in W$ ، $W = \text{span}\{\vec{u_1}\}$ زیر فضا است $\dim W = 1$

تعداد عضوهای این مجموعه

مضارب $\vec{u_1}$

MEHR

Plate 5 of 5
Black 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$W = Span\{u_1, u_2\}$ $u_1, u_2 \neq 0$ ⇐ u_2 مضرب u_1 نباشد ⇒ $\{u_1, u_2\}$ وابسته اند ⇒ یکی از بردارها را می‌توان حذف کرد ⇓ $\dim W = 1$

دو بردار مضرب هم نیستند ⇐ $\{u_1, u_2\}$ مستقل خطی اند ⇓ $\dim W = 2$

برای بیشتر از ۲ بردار باید بررسی وابستگی شود.

در $\mathbb{R}^n$ برای بررسی استقلال و وابستگی، بردارها را در سطرهای ماتریس قرار می‌دهیم و بعد از سطری پلکانی، بردارهای مستقل را تشخیص می‌دهیم.

$$\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$ یا به

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطری پلکانی}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ دارد ۲ بردار

صفر می‌توانیم بشود.

تمرین ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۴۱، ۴۲.

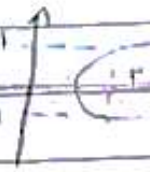
Plate: 5
Black
lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

فصل ۱: نگاشت های خطی

مفهوم تابع: (۱و۲)، (۱و۲) ← تابع نیست



تابع پوشا: اگر برد با هم مجموعه برابر باشد.

تناظر یک به یک: تابع یک به یک و پوشا باشد.

نگاشت F خطی است:

$F: U \to W$ همان تابع فقط اعضای آن بردار است.

که U و W فضای برداری هستند.

مثال: $F: R^2 \to R^3$

$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-1 \\ x+y \\ 2y \end{bmatrix}$ یا $F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

حتما باید مجموعه صفر باشد

نگاشت خطی: نگاشت $F: U \to W$ خطی است هرگاه در دو شرط زیر صدق نماید:

$\forall u_1, u_2 \in U$

1) $F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2)$

2) $F(K u_1) = K F(u_1)$ و $K \in R$

نتیجه: شرط لازم برای اینکه تبدیل F خطی باشد آن است که $F(\vec{0}) = 0$

اما این شرط کافی نیست.

MEHR

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$F(x,y) = (x^2, x-y, 2y)$

مثال) تبدیل D (مشتق):

$$\begin{cases} D : T(x) \to T(x) \\ D(f(x)) = f'(x) \end{cases}$$

$T(x)$ = فضای توابع مشتق پذیر

ثابت تبدیل مشتق خطی است.

مثال) تبدیل $\bar{I}$ (انتگرال):

$I : T(x) \to \bar{T}(x)$

$I(f(x)) = \int f(x)\,dx$

مثال) تبدیل خطی $\begin{cases} F : R^3 \to R^2 \\ F(x,y,z) = (2x, x+3y) \end{cases}$ مردود است. نمایش دیگر این تبدیل:

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z \\ x+3y \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

MEHR

Plate 5 of 5
Black 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

به صورت خلاصه داریم:

$F_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

و به صورت پیشفرض تنها تبدیل خطی FA با ماتریس زیر مشخص می‌شود:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ که دنبالش نمیریم

فضای برداری U و V یک رابطه‌اند $\Leftrightarrow$ تبدیل خطی یک به یک و پوشا بین U و V موجود باشد.

تعریف: فضای پوچ تبدیل خطی $F: U \to V$ را با نماد $\ker F$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\ker F = \{ \vec{u} \in U \mid F(u) = \vec{0} \in V \}$$

مثال) $\ker F$ را بیابید

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z \\ x+3y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x+z=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

متغیر وابسته
متغیر آزاد

MEHR

دستگاه بی‌نهایت جواب دارد،

$-6y + z = 0 \to y = \frac{t}{6}$

$x + 3y = 0 \to x = -\frac{t}{2}$

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

بردار جواب عمومی $= \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} \xrightarrow{t=1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ جواب خصوصی

$$\ker F = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} ; t \in \mathbb{R} \right\}$$

نکته: جواب فضای همگن های ker است.

می بینیم که در تبدیل های خطی ماتریسی:

$\ker F =$ دستگاه همگن جواب فضای

نتیجه: در تبدیل خطی $F: U \to V$ $\ker F$ زیرفضای U است.

در تبدیل های خطی ماتریسی داریم:

$\dim(\ker F) =$ تعداد متغیرهای آزاد

$\dim \ker F = 1$ ← مثال قبل

تعداد متغیرها = متغیرهای وابسته + متغیرهای آزاد

$n = \text{rank}A + \dim \ker F$

یا $n = \text{rank}A + \dim W$

W فضای جواب عمومی $\}$

MEHR

Plate 5 of 5
Black 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

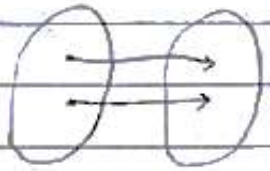
واضح است کربردار صفر همواره عضو $\ker F$ می‌باشد.

تعریف: تبدیل خطی $F: U \to V$ را نامنفرد گوییم هرگاه $\ker F = \{0\}$.

$\Rightarrow \dim \ker = 0$

درمثال قبل F نامنفرد بود چون $\ker F$ بی‌نهایت جواب داشته باشد.

قضیه: تبدیل خطی $F: U \to V$ یک‌به‌یک است $\Leftrightarrow$ نامنفرد باشد.



یک‌به‌یک است پوشا نیست

قضیه: اگر $F: U \to V$ تبدیل خطی و $\dim V = \dim U$ متناهی آنگاه F یک‌به‌یک است $\Leftrightarrow$ F پوشا است

یک‌به‌یک

تعریف فضای تصاویر: اگر $F: U \to V$ تبدیل خطی باشد فضای تصاویر F را با نماد $\operatorname{Im} F$ نشان می‌دهیم و داریم: بردارهایی که پیش هست که به حداقل از دو تا $f(u) = v$

$$\operatorname{Im} F = \{ \vec{v} \in V \mid \exists\, \vec{u} \in U \,,\, F(u) = V \}$$

نحوه می‌سنجیم $\operatorname{Im} F$: ابتدا یک پایه دلخواه در U درنظر می‌گیریم مثلاً $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ سپس F را بر S اثر می‌دهیم:

خودش پایه بنویسیم

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$F(u_1) = \bar{v}_1$

$\vdots$

$F(u_n) = \bar{v}_n$

$\Rightarrow \operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$

تبدیل خطی F در حالت کلی حافظ استقلال خطی نیست. یعنی اگر $u_1, \dots, u_n$ مستقل خطی اند ولی دلیلی ندارد که $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ مستقل خطی باشند.

لذا برای محاسبه $\dim(\operatorname{Im} F)$ باید تعداد مستقل خطی های $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ را بدست آوریم.

F پوشا $\Leftrightarrow \dim \operatorname{Im} F = \dim \bar{V}$

(مثال)
$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ F(x,y,z) = (2x+z, x+3y) \end{cases}$$

مطلوبست پایه و بعد $\operatorname{Im} F$.

یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ متعارف می نامیم و نمایش:

$E = \{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ پایه استاندارد

$F(e_1) = (2,1) = \bar{v}_1$ ، $F(e_2) = (0,3) = \bar{v}_2$ ، $F(e_3) = (1,0) = \bar{v}_3$

MEHR

Page: 5 of 5
Track: 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$\text{Im } F = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$

برای بدست آوردن $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ و $\bar{v}_3$ ستون های ماتریس متعارف را پیدا می کنیم و سطرهای ماتریس کاهش یافته

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{matrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\bar{v}_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ پایه ستون های ماتریس کاهش یافته هستند پس $\bar{v}_1$ و $\bar{v}_2$ پایه ماتریس اصلی هستند

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \bar{v}_3 \\ \to \bar{v}_2 \end{matrix}$$

پایه $\text{Im}F = \left\{ \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim \text{Im}F = 2 = \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \text{Im}F = \mathbb{R}^2 \Rightarrow F$ پوشا است

$\begin{cases} F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ F_A, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$ ماتریس ضرایب سه متر انداده ی نظیر یک به یک

می بینیم که $B = AT$ پس داریم فضای ستونی $\text{Im}F = B$

$$\boxed{\text{Im } F = \text{colmsp } A}$$

$\Rightarrow \dim \text{Im}F = \dim \text{colmsp } A = \dim \text{rowsp } A = \text{rank } A$

= تعداد متغیرهای وابسته

متغیرهای آزاد + متغیرهای وابسته = تعداد متغیرها

$$n = \dim \text{Im}F + \dim \ker F$$

۱۱ و ۱۶ و ۱۷ و ۱۸ و ۲۴ و

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

فصل ۶: تبدیل های خطی و ماتریس ها:

مختصات بردار در یک پایه:

مثال) در فضای $\mathbb{R}^2$ پایه‌ی $S = \{u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}\}$ مفروض است.

پایه‌ی S، مولد نیز است. یعنی هر بردار دلخواه $\vec{v}$ در $\mathbb{R}^2$ توسط S تولید می‌شود. مثلاً $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$.

یعنی $\exists a_1, a_2$ $a_1 u_1 + a_2 u_2 = \vec{v}$.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{3}{2}(1)+(2)\to(2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & \frac{17}{2} \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{|l} a_2 = -\frac{17}{2} \\ a_1 = \frac{43}{2} \end{array}$$

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{43}{2} \\ -\frac{17}{2} \end{bmatrix}$$

تعریف مختصات بردار: فضای برداری $\vec{v}$ و پایه S برای $\vec{v}$ مفروض است.

مختصات بردار $\vec{v} \in \vec{v}$ در پایه S را با نماد $[\vec{v}]_S$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

در صورتی که

$$a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n = \vec{v}$$

در مثال قبل مختصات $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ را در پایه زیر بیابید.

$$S' = \{w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\}$$

MEHR

Plate: 5 of 5
Black: 175 lpi at 45 degrees

Sa Su Mo Tu We Th Fr

Subject:
Year. Month. Date.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دلوما جا بجا}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow y = \frac{8}{5}$$

$$x - 2\left(\frac{8}{5}\right) = -1$$

$$x = -1 + \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

$$[\vec{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

پایه استاندارد در $\mathbb{R}^2$: $E = \{e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ $\quad [\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 = \vec{v} \rightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow a_1 = -1$
$\rightarrow a_2 = 7$

اگر استاندارد بودند a_1 و a_2 خود $\vec{v}$ می‌شوند

نمایش ماتریس در پایه S:

فضای برداری $\mathbb{U}$ و پایه $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ و ماتریس A مفروض‌اند.

نمایش ماتریس A در پایه‌ی S را با نماد $[A]_S$ نشان می‌دهیم و برای به آن داریم.

مرحله اول: ابتدا ماتریس A را در بردارهای u_1 تا u_n ضرب می‌کنیم:

$$[A]\vec{u_1} = \vec{v_1}$$

$$\vdots$$

$$[A]\vec{u_n} = \vec{v_n}$$

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

مرحله دوم: مختصات $\vec{v}$ ها را در پایه S بدست می آوریم.

$$[\vec{v}_1]_S$$
$$\vdots$$
$$[\vec{v}_n]_S$$

این مختصات ها ستون های ماتریس مورد نظر ما هستند.

مثال) نمایش ماتریس $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}$ را در پایه $S=\left\{u_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}\right\}$ بیابید.

حل:

$$Au_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\15\end{bmatrix}=\vec{v}_1$$

$$Au_2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\25\end{bmatrix}=\vec{v}_2$$

مرحله سوم: مختصات $\vec{v}$ ها در پایه S:

$$\begin{cases}2a_1+4a_2=n\\ 3a_1+5a_2=y\end{cases}$$ به ازای $\begin{bmatrix}9\\15\end{bmatrix}$ و به ازای $\begin{bmatrix}17\\25\end{bmatrix}$

$$\longrightarrow v_1=\begin{cases}a_1=\frac{15}{2}\\ a_2=-\frac{3}{2}\end{cases} \Leftarrow \begin{cases}2a_1+4a_2=17\\ 3a_1+5a_2=25\end{cases}$$

و به ازای $\vec{v}_2$ و $\vec{v}_3$

$$\frac{L}{-}\begin{cases}2a_1+4a_2=n\\ 3a_1+5a_2=y\end{cases}$$

$$a_1=\frac{\begin{vmatrix}n & 4\\ y & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{5n-4y}{-2}$$

$$a_1=-\frac{5}{2}n+2y$$

MEHR

$$a_2=\frac{\begin{vmatrix}2 & n\\ 3 & y\end{vmatrix}}{-2}=\frac{2y-3n}{-2}=\frac{3}{2}n-y \Rightarrow a_2=\frac{3}{2}n-y$$

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

$$[\bar{v}_1]_S \xrightarrow[y=15]{x=9} \begin{bmatrix} a_1 = \frac{-45}{2} + 30 \\ a_2 = \frac{27}{2} - 15 \end{bmatrix}$$

ستون دوم $= \begin{bmatrix} +\frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

$$[\bar{v}_2]_S = \xrightarrow[y=25]{x=17} \begin{bmatrix} a_1 = \frac{15}{2} \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[A]_S = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 35 \end{bmatrix}$$

این ضرب در پایه استاندارد است.

اگر این ضرب را در پایه S بنویسیم داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{43}{2} \\ \frac{-17}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -29 \end{bmatrix}$$

اگر $AU = \bar{V} \Leftarrow [A]_S[u]_S = [Au]_S$

نمایش تبدیل خطی ماتریسی در پایه S:

اگر $F: \bar{U} \to \bar{U}$ عملگر خطی باشد ماتریس نمایش عملگر خطی F در پایه‌ی

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

S برابر است با همان نمایش ماتریسی ضرایب F در پایه S.

