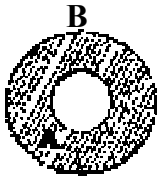
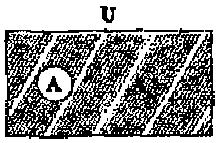
۶) $\begin{cases} A-A=\phi \\ A-\phi=A \end{cases}$

۷) $A\subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A-B=\phi \\ B-A= \text{قسمت سایه خورده} \end{cases}$





متمم یک مجموعه $U-A=A': (A')$

نتایج:

۱) $A=A'$

۲) $\phi'=U, U'=\phi$

۳) $A=B \Leftrightarrow A'=B'$

۴) $A-B=A\cap B'$

۵) $A\Rightarrow A\subset B'$ و B دو مجموعه از هم جدا

۶) $(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$ قضیه دمورگان

۷) $A\subset B \Rightarrow B'\subset A'$

۸) $A\cap A'=\phi, A\cup A'=U$

۹) $A\subset B \Rightarrow A\cap B'=\phi, A'\cup B=U$

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$

$A-(A\cap B)=A-B$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$(B\cup C)-A=(B-A)\cup(C-A)$

$(B\cap C)-A=(B-A)\cap(C-A)$

$A-B=B-A \Leftrightarrow A=B$

تعریف حاصلضرب دکارتی:

$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$

$A\times A=A^2 \Rightarrow R\times R=R^2$

نتایج:

۱) $A\times B\neq B\times A$

۲) $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$

۳) $A\times\phi=\phi\times A=\phi$

۴) $\left.\begin{matrix} A\subset B \\ C\subset D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\times C\subset B\times D$

۵) $\left.\begin{matrix} A=B \\ C=D \end{matrix}\right\} \Rightarrow A\times C=B\times D$

۶) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

۷) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

۸) $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

۹) $(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$

۱۰) $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)^2$

۱۱) $n(A\times B)=n(A)n(B)$

۱۲) $n[(A\times B)\cup(B\times A)]=2n(A)n(B)-n[(A\cap B)^2]$

۱۳) $n(A^2-B^2)=n(A)^2-n[(A\cap B)^2]$

رابطه (R): هر زیر مجموعه از $A\times B$ رابطه‌ای از A به B است.
اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی و B، m عضوی باشد آنگاه:
۱- $A\times B$ دارای $n\times m$ عضو است.
۲- تعداد رابطه‌ها از A به B: $2^{n\times m}$

۳- تعداد رابطه‌های تعریف شده روی: A : 2^{n^2}

ویژگیهای رابطه: فرض کنید A مجموعه‌ای غیر تهی و R رابطه‌ای روی a باشد.

۱) $\forall a\in A \Rightarrow aRa$ بازتابی

۲) $aRb \Rightarrow bRa$ تقارنی

۳) $\begin{cases} aRb \not\Rightarrow bRa \\ aRb, bRa \Rightarrow a=b \end{cases}$ پادتقارنی

۴) $aRb \ , bRC \Rightarrow aRC$ ترایایی

هم ارزی: رابطه دارای خواص بازتابی، تقارنی، ترایایی

ترتیب: رابطه دارای خواص بازتابی، پادتقارنی، ترایایی

نکته۱: اگر R_1 و R_2 متقارن باشند آنگاه:

$R_1-R_2, R_2-R_1, R_1\cap R_2, R_1\cup R_2$ متقارن هستند.

نکته۲: اگر R_1 و R_2 بازتابی $R_1\cup R_2$ و $R_1\cap R_2$ بازتابی

ولی R_1-R_2, R_2-R_1 بازتابی نیست.

نکته۳: R_1 و R_2 تراگذاری آنگاه $R_1\cap R_2$ تراگذاری و $R_1\cup R_2$ و R_1-R_2 و R_2-R_1 تراگذاری نیست.

وارون رابطه (R^{-1}): از تعویض مؤلفه‌های اول و دوم رابطه R به دست می‌آید.