مثال) عملگر خطی $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ مفروض است مطلوبست

$T(x,y) = (3x+2y, 2x+y)$

ماتریس نمایش T در پایه S ؟

$S = \{u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}\}$

$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{مثال قبل}]{\text{در پایه S}} [T]_S = \begin{bmatrix} \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{35}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$

مثال قبل:

$Au_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$

$T(u_1) = T(2,3) = (9,15)$

$T(u_2) = T(4,5) = (17,13)$

از اینجا

تمرین ۱ فصل ۶ :

Subject :

ماتریس تغییر پایه : فضای برداری n بعدی V و دو پایه در آن مفروض اند :

پایه قدیم $= S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

پایه جدید $= S' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

ماتریس تغییر پایه از S به S' را با $[P]_{S \to S'}$ نشان می دهیم :

نحوه محاسبه :

ستون های P عبارتند از :

مختصات v_i ها در پایه S .

یعنی مختصات بردارهای پایه جدید در پایه قدیم .

مثال ۱ ماتریس تغییر پایه از S به S' را بیابید. $S = \{u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\}$

$S' = \{v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

ستون اول: $[v_1]_S = a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ستون اول $= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad a = \frac{1}{2}$ و $b = -1$

ستون دوم: $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad [P]_{S \to S'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

نکته : ماتریس تغییر پایه از S به S' را با $[Q]_{S' \to S}$ نشان می دهیم و داریم :

$Q = P^{-1}$ $\xrightarrow{\text{مثال قبل}}$ $[Q]_{S' \to S} = \frac{1}{|P|}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

MICRO

Subject : Date

کاربرد این ماتریس ها: اگر مختصات $\vec{v}$ در پایه S را داشته باشیم = $[\vec{v}]_S$ معلوم

و میخواهیم مختصات $\vec{v}$ در پایه S' را پیدا کنیم = $[\vec{v}]_{S'}$ مجهول

$$[Q]_{S' \to S} \cdot [\vec{v}]_S = [\vec{v}]_{S'}$$

مثال) تمرین ۱۳ فصل ۶:

E استاندارد $= \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$S = \left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

مطلوبست: الف) ماتریس تغییر پایه از S به E.

الف) $a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \to a = 1, \; b = 3$

$a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \to a = 1, \; b = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تغییر پایه از E به S.

ب) $[Q]_{S \to E} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

مطلوبست مختصات بردار $\begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix}$ در پایه S؟

راه اول: $au_1 + bu_2 = v$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 4b = -7 \end{cases} \to \begin{bmatrix} a = \\ b = \end{bmatrix}$$

راه دوم: $Q \cdot v = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$

تمرین ۱۷

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

فصل ۷: فضاهای ضرب داخلی:

تعریف تابع ضرب داخلی: تابع ضرب داخلی را با نماد $\langle \cdot , \cdot \rangle$ نشان می‌دهیم

و دارای خواص زیر است:

۱) $\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ نسبت به جمع پخشی شود

۲) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

۳) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ حایا شود

۴) $\langle u, u \rangle \geq 0$ هر بردار ضرب درخودش بزرگتر از صفر

۵) $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

تعریف: هر فضای برداری که بتوان در آن تابع ضرب داخلی تعریف نمود را فضای ضرب داخلی گوییم.

مثال: ضرب داخلی در فضاهای برداری مختلف:

۱) فضای $\mathbb{R}^n$: $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ و $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

۲) فضای توابع پیوسته بر بازه $[a,b]$ $\quad C[a,b]$ ← پیوسته

$$f(t), g(t) \in C[a,b]$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g(t)\, dt$$

مثال) $[0,1]$ C و توابع $f(t)=t-1$ و $g(t)=t^2$ ؟ $= \langle f, g \rangle$

$\|f\| \rightarrow f$ توان ۲ $\rightarrow$ انتگرال $\rightarrow$ جذر

$\hookrightarrow \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_0^1 (t-1)^2 dt}$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 (t-1)\, t^2\, dt = \int_0^1 t^3 - t^2$$

$$= \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{12}$$

فضای برداری ماتریس‌های $M_{m \times n}$

$$[A]_{m \times n} \rightarrow [B]_{m \times n}$$

$$\langle A, B \rangle = [A B^t]_{m \times m}$$

$\underbrace{t \gamma C}$ ← جمع دو ایستایی روی ضرب اعلی

مثال) $\langle A, B \rangle$ را برای ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۳ & ۷ \end{bmatrix}$

$$\langle A, B \rangle = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۵ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۳ \\ -۱ & ۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۸ & ۸۸ \end{bmatrix} \rightarrow ۲+۸ = \boxed{۱۰}$$

MEHR

Photo 5 of 5
Block 175 lpi at 45 degrees

Subject:
Year. Month. Date. Sa Su Mo Tu We Th Fr

نرم: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

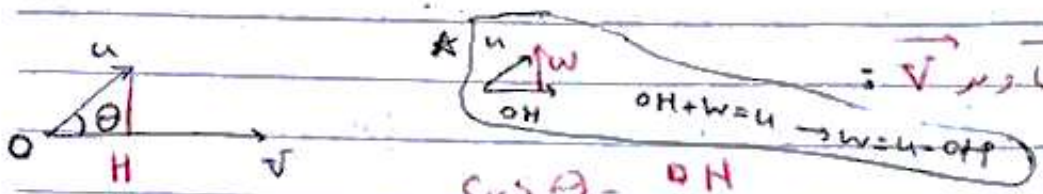
هروقت ضرب داخلی داریم نرم هم داریم

بردار نرمال (یکه): $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|u\|}$

زاویه دو بردار:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

تصویر u بر v:



$$\cos\theta = \frac{OH}{\|u\|}$$

$$\Rightarrow |\overline{OH}| = \|u\| \cos\theta$$ طول تصویر u بر v

بردار تصویر u بر v $= \overrightarrow{OH} = |\overrightarrow{OH}| \cdot \hat{v} = \|u\| \cdot \cos\theta \cdot \frac{\vec{v}}{\|v\|}$

$$= \frac{\|u\| \cdot \cos\theta}{\|v\|} \cdot \vec{v} = \frac{\|v\| \|u\| \cos\theta \, \vec{v}}{\|v\|^2}$$

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \vec{v}$$ ← ضریب فوریه

مثال) $f_1(t) = 1$

$f_2(t) = t$ ؟ f_2 بر f_1 بردار تصویر

MEHR

Subject:
Year. Month. Date.

Sa Su Mo Tu We Th Fr

$\overrightarrow{w} = u - OH$

$\langle w, v \rangle = 0$ بردار عمود است و

$$w = u - OH = \overrightarrow{u} - \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle}}_{\times} \overrightarrow{v}$$

روند متعامدسازی گرام اشمیت :

مجموعه $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ مفروض است ، می خواهیم مجموعه $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ را چنان بسازیم که متعامد باشد یعنی

$\langle w_i, w_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

فرمول متعامدسازی گرام اشمیت :

$$w_1 = u_1$$

$$w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \overrightarrow{w_1}$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \overrightarrow{w_1} - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$\vdots$$

$$w_n = \overrightarrow{u_n} - \frac{\langle u_n, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots$$

MEHR

Subject :

Date

فصل ۹ : بردارهای ویژه و مقادیر ویژه :

مثال) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}$ و بردار $\vec{V}=\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ مفروض است. داریم:

بردار ویژه ↓

$$A\vec{V}=\begin{bmatrix}۴ & ۲\\ ۳ & -۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\ ۵\end{bmatrix}$$

می بینیم که $A\vec{V}=\underset{\text{مقدار ویژه}}{۵}\vec{V}$

مثل این است که :

$$\begin{bmatrix}۵ & ۰\\ ۰ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰\\ ۵\end{bmatrix}$$

تعریف : بردار $\vec{V}\neq ۰$ را بردار ویژه ماتریس A گوییم و $\lambda\neq ۰$ را مقدار ویژه‌ی متناظر $\vec{V}$ می‌گوییم اگر داشته باشیم :

$$A\vec{V}=\lambda\vec{V}$$

نحوه محاسبه مقدار ویژه :

اگر $\lambda=t$ مقدار ویژه مجهول باشد :

$$A\vec{V}=t\vec{V}$$

ضرب در I چون t نمی‌تواند به تنهایی منهای A شود

$$\rightarrow A\vec{V}-t\vec{V}=\vec{۰} \xrightarrow[\text{از } \vec{V}]{\text{فاکتور}} \underbrace{(A-tI)}_{B}\vec{V}=\vec{۰}$$

دستگاه همگن است

می خواهیم که بردار غیر بدیهی $\vec{V}\neq ۰$ صدق کند یعنی نمی خواهیم دستگاه جواب منحصربه‌فرد داشته باشد پس دترمینان ماتریس ضرایب $=۰$

$$|A-tI|=۰$$

این دترمینان بر حسب t یک چندجمله‌ای است که ریشه‌های این چندجمله‌ای مشخص (ویژه) است

Subject:
Year: Month: Date:

گوییم

$\Delta_A(t) = |A - tI| = 0$

ریشه های این چند جمله ای مقادیر ویژه A هستند

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-t & 2 \\ 3 & -1-t \end{bmatrix}$$

$(4-t)(-1-t) - 6 = 0 \longrightarrow -4 - 4t + t + t^2 - 6$

$\Rightarrow t^2 - 3t - 4 - 6$

$\Rightarrow t - 3t - 10 = 0$

$(t-5)(t+2) = 0 \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases}$

$\longrightarrow$ مقادیر ویژه $\lambda_1 = 5$ و $\lambda_2 = -2$

نحوه ی محاسبه بردار های ویژه :

اگر λ معلوم باشد و $\vec{V}$ مجهول باشد

$\overrightarrow{AV} = \overrightarrow{\lambda V}$

$\rightarrow AV - \lambda V = \vec{0} \longrightarrow (A - \lambda I)V = \vec{0}$ دستگاه همگن است

مجهول

جواب های غیر صفر این دستگاه را می یابیم ،

در مثال قبل برای $\lambda = 5$ بردار ویژه را بیابید: $\vec{V}$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-x + 2y = 0$

$x = 2$ $\quad V = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{سطری}} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} x \text{ وابسته} \\ y \text{ آزاد} \end{cases}$ دلخواه

Subject:

Year: Month: Date:

واضح است که تمام مضارب $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ نیز جواب دستگاه است ولی فقط یک بردار مستقل خطی وجود دارد.

لذا: $\lambda = 5$ بردار ویژه متناظر با $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ← دیگر بردار دیگر مضرب آن

بردار $\lambda = -2$ بردار ویژه بیابید:

$$\left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}6x + 2y = 0\\ 3x + y = 0\end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_1 + R_2} \begin{bmatrix}6 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \text{y آزاد، x وابسته} \xrightarrow{\text{نقاط ثابت}} 6x + 2y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

قضیه: اگر بتوان ماتریس M را مثلثی بلاکی تبدیل نمود: (بالا یا پایین مثلثی)

$$M = \begin{bmatrix}[A_1] & \times & \times & \times\\ [0] & [A_2] & \times & \\ [0] & [0] & [A_3] & \ddots\\ \vdots & \vdots & [0] & \end{bmatrix}$$

بلاک های قطر اصلی

آنگاه داریم: $\Delta_M(t) = \Delta_{A_1}(t) \cdot \Delta_{A_2}(t) \cdots$

مثلا MRS

بررسی کنید:

$$A = \begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix} \qquad P(x) = x^2 - 3x - 10$$

$$P(A) = A^2 - 3A - 10I \doteq \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

YEKTA

$$|A - xI| = \Delta$$

Subject:
Year: Month: Date:

تعریف: چندجمله‌ای مینیمال A را با $m_A(t)$ نشان می‌دهیم و چند جمله‌ای

با کمترین درجه است که A ریشه آن است یعنی:

$$m_A(A) = [0]$$

مینیمال برای $n-5$ خودش است چون در تجزیه $(n+2)(n-5)$ نه $n-5$ است چون $A-5$ صفر نمی‌شود ولی $n+2$ پس مینیمال همان خود $n-5$ در سئوال قبل است.

$m_A(t)$ یا با $\Delta(t)$ برابر است یا با عامل‌های تجزیه‌ی $\Delta(t)$.

تذکر: دیگر بلوک‌های ماتریس M را فقط‌های بلوکی تبدیل نمود

$$M = \begin{bmatrix} [A_1] & [0] & [0] & \\ [0] & [A_2] & [0] & \\ [0] & [0] & [A_3] & [0] \\ \vdots & \vdots & & [0] \end{bmatrix}$$

بلوک‌های فقط اصلی

$m_M(t) = (\Delta_{A_1}(t) \text{ و } \Delta_{A_2}(t) \text{ و } \cdots)$ ک م م

خطای ۳۰٪

مثال ۹: ۲ و ۳ و ۵ و ۱۰ و ۲۷ و ۲۸ و ۲۹ - ۳۱

قسمت ب را خودتان بخوانید

YEKTA

وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveoTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

تمارین جبر
استاد مزدارانی

فصل سه: ۶_۱۱_۱۲_۱۴_۲۰_۲۴_۲۴

فصل چهار: ۴_۵_۶_۹_۱۱_۱۴_۱۷_۲۴

فصل پنج: ۱۶_۱۷_۱۸_۲۵_۲۶

فصل شش: ۱_۲_۴_۴_۵

فصل هفت: ۵_۱۱_۲۱_۲۲

فصل نه: ۲_۴_۵_۱۰_۲۷_۲۸_۲۹

منطبق هستند).

برای یافتن جواب عمومی، قرار می‌دهیم $y = a$ و در L_1 جایگزین می‌کنیم تا به‌دست آوریم

$$2x - 3a = 8 \quad \text{یا} \quad 2x = 3a + 8 \quad \text{یا} \quad x = \frac{3}{2}a + 4$$

پس، جواب عمومی عبارت است از

$$x = \frac{3}{2}a + 4, \quad y = a \quad \text{یا} \quad u = (\frac{3}{2}a + 4, \quad a)$$

که در آن a هر اسکالر است.

۶-۳ دستگاه زیر را درنظر می‌گیریم

$$x + ay = 4$$
$$ax + 9y = b$$

(الف) به‌ازای کدام مقادیر a دستگاه دارای جواب یکتا است؟

(ب) جفت مقادیر (a, b) را پیدا کنید که به‌ازای آنها دستگاه بیش از یک جواب داشته باشد.

(الف) با تشکیل معادله جدید $L = -aL_1 + L_2$، x را از معادلات حذف می‌کنیم، تا به‌دست آوریم

$$(9 - a^2)y = b - 4a \qquad (1)$$

دستگاه دارای جوابی یکتا است اگر و فقط اگر ضریب y در (۱) صفر نباشد ــ یعنی، اگر $9 - a^2 \neq 0$ یا اگر $a \neq \pm 3$.

(ب) دستگاه دارای بیش از یک جواب است اگر هر دو طرف (۱) صفر باشند. سمت چپ وقتی صفر است که $a = \pm 3$: اگر $a = 3$، سمت راست صفر است هر گاه $b - 12 = 0$ یا $b = 12$. اگر $a = -3$، سمت راست وقتی صفر است که $b + 12 = 0$ یا $b = -12$. پس، $(3, 12)$ و $(-3, -12)$ جفت‌هایی هستند که به‌ازای آنها دستگاه بیش از یک جواب دارد.

(الف) اگر $r = n$، آنگاه دستگاه دارای جواب یکتا است.

(ب) اگر $r < n$، آنگاه می‌توانیم به $n - r$ متغیر آزاد به‌طور دلخواه مقدار دهیم و به‌طور یکتا برای r متغیر وابسته حل کنیم تا یک جواب برای دستگاه به‌دست آوریم.

(الف) فرض کنیم $r = n$. در این صورت یک دستگاه مربعی $AX = B$ داریم، که در آن ماتریس ضرایب A (بالا) مثلثی با درایه‌های قطری غیرصفر است. پس، A وارون‌پذیر است و بنابر قضیه ۳-۱۰ دستگاه دارای جواب یکتا است.

(ب) با اختصاص مقادیر به $n - r$ متغیر آزاد یک دستگاه مثلثی در متغیرهای وابسته به‌دست می‌آوریم، که بنابر (الف) دارای جواب یکتا است.

۳-۱۱ هر یک از دستگاه‌های زیر را حل کنید:

(الف)
$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= -4 \\ 2x + 5y - 9z &= -10 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ -3x + y - 2z &= -7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 5y - 8z &= 4 \\ 3x + 8y - 13z &= 7 \end{aligned}$$

با استفاده از روش حذف گاوسی هر دستگاه را به‌صورت مثلثی یا پلکانی در آورید:

(الف) اعمال "$L_۲$ را با $L_۲ + ۲L_۱$–جایگزین می‌کنیم" و "$L_۳$ را با $L_۳ + ۳L_۱$–جایگزین می‌کنیم" را به کار برده، x را از معادلات دوم و سوم حذف می‌کنیم، و سپس عمل "$L_۳$ را با $L_۳ + ۸L_۲$جایگزین می‌کنیم" را به کار برده، y را از معادله سوم حذف می‌کنیم. این اعمال به‌دست می‌دهند:

$$\begin{matrix} x + ۲y - ۴z = -۴ \\ y - z = -۲ \\ -۸y + ۱۵z = ۲۳ \end{matrix} \quad \text{و سپس} \quad \begin{matrix} x + ۲y - ۴z = -۴ \\ y - z = -۲ \\ ۷z = ۷ \end{matrix}$$

دستگاه به‌صورت مثلثی است. توسط جایگزینی- معکوس حل می‌کنیم تا جواب یکتای $u = (۲, -۱, ۱)$ را به‌دست آوریم.

(ب) با جایگزینی $L_۲$ با $L_۲ + ۳L_۱$ و $L_۳$ با $L_۳ + ۵L_۱$–، x را از معادلات دوم و سوم حذف می‌کنیم. این دستگاه زیر را به‌دست می‌دهد.

$$\begin{matrix} x + ۲y - ۳z = -۱ \\ ۷y - ۱۱z = -۱۰ \\ -۷y + ۱۱z = ۷ \end{matrix}$$

جایگزینی $L_۳$ با $L_۲ + L_۳$ معادله تبهگون

$$۰x + ۰y + ۰z = -۳$$

را به‌دست می‌دهد که دارای جواب نیست، لذا دستگاه جواب ندارد.

(ج) با جایگزینی $L_۲$ با $L_۲ + ۲L_۱$–و $L_۳$ با $L_۳ + ۳L_۱$–، x را از معادلات دوم و سوم حذف می‌کنیم. بدین ترتیب دستگاه جدید زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{matrix} x + ۲y - ۳z = ۱ \\ y - ۲z = ۲ \\ ۲y - ۴z = ۴ \end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x + ۲y - ۳z = ۱ \\ y - ۲z = ۲ \end{matrix}$$

(معادله سوم حذف شده است، زیرا مضربی از معادله دوم است). دستگاه به‌صورت پلکانی با متغیرهای وابسته x و y و متغیر آزاد z است.

برای یافتن صورت پارامتری جواب عمومی، قرار می‌دهیم $z = a$ و برای x و y از روش جایگزین-معکوس حل می‌کنیم. $z = a$ را در معادله دوم قرار داده به‌دست می‌آوریم $y = ۲ + ۲a$. سپس $z = a$ و $y = ۲ + ۲a$ را در معادله اول قرار داده به‌دست می‌آوریم

$$x + ۲(۲ + ۲a) - ۳a = ۱ \quad \text{یا} \quad x + ۴ + a = ۱ \quad \text{یا} \quad x = -۳ - a$$

درنتیجه، جواب عمومی عبارت است از

$$x = -۳ - a, \quad y = ۲ + ۲a, \quad z = a \quad \text{یا} \quad u = (-۳ - a, \ ۲ + ۲a, \ a)$$

که در آن a یک پارامتر است.

۱۲-۳ هر یک از دستگاه‌های زیر را حل کنید

(الف)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 7x_3 - x_4 + 3x_5 &= 7 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 - 5x_5 &= 7 \end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 &= 3 \end{aligned}$$

با استفاده از روش حذف گاوسی هر دستگاه را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم.

(الف) L_2 را با $L_2 - 3L_1$ و L_3 را با $L_3 - 2L_1$ جایگزین می‌کنیم تا x را از معادلات دوم و سوم حذف کنیم. به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 1 \\ 3x_3 + 6x_4 - 9x_5 &= 3 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 2 \\ x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

(L_3 را حذف می‌کنیم، زیرا مضربی از L_2 است). دستگاه به‌صورت پلکانی با متغیرهای وابسته x_1 و x_3 و متغیرهای آزاد x_2 و x_4، و x_5 است.

برای یافتن صورت پارامتری جواب عمومی، قرار می‌دهیم $x_2 = a$، $x_4 = b$، و $x_5 = c$، که در آن a، b، c پارامتر هستند. جایگزینی-معکوس نتیجه می‌دهد که $x_3 = 1 - 2b + 3c$ و $x_1 = 3a + 5b - 8c$. جواب عمومی عبارت است از

$$x_1 = 3a + 5b - 8c \quad ،x_2 = a \quad ،x_3 = 1 - 2b + 3c \quad ،x_4 = b \quad ،x_5 = c$$

یا، به‌طور معادل $u = (3a + 5b - 8c,\ a,\ 1 - 2b + 3c,\ b,\ c)$.

(ب) با جایگزینی L_2 با $L_2 - 2L_1$ و L_3 با $L_3 + 5L_1$، x را از معادلات دوم و سوم حذف می‌کنیم. در این صورت دستگاه زیر را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 2 \\ x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= -3 \\ 2x_2 + 8x_3 - 14x_4 &= -7 \end{aligned}$$

جایگزینی L_3 با $L_3 - 2L_2$ معادله تبهگون $0 = -1$ را به‌دست می‌دهد. پس، اگرچه تعداد مجهول‌ها بیش از تعداد معادلات است) دستگاه جواب ندارد.

۱۳-۳ با استفاده از صورت فشرده دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 2y + 3z &= 3 \\ x + y + z &= 4 \\ 4x + 8y - 3z &= 35 \end{aligned}$$

صورت فشرده به شکل زیر حاصل می‌شود:

شماره	معادله	عمل
(۲)	$x + y + z = ۴$	$L_۱ \leftrightarrow L_۲$
(۱)	$۲y + ۳z = ۳$	$L_۱ \leftrightarrow L_۲$
(۳)	$۴x + ۸y - ۳z = ۳۵$	
(۳′)	$۴y - ۷z = ۱۹$	$L_۳$ را با $L_۳ + ۴L_۱$– جایگزین می‌کنیم
(۳″)	$-۱۳z = ۱۳$	$L_۳$ را با $L_۳ + ۲L_۲$– جایگزین می‌کنیم

در اینجا (۱)، (۲)، و (۳″) یک دستگاه مثلثی تشکیل می‌دهند. (تأکید می‌کنیم که جابه‌جایی $L_۱$ و $L_۲$ به‌سادگی با تعویض شماره‌های $L_۱$ و $L_۲$ به‌صورت فوق حاصل می‌شود).

با استفاده از جایگزینی-معکوس در دستگاه مثلثی، از $L_۳$ داریم $z = -۱$، از $L_۲$ داریم $y = ۳$، و از $L_۱$ داریم $x = ۲$. پس، جواب یکتای دستگاه عبارت است از $x = ۲$، $y = ۳$، $z = -۱$ یا سه‌تایی $u = (۲, ۳, -۱)$.

۳.۱۴ دستگاه زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} x + ۲y + z &= ۳ \\ ay + ۵z &= ۱۰ \\ ۲x + ۷y + az &= b \end{aligned}$$

(الف) آن مقادیر a را بیابید که به‌ازای آنها دستگاه دارای جواب یکتا است.

(ب) آن جفت مقادیر (a, b) را پیدا کنید که به‌ازای آنها دستگاه بیش از یک جواب دارد.

دستگاه را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم. یعنی، با "جایگزینی $L_۳$ با $L_۳ + ۲L_۱$–" x را از معادله سوم حذف می‌کنیم. سپس با جایگزینی "$L_۳$ با $aL_۳ + ۳L_۲$–"، y را از معادله سوم حذف می‌کنیم. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} x + ۲y + z &= ۳ \\ ay + ۵z &= ۱۰ \\ ۳y + (a - ۲)z &= b - ۶ \end{aligned} \quad \text{و سپس} \quad \begin{aligned} x + ۲y + z &= ۳ \\ ay + ۵z &= ۱۰ \\ (a^۲ - ۲a - ۱۵)z &= ab - ۶a - ۳۰ \end{aligned}$$

معادله آخری $(a^۲ - ۲a - ۱۵)z = ab - ۶a - ۳۰$ را امتحان می‌کنیم.

(الف) دستگاه دارای جواب یکتا است اگر و فقط اگر ضریب z صفر نباشد: یعنی، اگر

$$a^۲ - ۲a - ۱۵ = (a - ۵)(a + ۳) \neq ۰ \quad \text{یا} \quad a \neq ۵ \cdot \text{و} \quad a \neq -۳.$$

(ب) دستگاه بیش از یک جواب دارد اگر هر دو طرف صفر باشند. سمت چپ وقتی صفر است که $a = ۵$ یا $a = -۳$. اگر $a = ۵$، سمت راست صفر است اگر $۵b - ۶۰ = ۰$ یا $b = ۱۲$. اگر $a = -۳$، سمت راست صفر است اگر $-۳b - ۱۲ = ۰$ یا $b = -۴$. پس، $(۵, ۱۲)$ و $(-۴, -۳)$ جفت‌هایی هستند که به‌ازای آنها دستگاه بیش از یک جواب دارد.

استفاده می‌شود. همچنین، یک تفاوت این الگوریتم ا[illegible] استفاده از یک درآیه محوری جهت حصول صفرها در دیگر سطرها، به‌جای نرمال کردن سطرها در پایان کار، یک درآیه محوری یکه، به‌دست می‌آورد.

۲۰۳ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۱ & ۴ & -۱ & ۳ \\ ۲ & ۵ & ۹ & -۲ & ۸ \end{bmatrix}$. با استفاده از الگوریتم گاوس-جردن صورت ساده شده سطری پلکانی A را پیدا کنید.

$a_{۱۱} = ۱$ را به‌عنوان درآیه محوری به کار می‌بریم تا با جایگزینی $R_۲$ با $-R_۱ + R_۲$ و $R_۳$ با $-۲R_۱ + R_۳$، زیر $a_{۱۱}$ را صفر کنیم. به‌دست می‌آوریم.

$$A \sim \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ & ۱ & -۲ & ۱ \\ ۰ & ۹ & ۳ & -۴ & ۴ \end{bmatrix}$$

$R_۲$ را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب می‌کنیم تا درآیه محوری $a_{۲۲} = ۱$ را به‌دست آوریم، و سپس با جایگزینی $R_۳$ با $-۹R_۲ + R_۳$، $R_۱$ با $۲R_۲ + R_۱$ بالا و پایین $a_{۲۲}$ را صفر می‌کنیم. با این اعمال به‌دست می‌آوریم

$$A \sim \begin{bmatrix} ۱ & -۲ & ۳ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۹ & ۳ & -۴ & ۴ \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & \frac{۱۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} & \frac{۸}{۳} \\ ۰ & ۱ & \frac{۱}{۳} & -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

بالاخره، R_3 را در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌کنیم تا درآیه محوری $a_{33} = 1$ را به‌دست آوریم، و سپس R_2 را با $R_2 + \frac{2}{3}R_3$ و R_1 را با $R_1 + \frac{1}{3}R_3$ جایگزین می‌کنیم، تا به‌دست آوریم

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{3} & 0 & \frac{17}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

که صورت ساده شده سطری پلکانی A است.

دستگاه‌های معادلات خطی به‌صورت ماتریسی (صورت ماتریسی دستگاه‌های معادلات خطی)

۳-۲۱ ماتریس افزوده M و ماتریس ضرایب A را برای دستگاه زیر به‌دست آورید:

$$x + 2y - 3z = 4$$

۲۳-۳ با استفاده از ماتریس افزوده M دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 + 6x_5 &= 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 8 \end{aligned}$$

ماتریس افزوده M را ابتدا به‌صورت پلکانی و سپس به‌صورت ساده شده سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳ & -۲ & ۴ & ۱\\ ۲ & ۵ & -۸ & -۱ & ۶ & ۴\\ ۱ & ۴ & -۷ & ۵ & ۲ & ۸\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳ & -۲ & ۴ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & -۲ & ۲\\ ۰ & ۲ & -۴ & ۷ & -۲ & ۷\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳ & -۲ & ۴ & ۱\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۳ & -۲ & ۲\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}۱ & ۲ & -۳ & ۰ & ۸ & ۷\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ & -۸ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۱ & ۰ & ۲۴ & ۲۱\\ ۰ & ۱ & -۲ & ۰ & -۸ & -۷\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}.$$

دستگاه متناظر با صورت ساده شده سطری پلکانی M را نوشته سپس متغیرهای آزاد را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا صورت متغیر-آزاد جواب را به‌دست آوریم:

$$\begin{aligned}x_۱ &= ۲۱ - x_۳ - ۲۴x_۵ \\ x_۲ &= -۷ + ۲x_۳ + ۸x_۵ \\ x_۴ &= ۳ - ۲x_۵\end{aligned} \quad \text{و} \quad \begin{aligned}x_۱ + x_۳ + ۲۴x_۵ &= ۲۱\\ x_۲ - ۲x_۳ - ۸x_۵ &= -۷\\ x_۴ + ۲x_۵ &= ۳\end{aligned}$$

در اینجا $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ متغیرهای وابسته و $x_۲$ و $x_۵$ متغیرهای آزاد هستند. به‌خاطر آورید که صورت پارامتری جواب را می‌توان از صورت متغیر-آزاد جواب به‌سهولت با قرار دادن متغیرهای آزاد برابر پارامترها، مثلاً $x_۳ = a$، $x_۵ = b$، به‌دست آورد. این روند به‌دست می‌دهد

$$x_۱ = ۲۱ - a - ۲۴b,\quad x_۲ = -۷ + ۲a + ۸b,\quad x_۳ = a,\quad x_۴ = ۳ - ۲b,\quad x_۵ = b$$

یا

$$u = (۲۱ - a - ۲۴b,\ -۷ + ۲a + ۸b,\ a,\ ۳ - ۲b,\ b)$$

که صورت دیگری از جواب می‌باشد.

ترکیبات خطی، دستگاه‌های همگن

۳-۲۴ v را به‌صورت یک ترکیب خطی از $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ بنویسید، جایی که

(الف) $v = (۳, ۱۰, ۷)$ و $u_۱ = (۱, ۳, -۲)$، $u_۲ = (۱, ۴, ۲)$، $u_۳ = (۲, ۸, ۱)$

(ب) $v = (۲, ۷, ۱۰)$ و $u_۱ = (۱, ۲, ۳)$، $u_۲ = (۱, ۳, ۵)$، $u_۳ = (۱, ۵, ۹)$

(ج) $v = (۱, ۵, ۴)$ و $u_۱ = (۱, ۳, -۲)$، $u_۲ = (۲, ۷, -۱)$، $u_۳ = (۱, ۶, ۷)$

با نوشتن $v = xu_۱ + yu_۲ + zu_۳$ دستگاه معادل از معادلات خطی را به‌دست می‌آوریم. متناوباً، ماتریس افزوده M از دستگاه هم‌ارز را به کار می‌بریم، که در آن $M = [u_۱, u_۲, u_۳, v]$. (در اینجا $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، و v ستون‌های M هستند).

(الف) معادله برداری $v = xu_۱ + yu_۲ + zu_۳$ برای بردار مفروض به‌صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}۳\\ ۱۰\\ ۷\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}۱\\ ۳\\ -۲\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}۱\\ ۴\\ ۲\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}۲\\ ۸\\ ۱\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x + y + ۲z\\ ۳x + ۴y + ۸z\\ -۲x + ۲y + z\end{bmatrix}$$

با مساوی قرار دادن درآیه‌های متناظر، دستگاه هم‌ارز معادلات خطی را تشکیل می‌دهیم، و سپس دستگاه را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 3 \\ 3x+4y+8z &= 10 \\ -2x+2y+z &= 7 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x+y+2z &= 3 \\ y+2z &= 1 \\ 4y+5z &= 13 \end{aligned} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x+y+2z &= 3 \\ y+2z &= 1 \\ -3z &= 9 \end{aligned}$$

دستگاه به‌صورت مثلثی است. جایگزینی-معکوس جواب یکتای $x=2$، $y=7$، $z=-3$ را به‌دست می‌دهد. پس، $v=2u_1+7u_2-3u_3$.

متناوباً، ماتریس افزوده $M=[u_1,u_2,u_3,v]$ از دستگاه هم‌ارز را تشکیل داده، و M را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 10 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

ماتریس آخری متناظر با یک دستگاه مثلثی است که دارای جوابی یکتا است. جایگزینی-معکوس جواب $x=2$، $y=7$، $z=-3$ را به‌دست می‌دهد. لذا $v=2u_1+7u_2-3u_3$.

(ب) ماتریس افزوده $M=[u_1,u_2,u_3,v]$ از دستگاه هم‌ارز را تشکیل می‌دهیم، و M را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سطر سوم متناظر با معادله تبهگون $0x+0y+0z=-2$ است که جواب ندارد. پس دستگاه دارای جواب نیست، و v را نمی‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از u_1، u_2، u_3 نوشت.

(ج) ماتریس افزوده $M=[u_1,u_2,u_3,v]$ از دستگاه هم‌ارز را تشکیل می‌دهیم، و آن را به‌ضورت پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس آخری متناظر با دستگاه

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 1 \\ y+3z &= 2 \end{aligned}$$

با متغیر آزاد z است. پس، v را می‌توان به صور مختلف به‌صورت یک ترکیب خطی از u_1، u_2، u_3 نوشت. برای مثال، فرض کنیم متغیر آزاد $z=1$، و با جایگزینی-معکوس به‌دست آوریم $y=-2$ و $x=2$. در این صورت $v=2u_1-2u_2+u_3$.

(ب) با استفاده از اصل $[M_2]$ و سپس اصل $[M_1]$، داریم

$$u + u = 1u + 1u = (1 + 1)u = 2u$$

٤-٤ $v = (1, -2, 5)$ در $\mathbf{R}^3$ را به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای زیر بنویسید.

$$u_1 = (1, 1, 1) \quad ،u_2 = (1, 2, 3) \quad ،u_3 = (2, -1, 1)$$

بایستی اسکالرهای x، y، و z، که فعلاً مجهول هستند، را پیدا کنیم طوری که $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$. پس، می‌خواهیم داشته باشیم.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ x + 2y - z &= -2 \\ x + 3y + z &= 5 \end{aligned}$$

(برای سهولت در نمادگذاری، بردارهای در $\mathbf{R}^3$ را به‌صورت ستونی نوشته‌ایم، زیرا در این صورت یافتن دستگاه معادلات خطی هم‌ارزش ساده‌تر است).

اگر دستگاه را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل کنیم دستگاه مثلثی

$$x + y + 2z = 1 \quad ،y - 3z = -3 \quad ،5z = 10$$

را به‌دست می‌آوریم. دستگاه سازگار بوده و جواب دارد. اگر با جایگزینی - معکوس حل کنیم جواب $x = -6$، $y = 3$، $z = 2$ به‌دست می‌آید. پس $v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$.

متناوباً، ماتریس افزوده M از دستگاه معادلات خطی هم‌ارز را می‌نویسیم. سه ستون اول M بردارهای u_1، u_2، u_3 و ستون آخر آن بردار v است. سپس M را به‌صورت پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

ماتریس آخری متناظر با یک دستگاه مثلثی است، که دارای جواب است، اگر دستگاه مثلثی را با جایگزینی - معکوس حل کنیم جواب $x = -6$، $x = 3$، $z = 2$ را به‌دست می‌آوریم. بنابراین، $v = -6u_1 + 3u_2 + 2u_3$.

٥-٤ بردار $v = (2, -5, 3)$ در $\mathbf{R}^3$ را به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای زیر بنویسید.

$$u_1 = (1, -3, 2) \quad ،u_2 = (2, -4, -1) \quad ،u_3 = (1, -5, 7)$$

به دنبال اسکالرهای x، y، z، فعلاً به‌عنوان مجهول، هستیم طوری که $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$. پس، می‌خواهیم داشته باشیم.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -3x - 4y - 5z &= -5 \\ 2x - y + 7z &= 3 \end{aligned}$$

اگر دستگاه را به‌صورت ساده پلکانی تبدیل کنیم به‌دست می‌آوریم

$$x + 2y + z = 2, \quad 2y - 2z = 1, \quad 0 = 3$$

دستگاه ناسازگار است و لذا جواب ندارد. پس v را نمی‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از u_1، u_2، و u_3 نوشت.

٤.٦ چندجمله‌ای $v = t^2 + 4t - 3$ در $\mathbf{P}(t)$ را به‌صورت یک ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های زیر بنویسید.

$$P_1 = t^2 - 2t + 5, \quad P_2 = 2t^2 - 3t, \quad p_3 = t + 1$$

با استفاده از مجهول‌های x، y، و z، v را به‌صورت یک ترکیب خطی از p_1، p_2، p_3 می‌نویسیم تا به‌دست آوریم

$$t^2 + 4t - 3 = x(t^2 - 2t + 5) + y(2t^2 - 3t) + z(t + 1) \qquad (*)$$

به دو روش می‌توانیم ادامه دهیم.

روش ۱: سمت راست (*) را بسط داده، حاصل را برحسب توان‌های t به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$t^2 + 4t - 3 = xt^2 - 2xt + 5x + 2yt^2 - 3yt + zt + z$$
$$= (x + 2y)t^2 + (-2x - 3y + z)t + (5x + 3z)$$

ضرایب توان‌های یکسان t در دو طرف تساوی فوق را برابر هم قرار می‌دهیم، و دستگاه حاصل را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم. به‌دست می‌آوریم

$$\begin{array}{lll} x + 2y = 1 & x + 2y = 1 & x + 2y = 1 \\ -2x - 3y + z = 4 \quad \text{یا} & y + z = 6 \quad \text{یا} & y + z = 6 \\ 5x + 3z = -3 & -10y + 3z = -8 & 43z = 52 \end{array}$$

دستگاه سازگار بوده و دارای جواب است. اگر از طریق جایگزینی-معکوس حل کنیم جواب $x = -3$، $y = 2$، $z = 4$ را به‌دست می‌آوریم. پس $v = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$.

روش ۲. معادله (*) یک اتحاد در t است؛ یعنی معادله به‌ازای هر مقدار از t برقرار است. پس، می‌توانیم t را برابر هر عدد دلخواه قرار داده تا معادلاتی در مجهول ها به‌دست آوریم.

(الف) در (*) قرار می‌دهیم $t = 0$ تا معادله $5x + 3z = -3$ را به‌دست آوریم.

(ب) در (*) قرار می‌دهیم $t = 1$ تا معادله $4x - y + 2z = 2$ را به‌دست آوریم.

(ج) در (*) قرار می‌دهیم $t = -1$ تا معادله $8x + 5y = -6$ را به‌دست آوریم.

اگر دستگاه سه معادله سه مجهول حاصل را حل کنیم جواب $x = -3$، $y = 2$، $z = 4$ را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه $v = -3p_1 + 2p_2 + 4p_3$.

٤.٧ فرض کنید $M = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$، $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

ماتریس M را به‌صورت یک ترکیب خطی از A، B، و C بنویسید.

(الف) $0 \in W$، (ب) اگر $u, v \in W$، آنگاه $u + v \in W$ و $ku \in W$.

بنابر (الف)، W غیرتهی است، و بنابر (ب) اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر برای W خوش تعریف هستند. اصول $[A_1]$، $[A_2]$، $[M_1]$، $[M_2]$، $[M_3]$، و $[M_4]$ در W برقرارند زیرا بردارهای در W در V نیز هستند. پس، تنها لازم است نشان دهیم که $[A_3]$ و $[A_4]$ در W برقرارند. حال $[A_3]$ برقرار است چون که بنابر (الف) بردار 0 در V متعلق به W است. بالاخره، اگر $v \in W$، آنگاه $-v = (-1)v \in W$، و $v + (-v) = 0$. پس $[A_4]$ نیز برقرار است.

(۹۰٤) فرض کنید $V = \mathbf{R}^3$. نشان دهید که W یک زیر فضا از V نیست، اگر

(الف) $W = \{(a, b, c): a \geq 0\}$، (ب) $W = \{(a, b, c): a^2 + b^2 + c^2 \leq 1\}$.

در هر یک از موارد (الف) و (ب) نشان می‌دهیم که قضیه ۲۰۲ برقرار نیست.

(الف) W متشکل از آن بردارهایی است که درآیه اول آنها غیرمنفی است. پس $v = (1, 2, 3) \in W$ متعلق به W است. اگر قرار دهیم $k = -3$، آنگاه $kv = (-3, -6, -9)$ که متعلق به W نیست. زیرا درآیه اول آن، -3، منفی است. پس، W زیرفضایی از V نیست.

(ب) W متشکل از بردارهایی است که طول آنها بزرگتر از ۱ نیست. لذا، $u = (1, 0, 0)$ و $v = (0, 1, 0)$ متعلق به W هستند، ولی $u + v = (1, 1, 0)$ متعلق به W نیست، زیرا $1^2 + 1^2 + 0^2 = 2 > 1$. درنتیجه W یک زیر فضا از V نیست.

(۱۰۰٤) فرض کنید $V = \mathbf{P}(t)$، فضای چندجمله‌ای‌های حقیقی باشد. معین کنید که آیا W زیرفضایی از V هست یا نه، اگر

(الف) W متشکل از چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح باشد.

(ب) و (ج) بله. در هر حالت، W شامل چندجمله‌ای صفر و نیز حاصلجمع و مضارب اسکالر چندجمله‌ای‌های در W متعلق به W هستند.

۴-۱۱ فرض کنید V فضای برداری توابع $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ باشد. نشان دهید که W زیرفضایی از V است، اگر

(الف) $W = \{f : f(۱) = ۰\}$ متشکل از تمام توابعی است که مقدارشان در ۱ برابر ۰ است.

(ب) $W = \{f : f(۳) = f(۱)\}$ متشکل از تمام توابعی است که مقدارشان در ۳ و ۱ یکسانند.

(ج) $W = \{f : f(-x) = -f(x)\}$ متشکل از تمام توابع فرد است.

فرض کنیم $\hat{۰}$ تابع صفر باشد، لذا به‌ازای هر مقدار x، $\hat{۰}(x) = ۰$.

(الف) $\hat{۰} \in W$، زیرا $\hat{۰}(۱) = ۰$. فرض کنیم $f, g \in W$. در این صورت $f(۱) = ۰$ و $g(۱) = ۰$. همچنین، برای اسکالرهای a و b، داریم

$$(af + bg)(۱) = af(۱) + bg(۱) = a۰ + b۰ = ۰$$

بنابراین $af + bg \in W$، و لذا W یک زیر فضا است.

(ب) چون $\hat{۰}(۱) = ۰ = \hat{۰}(۳)$، لذا $\hat{۰} \in W$. فرض کنیم $f, g \in W$. در این صورت $f(۳) = f(۱)$ و $g(۳) = g(۱)$. بنابراین، به‌ازای اسکالرهای a و b، داریم

$$(af + bg)(۳) = af(۳) + bg(۳) = af(۱) + bg(۱) = (af + bg)(۱)$$

پس، $af + bg \in W$، و لذا W یک زیر فضا است.

(ج) چون $\hat{۰}(x) = -۰ = ۰ = \hat{۰}(-x)$، لذا $\hat{۰} \in W$. فرض کنیم $f, g \in W$. در این صورت $f(-x) = -f(x)$ و $g(-x) = -g(x)$. همچنین، برای اسکالرهای a و b،

$$(af + bg)(-x) = af(-x) + bg(-x) = -af(x) - bg(x) = -(af + bg)(x)$$

پس، $ab + gf \in W$، و لذا W یک زیر فضا از V است.

۴-۱۲ قضیه ۴-۳ را ثابت کنید: اشتراک هر تعداد از زیر فضاهای V یک زیر فضای V است.

فضاهای پدیدآمده به‌عنوان مجموعه ترکیبات خطی

٤-١٣ نشان دهید که بردارهای $u_1 = (1, 1, 1)$، $u_2 = (1, 2, 3)$ و $u_3 = (1, 5, 8)$ فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورند.

لازم است ثابت کنیم که هر بردار $v = (a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ یک ترکیب خطی از u_1، u_2، و u_3 است. قرار می‌دهیم $v = xu_1 + yu_2 + zu_3$ یعنی، قرار می‌دهیم

$$(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 2, 3) + z(1, 5, 8) = (x + y + z, \quad x + 2y + 5z, \quad x + 3y + 8z)$$

دستگاه هم‌ارز را تشکیل داده، آن را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{array}{lll} x + y + z = a & x + y + z = a & x + y + z = a \\ y + 4z = b - a \quad \text{یا} & y + 4z = b - a \quad \text{یا} & x + 2y + 5z = b \\ -z = c - 2b + a & 2y + 7z = c - a & x + 3y + 8z = c \end{array}$$

دستگاه فوق به‌صورت سطری پلکانی و سازگار است؛ در واقع،

$$z = -a + 2b - c, y = 3a - 7b + 4c, x = -a + 5b - 3c$$

یک جواب است. پس u_1، u_2، و u_3 فضای $\mathbf{R}^3$ را پدید می‌آورند.

٤-١٤ شرایطی را روی a، b، c پیدا کنید طوری که بردار $v = (a, b, c)$ از $\mathbf{R}^3$ متعلق به $W = \text{span}(u_1, u_2, u_3)$ باشد، u_1، u_2، u_3

$a_1u_1, a_2u_2, \ldots, a_ru_r$ متعلق به W هستند، ولذا حاصلجمع $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_ru_r$ نیز متعلق به W است. یعنی، W شامل همه ترکیبات خطی عناصر S است، یا، به‌عبارت دیگر همان‌طور که ادعا شده بود $\text{span}(S) \subseteq W$.

وابستگی خطی

۱۷-۴ در هر یک از موارد زیر معین کنید که آیا u و v وابسته خطی‌اند یا نه.

(الف) $u = (1, 2)$، $v = (3, -5)$ (ب) $u = (1, -3)$، $v = (-2, 6)$

(ج) $u = (1, 2, -3)$، $v = (4, 5, -6)$ (د) $u = (2, 4, -8)$، $v = (3, 6, -12)$

دو بردار u و v وابسته خطی‌اند اگر و فقط اگر یکی مضرب اسکالر دیگری باشد.

(الف) نه، (ب) بله، زیرا $v = -2u$ (ج) نه، (د) بله، زیرا $v = \frac{3}{2}u$.

۱۸-۴ در هر یک از موارد زیر معین کنید که آیا u و v وابسته خطی‌اند یا نه.

(الف) $u = 2t^2 + 4t - 3$، $v = 4t^2 + 8t - 6$ (ب) $u = 2t^2 - 3t + 4$، $v = 4t^2 - 3t + 2$

(ج) $u = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$، $v = \begin{bmatrix} -4 & -12 & 16 \\ -20 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (د) $u = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$، $v = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

دو بردار u و v وابسته خطی‌اند اگر و فقط اگر یکی از آنها مضرب اسکالر دیگری باشد.

(الف) بله، زیرا $v = 2u$، (ب) نه، (ج) بله، زیرا $v = -4u$، (د) نه.

پایه و بعد

٤-٤٠ معین کنید که آیا هر یک از مجموعه‌های زیر پایه‌ای برای $\mathbf{R}^3$ تشکیل می‌دهند یا نه.

(الف) $(1,1,1)$، $(1,0,1)$؛ (ج) $(1,1,1)$، $(1,2,3)$، $(1,-1,2)$؛

(ب) $(1,2,3)$، $(1,3,5)$، $(1,0,1)$، $(2,3,0)$؛ (د) $(1,1,2)$، $(1,2,5)$، $(4,3,5)$.

(الف) و (ب) نه، زیرا یک پایه از $\mathbf{R}^3$ می‌بایستی شامل دقیقاً سه عنصر باشد، چون که $\dim \mathbf{R}^3 = 3$.

(ج) سه بردار تشکیل یک پایه می‌دهند اگر و فقط اگر آنها مستقل خطی باشند. پس، ماتریسی که سطرهایش بردارهای مفروض باشند را تشکیل داده، و آن را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ماتریس پلکانی سطر صفر ندارد؛ لذا، سه بردار مستقل خطی‌اند، و لذا آنها یک پایه برای $\mathbf{R}^3$ تشکیل می‌دهند.

(د) ماتریسی که سطرهایش بردارهای مفروضند را تشکیل داده، آن را سطری پلکانی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس پلکانی سطر صفر دارد لذا سه بردار وابسته خطی‌اند. در نتیجه آنها یک پایه برای $\mathbf{R}^3$ تشکیل نمی‌دهند.

داریم $F(v) = (a + b, a)$ و $F(w) = (a' + b', a')$. در نتیجه،

$$F(v + w) = F(a + a', \ b + b') = (a + a' + b + b', \ a + a')$$
$$= (a + b, \ a) + (a' + b', \ a') = F(v) + F(w)$$

و

$$F(kv) = F(ka, kb) = (ka + kb, ka) = k(a + b, a) = kF(v)$$

چون v، w، و k دلخواه هستند، F یک تبدیل خطی است.

۱۰-۵ فرض کنید $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ به‌صورت $F(x, y, z) = (x + y + z, \ 2x - 3y + 4z)$ تعریف شده باشد. نشان دهید که F یک تبدیل خطی است.

از طریق ماتریس‌ها استدلال می‌کنیم. با نوشتن بردارها به‌صورت ستونی، تابع F را می‌توان به‌صورت $F(v) = Av$ نوشت، که در آن $v = [x, y, z]^T$ و

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & -۳ & ۴ \end{bmatrix}$$

در این صورت، با استفاده از خواص ماتریسی، داریم

$$F(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = F(v) + F(w)$$

و

$$F(kv) = A(kv) = k(Av) = kF(v)$$

پس، F یک تبدیل خطی است.

۱۱-۵ نشان دهید که توابع زیر خطی نیستند:

(الف) $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ که به‌صورت $F(x, y) = (xy, x)$ تعریف شده است.

(ب) $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ که به‌صورت $F(x, y) = (x + ۳, \ ۲y, \ x + y)$ تعریف شده است.

(ج) $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ که به‌صورت $F(x, y, z) = (|x|, \ y + z)$ تعریف شده است.

(الف) فرض کنیم $v = (۱, ۲)$ و $w = (۳, ۴)$. در این صورت $v + w = (۴, ۶)$. همچنین،

$$F(v) = (۱(۲), ۱) = (۲, ۱) \quad \text{و} \quad F(w) = (۳(۴), ۳) = (۱۲, ۳)$$

در نتیجه

$$F(v + w) = (۴(۶), ۴) = (۲۴, ۶) \neq F(v) + F(w)$$

(ب) چون $F(۰, ۰) = (۳, ۰, ۰) \neq (۰, ۰, ۰)$، F نمی‌تواند خطی باشد.

(ج) فرض کنیم $v = (۱, ۲, ۳)$ و $k = -۳$. در این صورت $kv = (-۳, -۶, -۹)$. داریم

$$F(v) = (۱, ۵) \quad \text{و} \quad kF(v) = -۳(۱, ۵) = (-۳, -۱۵).$$

پس

$$F(kv) = F(-۳, -۶, -۹) = (۳, -۱۵) \neq kF(v)$$

در نتیجه، F خطی نیست.

۱۶-۵ فرض کنید $F: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ تبدیل خطی باشد که به‌صورت

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t,\quad x + 2z - t,\quad x + y + 3z - 3t)$$

تعریف می‌شود. بعد و یک پایه برای (الف) فضای مقادیر F، (ب) فضای پوچ F، پیدا کنید.

(الف) تصویر پایه استاندارد $\mathbf{R}^4$ را پیدا می‌کنیم:

$$F(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1),\quad F(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 1),$$
$$F(0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3),\quad F(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -3)$$

بنابر قضیه ۴-۵، بردارهای تصویر فضای $\operatorname{Im} F$ را پدید می‌آورند. در نتیجه، ماتریسی را تشکیل می‌دهیم که سطرهایش این بردارهای تصویر باشند، و آن را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس، بردارهای $(1, 1, 1)$ و $(0, 1, 2)$ یک پایه برای $\operatorname{Im} F$ تشکیل می‌دهند، و لذا $\dim(\operatorname{Im} F) = 2$.

(ب) قرار می‌دهیم $F(v) = 0$، که در آن $v = (x, y, z, t)$؛ یعنی، قرار می‌دهیم

$$F(x, y, z, t) = (x - y + z + t,\quad x + 2z - t,\quad x + y + 3z - 3t) = (0, 0, 0)$$

درآیه‌های متناظر را برابر هم قرار می‌دهیم تا دستگاه همگن زیر که فضای جوابش $\operatorname{Ker} F$ است را به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{ll} x - y + z + t = 0 & x - y + z + t = 0 \\ x + 2z - t = 0 & y + z - 2t = 0 \\ x + y + 3z - 3t = 0 & 2y + 2z - 4t = 0 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{array}$$

z و t متغیرهای آزادند. در نتیجه، $\dim(\operatorname{Ker} F) = 2$.

(i) قرار می‌دهیم $z = -1$، $t = 0$ تا جواب $(0, -1, 2, 1)$ را به‌دست آوریم.

(ii) قرار می‌دهیم $z = 0$، $t = 1$ تا جواب $(1, 2, 0, 1)$ را به‌دست آوریم.

پس $(0, -1, 2, 1)$ و $(1, 2, 0, 1)$ یک پایه برای $\operatorname{Ker} F$ تشکیل می‌دهند.

[همان‌طور که انتظار داریم $\dim(\operatorname{Im} F) + \dim(\operatorname{Ker} F) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbf{R}^4$ که در آن $\mathbf{R}^4$ دامنه F می‌باشد].

۱۷-۵ فرض کنید $G: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ تبدیل خطی باشد که به‌صورت

$$G(x, y, z) = (x + 2y - z,\quad y + z,\quad x + y - 2z)$$

تعریف می‌شود. بعد و یک پایه برای (الف) فضای مقادیر G، (ب) فضای پوچ G، به‌دست آورید.

(الف) تصاویر عناصر پایه معمولی R^3 را به‌دست می‌آوریم:

$$G(1,0,0) = (1,0,1), \quad G(0,1,0) = (2,1,1), \quad G(0,0,1) = (-1,1,-2)$$

بنابر قضیه ۵-۴، بردارهای تصویر فضای $\operatorname{Im} G$ را پدید می‌آورند. لذا ماتریس M که سطرهایش این بردارهای تصویر هستند را تشکیل داده آن را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس، $(1,0,1)$ و $(0,1,-1)$ یک پایه برای $\operatorname{Im} G$ تشکیل می‌دهند؛ درنتیجه $\dim(\operatorname{Im} G) = 2$.

(ب) قرار می‌دهیم $G(v) = 0$، که در آن $v = (x, y, z)$؛ یعنی،

$$G(x, y, z) = (x + 2y - z,\quad y + z,\quad x + y - 2z) = (0, 0, 0)$$

درایه‌های متناظر را برابر هم قرار می‌دهیم تا دستگاه همگن زیر که فضای جوابش $Ker\ G$ است را به‌دست آوریم:

$$\begin{array}{lll} x + 2y - z = 0 & & x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 & \text{یا} & y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 & & -y - z = 0 \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{array}$$

z تنها متغیر آزاد است؛ لذا $\dim(\operatorname{Ker} G) = 1$. اگر قرار دهیم $z = 1$، آنگاه $y = -1$ و $x = 3$. درنتیجه $(3, -1, 1)$ یک پایه برای $\operatorname{Ker} G$ تشکیل می‌دهد. [همان‌طور که انتظار می‌رود، $\dim(\operatorname{Im} G) + \dim(Ker\ G) = 2 + 1 = 3$، که در آن R^3 دامنه G است].

۵.۱۸ تابع ماتریسی $A: R^4 \to R^3$ را در نظر بگیرید، که در آن $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{bmatrix}$. بعد و یک پایه برای (الف) فضای مقادیر A، (ب) فضای پوچ A، به‌دست آورید.

(الف) فضای ستونی A همان فضای مقادیر A است. حال A^T را به‌صورت سطری پلکانی تبدیل می‌کنیم:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 13 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین $\{(1,1,3), (0,1,2)\}$ یک پایه برای $\operatorname{Im} A$ می‌باشد و $\dim(\operatorname{Im} A) = 2$.

دستگاه جواب غیرصفر دارد، زیرا y یک متغیر آزاد می‌باشد. درنتیجه G منفرد است. قرار می‌دهیم $y = ۱$ تا جواب $v = (۲, ۱)$ را به‌دست آوریم، که یک بردار غیرصفر است، طوری که $G(v) = ۰$.

۲۵-۵ تبدیل خطی $F: \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۲$ که به‌صورت $F(x, y) = (x - y,\ x - ۲y)$ تعریف می‌شود، بنابر مسئله ۲۴-۵ غیرمنفرد است. فرمولی برای $F^{-۱}$ پیدا کنید.

قرار می‌دهیم $F(x, y) = (a, b)$، و لذا $F^{-۱}(a, b) = (x, y)$. داریم

$$(x - y,\ x - ۲y) = (a, b) \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x - y = a \\ x - ۲y = b \end{matrix} \quad \text{یا} \quad \begin{matrix} x - y = a \\ y = a - b \end{matrix}$$

دستگاه را برای مجهول‌های x و y برحسب a و b حل می‌کنیم تا به‌دست آوریم $x = ۲a - b$، $y = a - b$. بنابراین

$$F^{-۱}(a, b) = (۲a - b,\ a - b) \quad \text{یا} \quad F^{-۱}(x, y) = (۲x - y,\ x - y)$$

(معادله دوم با جایگزینی a و b توسط به ترتیب x و y حاصل شده است).

۲۶-۵ فرض کنید $G: \mathbf{R}^۲ \to \mathbf{R}^۳$ به‌صورت $G(x, y) = (x + y, x - ۲y,\ ۳x + y)$ تعریف شود.

(الف) نشان دهید که G غیرمنفرد است. (ب) فرمولی برای $G^{-۱}$ پیدا کنید.

(الف) قرار می‌دهیم $G(x, y) = (۰, ۰, ۰)$ تا فضای پوچ G را به‌دست آوریم. داریم

$$(x + y,\ x - ۲y,\ ۳x + y) = (۰, ۰, ۰) \quad \text{یا} \quad x + y = ۰,\ x - ۲y = ۰,\ ۳x + y = ۰$$

تنها جواب این دستگاه $x = ۰$، $y = ۰$ است؛ و لذا G غیرمنفرد می‌باشد.

(ب) گرچه G غیرمنفرد است، وارون پذیر نیست، زیرا $\mathbf{R}^۲$ و $\mathbf{R}^۳$ دارای بعدهای متفاوتند. (پس قضیه ۹-۵ را نمی‌توان به کار برد). درنتیجه $G^{-۱}$ وجود ندارد.

۲۷-۵ فرض کنید $F: V \to U$ یک تبدیل خطی و V دارای بعد متناهی باشد. نشان دهید که V و فضای مقادیر F دارای بعدهای یکسانند اگر و فقط اگر F غیرمنفرد باشد. تمامی تبدیلات خطی غیرمنفرد $T: \mathbf{R}^۴ \to \mathbf{R}^۳$ را معین کنید.

بنابر قضیه ۶-۵ $\dim V = \dim(\operatorname{Ker} F) + \dim(\operatorname{Im} F)$. در نتیجه V و $\operatorname{Im} F$ دارای بعدهای یکسانند اگر و فقط اگر $\dim(\operatorname{Ker} F) = ۰$ یا $\operatorname{Ker} F = \{۰\}$ (یعنی، اگر و فقط اگر F غیرمنفرد باشد).

چون $\dim \mathbf{R}^۳$ کمتر از $\dim \mathbf{R}^۴$ است، داریم که $\dim(\operatorname{Im} T)$ کمتر از بعد دامنهٔ $\mathbf{R}^۴$ از T است. درنتیجه هر تبدیل خطی $T: \mathbf{R}^۴ \to \mathbf{R}^۳$ منفرد است.

۲۸-۵ قضیه ۷-۵ را ثابت کنید: فرض کنیم $F: V \to U$ یک تبدیل خطی غیرمنفرد باشد. در این صورت تصویر هر مجموعه مستقل خطی یک مجموعه مستقل خطی است.

فرض کنیم $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$ بردارهای مستقل خطی در V باشند. ادعا می‌کنیم که $F(v_۱), F(v_۲), \ldots, F(v_n)$ نیز مستقل خطی‌اند. فرض کنیم $a_۱F(v_۱) + a_۲F(v_۲) + \cdots + a_nF(v_n) = ۰$، که در آن $a_i \in K$. چون F خطی است، داریم $F(a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + \cdots + a_nv_n) = ۰$: درنتیجه

$$a_۱v_۱ + a_۲v_۲ + \cdots + a_nv_n \in \operatorname{Ker} F$$

مسئله‌های حل شده

نمایش ماتریسی عملگرهای خطی

۶-۱ تبدیل خطی $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ که به‌صورت $F(x, y) = (3x + 4y,\ \ 2x - 5y)$ تعریف می‌شود و پایه‌های زیر از $\mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم:

$$E = \{e_1, e_2\} = \{(1, 0),\ \ (0, 1)\} \quad \text{و} \quad S = \{u_1, u_2\} = \{(1, 2), (2, 3)\}$$

(الف) A، نمایش ماتریسی F نسبت به پایه E را پیدا کنید.

(ب) B، نمایش ماتریسی F نسبت به پایه S را پیدا کنید.

(الف) چون E پایه استاندارد است، سطرهای A همان ضرایب در مؤلفه‌های $F(x, y)$ هستند، یعنی، با استفاده از $(a, b) = ae_1 + be_2$، داریم

$$F(e_1) = F(1, 0) = (3, 2) = 3e_1 + 2e_2$$
$$F(e_2) = F(0, 1) = (4, -5) = 4e_1 - 5e_2$$

و لذا $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

متذکر می‌شویم که ضرایب بردارهای پایه در نمایش ماتریسی به‌صورت ستونی نوشته شده‌اند.

(ب) ابتدا $F(u_1)$ را پیدا می‌کنیم و آن را به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای پایه u_1 و u_2 می‌نویسیم. داریم

$$F(u_1) = F(1, 2) = (11, -8) = x(1, 2) + y(2, 3)$$

و لذا

$$\begin{aligned} x + 2y &= 11 \\ 2x + 3y &= -8 \end{aligned}$$

دستگاه را حل می‌کنیم تا به‌دست آوریم $x = -49$، $y = 30$. بنابراین

$$F(u_1) = -49u_1 + 30u_2$$

اینک $F(u_2)$ را یافته آن را به‌صورت یک ترکیب خطی از بردارهای پایه u_1 و u_2 می‌نویسیم. داریم

$$F(u_2) = F(2, 3) = (18, -11) = x(1, 2) + y(2, 3)$$

و لذا

$$\begin{aligned} x + 2y &= 18 \\ 2x + 3y &= -11 \end{aligned}$$

دستگاه را برای مجهول‌های x و y حل می‌کنیم تا به‌دست آوریم $x = -76$، $y = 47$. در نتیجه

$$F(u_2) = -76u_1 + 47u_2$$

ضرایب u_1 و u_2 را به‌صورت ستونی می‌نویسیم تا به‌دست آوریم $B = \begin{bmatrix} -49 & -76 \\ 30 & 47 \end{bmatrix}$

(ب) متناوباً، می‌توان ابتدا مختصات یک بردار دلخواه (a, b) از $\mathbb{R}^2$ را نسبت به پایه S به‌دست آورد. داریم

$$(a, b) = x(1, 2) + y(2, 3) = (x + 2y,\ \ 2x + 3y)$$

و لذا

$$\begin{aligned} x + 2y &= a \\ 2x + 3y &= b \end{aligned}$$

اگر دستگاه را برای مجهول‌های x و y برحسب a و b حل کنیم به‌دست می‌آوریم $x = -۳a + ۲b$ و $y = ۲a - b$. پس،

$$(a, b) = (-۳a + ۲b)u_۱ + (۲a - b)u_۲$$

سپس فرمول برای (a, b) را برای یافتن مختصات $F(u_۱)$ و $F(u_۲)$ نسبت به پایه S به کار می‌بریم:

$$F(u_۱) = F(۱, ۲) = (۱۱, -۸) = -۴۹u_۱ + ۳۰u_۲$$
$$F(u_۲) = F(۲, ۳) = (۱۸, -۱۱) = -۷۶u_۱ + ۴۷u_۲$$

و لذا $B = \begin{bmatrix} -۴۹ & -۷۶ \\ ۳۰ & ۴۷ \end{bmatrix}$

۲۰۶ G، عملگر خطی زیر روی $R^۲$ و پایه S را در نظر می‌گیریم:

$$G(x, y) = (۲x - ۷y,\ \ ۴x + ۳y) \quad \text{و} \quad S = \{u_۱, u_۲\} = \{(۱, ۳), (۲, ۵)\}$$

(الف) نمایش ماتریسی $[G]_S$ از G نسبت به S را پیدا کنید.

(ب) درستی برابری $[G]_S\,[v]_S = [G(v)]_S$ را برای بردار $v = (۴, -۳)$ از $R^۲$ بررسی کنید.

ابتدا مختصات یک بردار دلخواه $v = (a, b)$ در $R^۲$ را نسبت به پایه S پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}, \quad \text{و لذا} \quad \begin{aligned} x + ۲y &= a \\ ۳x + ۵y &= b \end{aligned}$$

اگر دستگاه را برای مجهول‌های x و y برحسب a و b حل کنیم به‌دست می‌آوریم $x = -۵a + ۲b$، $y = ۳a - b$. در نتیجه،

$$(a, b) = (-۵a + ۲b)u_۱ + (۳a - b)u_۲, \quad \text{و لذا} \quad [v] = [-۵a + ۲b,\ \ ۳a - b]^T$$

(الف) با استفاده از فرمول برای (a, b) و $G(x, y) = (۲x - ۷y,\ \ ۴x + ۳y)$، داریم

$$G(u_۱) = G(۱, ۳) = (-۱۹, ۱۳) = ۱۲۱u_۱ - ۷۰u_۲$$
$$G(u_۲) = G(۲, ۵) = (-۳۱, ۲۳) = ۲۰۱u_۱ - ۱۱۶u_۲$$

و لذا $[G]_S = \begin{bmatrix} ۱۲۱ & ۲۰۱ \\ -۷۰ & -۱۱۶ \end{bmatrix}$

(تأکید می‌کنیم که ضرایب $u_۱$ و $u_۲$ در نمایش ماتریسی به‌صورت ستونی، و نه به‌صورت سطری، نوشته شده‌اند).

(ب) با استفاده از فرمول $(a, b) = (-۵a + ۲b)u_۱ + (۳a - b)u_۲$ به‌دست می‌آوریم

$$v = (۴, -۳) = -۲۶u_۱ + ۱۵u_۲$$
$$G(v) = G(۴, -۳) = (۲۰, ۷) = -۱۳۱u_۱ + ۸۰u_۲$$

و لذا $[v]_S = [-۲۶, ۱۵]^T$ و $[G(v)]_S = [-۱۳۱, ۸۰]^T$

در نتیجه،

$$[G]_S\,[v]_S = \begin{bmatrix} ۱۲۱ & ۲۰۱ \\ -۷۰ & -۱۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۲۶ \\ ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۳۱ \\ ۸۰ \end{bmatrix} = [G(v)]_S$$

(از قضیه ۱-۶ همین نتیجه انتظار می‌رفت).

۳-۶ ماتریس ۲ × ۲ی A و پایه S از $\mathbb{R}^2$ را به شرح زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \{u_1, u_2\} = \left\{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} ۳ \\ -۷ \end{bmatrix}\right\}$$

ماتریس A یک عملگر خطی را روی $\mathbb{R}^2$ تعریف می‌کند. ماتریس B را پیدا کنید که تبدیل خطی A را نسبت به پایه S نمایش می‌دهد.

ابتدا مختصات یک بردار دلخواه $(a, b)^T$ را نسبت به پایه S پیدا می‌کنیم. داریم

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} ۳ \\ -۷ \end{bmatrix} \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} x + ۳y &= a \\ -۲x - ۷y &= b \end{aligned}$$

اگر دستگاه را برای مجهول‌های x و y برحسب a و b حل کنیم، به‌دست می‌آوریم $x = ۷a + ۳b$، $y = -۲a - b$

بنابراین،

$$(a, b)^T = (۷a + ۳b)u_1 + (-۲a - b)u_2$$

سپس با استفاده از فرمول برای $(a, b)^T$ مختصات Au_1 و Au_2 را نسبت به پایه S به‌دست می‌آوریم:

$$Au_1 = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۷ \end{bmatrix} = -۶۳u_1 + ۱۰۹u_2$$

$$Au_2 = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲۲ \\ -۲۷ \end{bmatrix} = -۲۳۵u_1 + ۷۱u_2$$

اگر مختصات‌ها را به‌صورت ستونی بنویسیم، به‌دست می‌آوریم

$$B = \begin{bmatrix} -۶۳ & -۲۳۵ \\ ۱۰۹ & ۷۱ \end{bmatrix}$$

۴-۶ در هر یک از موارد زیر نمایش ماتریسی عملگر F روی $\mathbb{R}^3$ را نسبت به پایه استاندارد $E = [e_1, e_2, e_3]$ از $\mathbb{R}^3$ یعنی، $[F] = [F]_E$ را پیدا کنید.

(الف) F به‌صورت $F(x, y, z) = (x + ۲y - ۳z,\quad ۴x - ۵y - ۶z,\quad ۷x + ۸y + ۹z)$ تعریف می‌شود.

(ب) F توسط ماتریس ۳ × ۳ی $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ تعریف می‌شود.

(ج) F به‌صورت $F(e_1) = (۱, ۳, ۵)$، $F(e_2) = (۲, ۴, ۶)$، $F(e_3) = (۷, ۷, ۷)$ تعریف می‌شود. (قضیه ۵-۲ بیان می‌دارد که یک تبدیل خطی توسط عملش روی بردارهای یک پایه کاملاً تعریف می‌شود).

(الف) چون E پایه استاندارد است، کافی است ضرایب مؤلفه‌های $F(x, y, z)$ را به‌عنوان سطرها بنویسیم:

$$[F] = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۳ \\ ۴ & -۵ & -۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

(ب) چون E پایه استاندارد است، $[F] = A$، خود ماتریس A می‌باشد.

(ج) در اینجا
$$F(e_1) = (1, 3, 5) = e_1 + 3e_2 + 5e_3$$
$$F(e_2) = (2, 4, 6) = 2e_1 + 4e_2 + 6e_3$$
$$F(e_3) = (7, 7, 7) = 7e_1 + 7e_2 + 7e_3$$
و لذا
$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$
یعنی، ستون‌های $[F]$ تصاویر بردارهای پایه استاندارد هستند.

۵.۶ فرض کنید G عملگر خطی روی $\mathbf{R}^3$ باشد که به‌صورت $G(x, y, z) = (2y + z,\ x - 4y,\ 3x)$ تعریف می‌شود.

(الف) نمایش ماتریسی G را نسبت به پایه زیر پیدا کنید.
$$S = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\}$$

(ب) درستی برابری $[G(v)] = [G][v]$ را برای هر بردار v در $\mathbf{R}^3$ بررسی کنید.

ابتدا مختصات یک بردار دلخواه $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ را نسبت به پایه S پیدا می‌کنیم. با استفاده از مجهول‌های اسکالر x، y، و z بردار (a, b, c) را به‌صورت یک ترکیب خطی w_1، w_2، و w_3 می‌نویسیم:
$$(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0) = (x + y + z,\ x + y,\ x)$$
مؤلفه‌های متناظر را با یکدیگر برابر قرار می‌دهیم تا دستگاه معادلات
$$x + y + z = a, \quad x + y = b, \quad x = c$$
را به‌دست آوریم. دستگاه را برای مجهول‌های x، y، z برحسب a، b، c حل می‌کنیم تا به‌دست آوریم $x = c$، $y = b - c$، $z = a - b$. بنابراین،
$$(a, b, c) = cw_1 + (b - c)w_2 + (a - b)w_3, \text{ یا به‌طور معادل } [(a, b, c)] = [c,\ b - c,\ a - b]^T$$

(الف) چون $G(x, y, z) = (2y + z,\ x - 4y,\ 3x)$، داریم،
$$G(w_1) = G(1, 1, 1) = (3, -3, 3) = 3w_1 - 6w_2 + 6w_3$$
$$G(w_2) = G(1, 1, 0) = (2, -3, 3) = 3w_1 - 6w_2 + 5w_3$$
$$G(w_3) = G(1, 0, 0) = (0, 1, 3) = 3w_1 - 2w_2 - w_3$$
مختصات‌های $G(w_1)$، $G(w_2)$، $G(w_3)$ را به‌صورت ستونی می‌نویسیم تا به‌دست آوریم
$$[G] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

(ب) $G(v)$ را به‌صورت یک ترکیب خطی از w_1، w_2، w_3 می‌نویسیم: اگر $v = (a, b, c)$ یک بردار دلخواه در $\mathbf{R}^3$ باشد، آنگاه
$$G(v) = G(a, b, c) = (2b + c,\ a - 4b,\ 3a)$$
$$= 3aw_1 + (-2a - 4b)w_2 + (-a + 6b + c)w_3$$

یا به‌طور معادل،

$$[G(v)] = [3a, \quad -2a - 4b, \quad -a + 6b + c]^T$$

در نتیجه،

$$[G][v] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ -2a - 4b \\ -a + 6b + c \end{bmatrix} = [G(v)]$$

۶-۶ ماتریس 3×3 ی زیر و پایه S از $\mathbf{R}^3$ را در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad S = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

ماتریس A یک عملگر خطی روی $\mathbf{R}^3$ تعریف می‌کند. ماتریس B را پیدا کنید که تبدیل خطی A را نسبت به پایهٔ S نمایش می‌دهد. (یادآوری می‌کنیم که A نمایشگر خودش نسبت به پایهٔ استاندارد $\mathbf{R}^3$ است).

(الف) $\langle u, v\rangle = ۲۳ + ۲۰ = ۴۳$

(ب) $\langle u, v\rangle = ۱\times ۳ - ۱\times ۴ - ۵\times ۳ + ۳\times ۵\times ۴ = ۳ - ۴ - ۱۵ + ۶۰ = ۴۴$

(ج) $\|v\|^۲ = \langle v, v\rangle = \langle (۳, ۴), (۳, ۴)\rangle = ۹ + ۱۶ = ۲۵$؛ لذا $\|v\| = \sqrt{۵}$

(د) $\|v\|^۲ = \langle v, v\rangle = \langle (۳, ۲), (۳, ۴)\rangle = ۹ - ۱۲ - ۱۲ + ۴۸ = ۳۳$، $\|v\| = \sqrt{۳۳}$

۵۰ چندجمله‌ای‌های زیر در $P(t)$ را با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int_۰^۱ f(t)g(t)dt$ در نظر بگیرید.

$f(t) = t + ۲$، $g(t) = ۳t - ۲$ $h(t) = t^۲ - ۲t - ۳$

(الف) $\langle f, g\rangle$ و $\langle f, h\rangle$ را پیدا کنید.

(ب) $\|f\|$ و $\|g\|$ را پیدا کنید.

(ج) f و g را نرمال کنید.

(الف) به‌صورت زیر انتگرال می‌گیریم:

$$\langle f, g\rangle = \int_۰^۱ (t + ۲)(۳t - ۲)dt = \int_۰^۱ (۳t^۲ + ۴t - ۴)dt = \left(t^۳ + ۲t^۲ - ۴t\right)\Big|_۰^۱ = -۱$$

$$\langle f, h\rangle = \int_۰^۱ (t + ۲)(t^۲ - ۲t - ۳)dt = \left(\frac{t^۴}{۴} - \frac{۷t^۲}{۲} - ۶t\right)\Big|_۰^۱ = -\frac{۳۷}{۴}$$

(ب) $\langle f, f\rangle = \int_۰^۱ (t + ۲)(t + ۲)dt = \frac{۱۹}{۳}$؛ و لذا $\|f\| = \sqrt{\frac{۱۹}{۳}} = \frac{۱}{۳}\sqrt{۵۷}$

$\|g\| = \sqrt{۱} = ۱$؛ و لذا $\langle g, g\rangle = \int_۰^۱ (۳t - ۲)(۳t - ۲) = ۱$

فضای بردارهای توابع پیوسته بر

نرمال $f = \hat{f} = \frac{f}{\|f\|} = \frac{t+۲}{\sqrt{۱۹/۳}}$

$\hat{f} = \sqrt{\frac{۳}{۱۹}}\,t + ۲\sqrt{\frac{۳}{۱۹}} \to \|f\| = ۱$

۱۰-۷ k را پیدا کنید طوری که $u = (1, 2, k, 3)$ و $v = (3, k, 7, -5)$ در R^4 متعامد باشند.

ابتدا $\langle u, v \rangle$ را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\langle u; v \rangle = (1, 2, k, 3) \cdot (3, k, 7, -5) = 3 + 2k + 7k - 15 = 9k - 12$$

سپس قرار می‌دهیم $\langle u; v \rangle = 9k - 12 = 0$ تا به‌دست آوریم $k = \frac{4}{3}$.

۱۱-۷ فرض کنید W زیر فضای R^5 پدید آمده توسط $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ و $v = (2, 4, 7, 2, -1)$ باشد. یک پایه برای متکمل متعامد $W^\perp$ از W پیدا کنید.

باید تمام بردارهای $w = (x, y, z, s, t)$ را پیدا کنیم طوری که

$$\langle w, u \rangle = x + 2y + 3z - s + 2t = 0$$
$$\langle w, v \rangle = 2x + 4y + 7z + 2s - t = 0$$

اگر x را از معادله دوم حذف کنیم، دستگاه هم‌ارز

$$x + 2y + 3z - s + 2t = 0$$
$$z + 4s - 5t = 0$$

را به‌دست می‌آوریم. متغیرهای آزاد عبارتند از y، s، و t. بنابراین،

(۱) قرار می‌دهیم $y = 1$، $s = 0$، $t = 0$ تا جواب $w_1 = (2, -1, 0, 0, 0)$ را به‌دست آوریم.

(۲) قرار می‌دهیم $y = 0$، $s = 1$، $t = 0$ تا جواب $w_2 = (13, 0, -4, 1, 0)$ را به‌دست آوریم.

(۳) قرار می‌دهیم $y = 0$، $s = 0$، $t = 1$ تا جواب $w_3 = (-17, 0, 5, 0, 1)$ را به‌دست آوریم.

مجموعه $\{w_1, w_2, w_3\}$ یک پایه برای $W^\perp$ است.

۱۲-۷ فرض کنید $w = (1, 2, 3, 1)$ یک بردار در R^4 باشد. یک پایه متعامد برای $w^\perp$ پیدا کنید.

$$\langle v - cw,\ w\rangle = \langle v, w\rangle - c\langle w, w\rangle = \langle v, w\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle}\langle w, w\rangle = 0$$

۲۰۷ ضریب فوریهٔ c و تصویر $v = (1, -2, 3, -4)$ را در امتداد $w = (1, 2, 1, 2)$ در $\mathbb{R}^4$ پیدا کنید.

داریم $\langle v, w\rangle = 1 - 4 + 3 - 8 = -8$ و $\|w\|^2 = 1 + 4 + 1 + 4 = 10$ در نتیجه

$$c = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5} \quad \text{و} \quad \text{proj}(v, w) = cw = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

۲۰۷-۲۱ زیر فضای U از $\mathbb{R}^4$ که توسط بردارهای

$$v_1 = (1, 1, 1, 1),\quad v_2 = (1, 1, 2, 4),\quad v_3 = (1, 2, -4, -3)$$

پدید می‌آید را در نظر بگیرید. مطلوب است.

(الف) یک پایه متعامد برای U؛ (ب) یک پایه متعامد یکه برای U.

(الف) الگوریتم گرام-اشمیت را به کار می‌بریم. با قرار دادن $w_1 = u = (1,1,1,1)$ شروع می‌کنیم. سپس w_2 محاسبه می‌کنیم.

$$v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 = (1,1,2,4) - \frac{8}{4}(1,1,1,1) = (-1,-1,0,2)$$

قرار می‌دهیم $w_2 = (-1,-1,0,2)$. حال w_3 را محاسبه می‌کنیم

$$v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 = (1,2,-4,-3) - \frac{(-4)}{4}(1,1,1,1) - \frac{(-9)}{6}(-1,-1,0,2)$$

$$= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, -3, 1)$$

با حذف مخرج‌ها به‌دست می‌آوریم $w_3 = (1,3,-6,2)$. در این صورت w_1, w_2, w_3 یک پایه متعامد برای U تشکیل می‌دهند.

(ب) پایه متعامد متشکل از بردارهای w_1, w_2, w_3 را نرمال می‌کنیم.

چون $\|w_1\|^2 = 4$، $\|w_2\|^2 = 6$، و $\|w_3\|^2 = 50$، بردارهای زیر یک پایه متعامد یکه برای U تشکیل می‌دهند:

$$u_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2), \quad u_3 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(1,3,-6,2)$$

۷-۲۲ فضای برداری $P(t)$ با ضرب داخلی $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ را در نظر بگیرید. الگوریتم گرام-اشمیت را روی مجموعه $\{1, t, t^2\}$ به کار برید تا یک مجموعه متعامد $\{f_0, f_1, f_2\}$ با ضرایب صحیح به‌دست آورید.

ابتدا قرار می‌دهیم $f_0 = 1$. سپس f_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = t - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot 1 = t - \frac{1}{2}$$

مخرج‌ها را حذف می‌کنیم تا به‌دست آوریم $f_1 = 2t - 1$. حال f_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}(1) - \frac{\langle t^2, 2t-1\rangle}{\langle 2t-1, 2t-1\rangle}(2t-1) = t^2 - \frac{\frac{1}{3}}{1}(1) - \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}(2t-1) = t^2 - t + \frac{1}{6}$$

مخرج‌ها را حذف می‌کنیم تا به‌دست آوریم $f_2 = 6t^2 - 6t + 1$. پس $\{1, 2t-1, 6t^2-6t+1\}$ مجموعه متعامد یکه مطلوب می‌باشد.

۷-۲۳ فرض کنید $v = (1,3,5,7)$. تصویر v را روی W پیدا کنید یا، به عبارت دیگر، $w \in W$ را پیدا کنید طوری که $\|v - w\|$ را کمینه کند، جایی که W زیر فضای $\mathbf{R}^4$ پدید آمده توسط بردارهای زیر باشد.

(الف) $u_1 = (1,1,1,1)$ و $u_2 = (1,-3,4,-2)$

(ب) $v_1 = (1,1,1,1)$ و $v_2 = (1,2,3,2)$

(ب) $f(A) = A^2 - 6A + 13I = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 24 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -24 & -30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

[پس، A یک ریشه از $f(t)$ است].

۹-۲ چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ از هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید:

(الف) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$، (ب) $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$، (ج) $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$

از فرمول $\Delta(t) = t^2 - \text{tr}(M) + |M|$ برای یک ماتریس 2×2ی M استفاده می‌کنیم.

(الف) $\text{tr}(A) = 2 + 1 = 3$، $|A| = 2 - 20 = -18$، لذا $\Delta(t) = t^2 - 3t - 18$

(ب) $\text{tr}(B) = 7 - 2 = 5$، $|B| = -14 + 15 = 1$، لذا $\Delta(t) = t^2 - 5t + 1$

(ج) $\text{tr}(C) = 3 - 3 = 0$، $|C| = -9 + 18 = 9$، لذا $\Delta(t) = t^2 + 9$

۹-۳ چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ از هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

(الف) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix}$، (ب) $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

از فرمول $\Delta(t) = t^3 - \text{tr}(A)t^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})t - |A|$، که در آن A_{ii} همسازه a_{ii} در ماتریس 3×3. $A = [a_{ij}]$ می‌باشد، استفاده می‌کنیم.

(الف) $\text{tr}(A) = 1 + 0 + 5 = 6$،

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -16 \quad ، A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -13 \quad ، A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = -35 \quad \text{و} \quad |A| = 48 + 36 - 16 - 30 = 38$$

درنتیجه، $\Delta(t) = t^3 - 6t^2 - 35t - 38$

(ب) $\text{tr}(B) = 1 + 2 - 4 = -1$،

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 \quad ، B_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \quad ، B_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 20$$

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = 8 \quad \text{و} \quad |B| = -8 + 18 - 72 = -62$$

درنتیجه، $\Delta(t) = t^3 + t^2 + 8t + 62$

$$\Delta(t) = \Delta_{A_1}(t)\Delta_{A_2}(t) = (t^2 - 6t + 3)(t^2 - 9t + 28)$$ است. بنابراین

(ب) چون B مثلثی است، داریم $\Delta(t) = (t-1)(t-3)(t-5)(t-6)$

۹-۵ چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ از عملگرهای خطی زیر را پیدا کنید:

(الف) $F: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ که به‌صورت $F(x, y) = (3x + 5y,\ 2x - 7y)$ تعریف می‌شود.

(ب) $D: V \to V$ که به‌صورت $D(f) = df/dt$، تعریف می‌شود، جایی که V فضای توابع با پایه $S = \{\sin t, \cos t\}$ است.

چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ از یک عملگر خطی برابر چندجمله‌ای ویژه هر ماتریس A است که آن عملگر خطی را نمایش می‌دهد.

(الف) ماتریس A را پیدا می‌کنیم که T را نسبت به پایه استاندارد $\mathbf{R}^2$ نمایش می‌دهد. داریم

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{لذا} \quad \Delta(t) = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + |A| = t^2 + 4t - 31$$

(ب) ماتریس A را پیدا می‌کنیم که عملگر مشتق‌گیری D را نسبت به پایه S نمایش می‌دهد. داریم

$$D(\sin t) = \cos t = 0(\sin t) + 1(\cos t)$$
$$D(\cos t) = -\sin t = -1(\sin t) + 0(\cos t)$$

و لذا $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

بنابراین، $\Delta(t) = t^2 - \operatorname{tr}(A) + |A| = t^2 + 1$

را به‌دست می‌آوریم. دستگاه دارای تنها یک متغیر آزاد است، و $v_2 = (1, 2)$ یک جواب غیر صفر می‌باشد.
پس $v_2 = (1, 2)$ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda = 5$ است.

(ب) فرض کنیم P ماتریسی باشد که ستون‌هایش v_1 و v_2 هستند. در این صورت

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

توجه داریم که D ماتریس قطری است که درآیه‌های قطرش مقادیر ویژه A متناظر با بردارهای ویژه ظاهر شده در P هستند.

تذکر: در اینجا P ماتریس تغییر-پایه از پایه استاندارد $\mathbf{R}^2$ به پایه $S = \{v_1, v_2\}$ است، و D ماتریسی است که (تابع ماتریسی) A را نسبت به پایه جدید S نمایش می‌دهد.

۱۰-۹ فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(الف) تمامی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظرشان را پیدا کنید.
(ب) یک ماتریس غیرمنفرد P پیدا کنید طوری که $D = P^{-1}AP$ قطری باشد.
(ج) A^6 و $f(A)$ را پیدا کنید اگر $f(t) = t^4 - 3t^3 - 6t^2 + 7t + 3$.
(د) یک "ریشه سوم حقیقی" از A را پیدا کنید— یعنی، یک ماتریس B پیدا کنید طوری که $B^3 = A$ و B دارای مقادیر ویژه حقیقی باشد.

(الف) ابتدا چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ از A را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta(t) = t^2 - \operatorname{tr}(A)t + |A| = t^2 - 5t + 4 = (t - 1)(t - 4)$$

ریشه‌های $\lambda = 1$ و $\lambda = 4$ از $\Delta(t)$ مقادیر ویژه A هستند. بردارهای ویژه متناظر با آنها را پیدا می‌کنیم.

(i) اگر $\lambda = 1$ را از درآیه‌های قطری A کم کنیم ماتریس $M = A - \lambda I$ را به‌دست می‌آوریم، که دستگاه همگن متناظرش $MX = 0$ بردارهای ویژه متناظر با $\lambda = 1$ را به‌دست می‌دهد داریم

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}، \quad \text{و دستگاه همگن متناظرش} \quad \begin{matrix} x + 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{matrix} \quad \text{یا} \quad x + 2y = 0$$

است. دستگاه دارای تنها یک جواب مستقل است؛ مثلاً $x = -1$، $y = 2$. پس، $v_1 = (-1, 2)$ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda = 1$ است (و فضای ویژه متناظر با $\lambda = 1$ را پدید می‌آورد).

(ii) اگر $\lambda = 4$ را از درآیه‌های قطری A کم کنیم به‌دست آوریم

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{که متناظر با دستگاه همگن} \quad \begin{matrix} -2x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{matrix} \quad \text{یا} \quad x - y = 0$$

است. دستگاه دارای تنها یک جواب مستقل است؛ مثلاً $x = 1$، $y = 1$. بنابراین $v_2 = (1, 1)$ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda = 4$ است.

(ب) فرض کنیم P ماتریسی باشد که ستون‌هایش v_1 و v_2 هستند. در این صورت

$$P = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}، \quad \text{که در آن} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix}$$

(ج) با استفاده از تجزیه قطری $A = PDP^{-1}$ و $۱^۶ = ۱$ و $۴۰۹۶ = ۴^۶$ به‌دست می‌آوریم

$$A^۶ = PD^۶P^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۴۰۹۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۳۶۶ & ۲۲۳۰ \\ ۱۳۶۵ & ۲۷۳۱ \end{bmatrix}$$

همچنین، $f(۱) = ۲$، $f(۴) = -۱$. در نتیجه،

$$f(A) = Pf(D)P^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

(د) در اینجا $\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \sqrt[۳]{۴} \end{bmatrix}$ یک ریشه سوم از D است. لذا ریشه سوم حقیقی A عبارت است از

$$B = P\sqrt[۳]{D}P^{-1} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \sqrt[۳]{۴} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} ۲+\sqrt[۳]{۴} & -۲+۲\sqrt[۳]{۴} \\ -۱+\sqrt[۳]{۴} & ۱+۲\sqrt[۳]{۴} \end{bmatrix}$$

... x و y نوشت. یعنی،

$$t = \frac{-x + 3t}{\sqrt{10}} \quad ،s = \frac{3x + y}{\sqrt{10}}$$

چندجمله‌ای کمین

۹-۲۷ فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. چندجمله‌ای ویژه هر دو ماتریس عبارت است از $\Delta(t) = (t-2)(t-2)^2$. چندجمله‌ای کمین هر یک از این ماتریس‌ها را پیدا کنید.

چندجمله‌ای کمین $m(t)$ چندجمله‌ای ویژه $\Delta(t)$ را می‌شمارد. همچنین، هر عامل از $\Delta(t)$ (یعنی، $t-2$ و $t-1$) می‌بایستی عاملی از $m(t)$ نیز باشد. پس، $m(t)$ می‌بایستی دقیقاً یکی از چندجمله‌ای‌های زیر باشد:

$$f(t) = (t-2)(t-1) \quad \text{یا} \quad g(t) = (t-2)(t-1)^2$$

(الف) بنابر قضیه کیلی-همیلتون، $g(A) = \Delta(A) = 0$، می‌بایستی $f(t)$ را امتحان کنیم. داریم

$$f(A) = (A-2I)(A-I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 6 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس، $m(t) = f(t) = (t-2)(t-1) = t^2 - 3t + 2$ چندجمله‌ای کمین A است.

(ب) دوباره $g(B) = \Delta(B) = 0$، لذا می‌بایستی $f(t)$ را امتحان کنیم. داریم

$$f(B) = (B-2I)(B-I) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \neq 0$$

که لازم بست $g(B)$ را محاسبه کنیم. [illegible]

۲۸-۹ چندجمله‌ای کمین هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید:

$$\text{(الف) } A=\begin{bmatrix}۵ & ۱\\ ۳ & ۷\end{bmatrix}, \quad \text{(ب) } B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۲ & ۳\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}, \quad \text{(ج) } C=\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

(الف) چندجمله‌ای ویژه A عبارت است از $\Delta(t)=t^۲-۱۲t+۳۲=(t-۴)(t-۸)$. چون $\Delta(t)$ دارای عوامل متمایز است، چندجمله‌ای کمین A عبارت است از $m(t)=\Delta(t)=t^۲-۱۲t+۳۲$.

(ب) چون B مثلثی است، مقادیر ویژه‌اش درآیه‌های قطری ۱، ۲، ۳ هستند؛ و لذا چندجمله‌ای ویژه‌اش $\Delta(t)=(t-۱)(t-۲)(t-۳)$ است. چون $\Delta(t)$ دارای عوامل متمایز است، داریم $m(t)=\Delta(t)$ چندجمله‌ای کمین B است.

(ج) چندجمله‌ای ویژه C عبارت است از $\Delta(t)=t^۲-۶t+۹=(t-۳)^۲$. در نتیجه چندجمله‌ای کمین C عبارت است از $f(t)=t-۳$ یا $g(t)=(t-۳)^۲$. ولی، $f(C)\neq ۰$؛ یعنی $C-۳I\neq ۰$. لذا چندجمله‌ای کمین C عبارت است از:

$$m(t)=g(t)=\Delta(t)=(t-۳)^۲$$

۲۹-۹ فرض کنید $S=\{u_۱,u_۲,\dots,u_n\}$ یک پایه برای V باشد، و فرض کنید F و G عملگرهای خطی روی V باشند به‌طوری که $[F]$ دارای درآیه ۰ روی قطر و زیر قطرش می‌باشد، و $[G]$ دارای درآیه $a\neq ۰$ روی ابر قطرش است و دیگر درآیه‌هایش ۰ است — یعنی،

$$[G]=\begin{bmatrix}۰ & a & ۰ & \cdots & ۰\\ ۰ & ۰ & a & \cdots & ۰\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & a\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad [F]=\begin{bmatrix}۰ & a_{۲۱} & a_{۳۱} & \cdots & a_{n۱}\\ ۰ & ۰ & a_{۳۲} & \cdots & a_{n۲}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a_{n,n-۱}\\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰\end{bmatrix}$$

نشان دهید که (الف) $F^n=۰$، (ب) $G^{n-۱}\neq ۰$، ولی $G^n=۰$. (این شرایط برای $[F]$ و $[G]$ نیز برقرارند.)

(الف) داریم $F(u_۱)=۰$ و، برای $r>۱$، $F(u_r)$ یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از u_r در S است، یعنی،

$$F(u_r)=a_{r۱}u_۱+a_{r۲}u_۲+\cdots+a_{r,r-۱}u_{r-۱}$$

از این‌رو $F^۲(u_r)=F(F(u_r))$ یک ترکیب خطی از بردارهای قبل از $u_{r-۱}$ است، و در نتیجه برای هر r، $F^r(u_r)=۰$. پس، برای هر r، $F^n(u_r)=F^{n-r}(۰)=۰$ و همان‌طور که ادعا شده بود $F^n=۰$.

(ب) داریم $G(u_۱)=۰$ و، برای هر $k>۱$، $G(u_k)=au_{k-۱}$. لذا برای هر $r<k$، $G^r(u_k)=a^ru_{k-r}$. چون $a\neq ۰$ داریم $a^{n-۱}\neq ۰$. بنابراین، $G^{n-۱}(u_n)=a^{n-۱}u_۱\neq ۰$، و لذا $G^{n-۱}\neq ۰$. از طرف دیگر، بنابر (الف)، $G^n=۰$.