$R^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in R\}$

$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

$(R_1\cap R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cap R_2^{-1}$

$(R_1-R_2)^{-1}=R_1^{-1}-R_2^{-1}$

تعریف افراز: $A\neq\phi$ و A به n زیر مجموعه A_1 و A_2 و... A_n افراز شده است اگر: الف- برای هر $1\le i\le n$ $A_i\neq\phi$

ب-برای هر $i\neq j$ $A_i\cap A_j=\phi$

ج- $A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A$

هر رابطه هم‌ارزی روی یک مجموعه آن مجموعه را به زیر مجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند. دسته هم‌ارزی a را با $[a]$ نمایش می‌دهیم.

$[a]=\{x\mid xRa\}$

- $A=\{a,b,c,d\}$ چند افراز دارد؟

۱=افراز به زیر مجموعه‌های یک عضوی

افراز به یک سه عضوی و یک تک عضوی $=\binom{۴}{۳}=۴$

کل افراز $=۱+۴+۳+۶=۱۴$ افراز به دو زیر مجموعه‌ی دو عضوی $=\frac{۱}{۲}\binom{۴}{۲}=۳$

افراز به یک دو عضوی و دو یک عضوی $=\binom{۴}{۲}=۶$

گراف متناظر با رابطه

اگر A یک مجموعه‌ی متناهی و R یک رابطه روی A باشد، به R گراف جهت‌دار G را به صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأسهای G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb

تعیین ویژگی‌های رابطه با گراف جهت‌دار:

۱- بازتابی: گراف جهت‌دار در هر رأس دارای یک طوقه باشد.

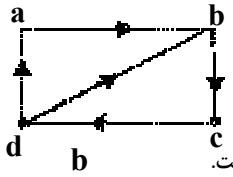
۲- متقارن: اگر از a به b یالی وجود دارد، از b به a نیز یالی وجود داشته باشد.

۳–پادتقارنی: اگر از a به b یالی وجود دارد، از b به a یالی وجود نداشته باشد.

۴– ترایایی: اگر از a به b و b به c یالی وجود دارد، از a به c نیز یالی وجود داشته باشد.

- آیا رابطه متناظر با گراف‌های زیر روی مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d\}$ ترایایی است ولی متقارن نیست؟

ترایایی و متقارن نیست $bRc,cRd,\Rightarrow bRd$

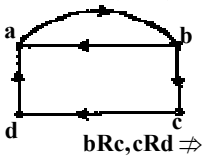


ترایایی است و متقارن نیست.

$bRc,cRd \Rightarrow bRd$



ترایایی و متقارن نیست $bRc,cRd,\Rightarrow bRd$



ترایایی و متقارن نیست $bRc,cRd \Rightarrow bRd$



تعیین ویژگی‌های رابطه از روی ماتریس:

۱– بازتابی $I_n \ll M$

۲– تقارنی $M = M^T$

۳–ترایایی $M^2 \ll M$

۴–پاد تقارنی $M \wedge M^T \ll I_n$ ($\wedge$ ضرب نظیر به نظیر در درایه‌ها)

اگر A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد و R رابطه‌ای روی آن آنگاه:

۱– تعداد روابط بازتابی: 2^{n^2-n}

۲– تعداد روابط تقارنی: $2^{\frac{n^2+n}{2}} = 2^{\frac{n^2-n}{2}} \times 2^n$

۳–تعداد روابط پادتقارنی: $2^{\frac{n^2-n}{2}} \times 3^n$

۴– تعداد روابط تقارنی و بازتابی: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

۶– تعداد روابط تقارنی و پادتقارنی: 2^n

۷–تعداد روابط تقارنی پادتقارنی و بازتابی: ۱ که همان ماتریس I_n می‌باشد.

نکاتی برای حل مسائل به شیوه‌ی تحلیلی:

۱- برای آنکه رابطه بازتابی باشد کلیه درایه‌های قطر اصلی باید ۱ باشد.

۲-برای تقارنی بودن هر زوج خانه‌ای که روی قطر اصلی قرار ندارند و نسبت به آن متساوی‌الفاصله هستند می‌توانند زوج مرتب‌های (۱،۰)و(۰،۰) را اختیار کنند.

۳-برای پادتقارنی بودن هر زوج خانه‌ای که روی قطر اصلی قرار ندارد و نسبت به آن متساوی‌الفاصله هستند می‌توانند زوج‌های مرتب‌های (۱،۰)و(۰،۱)،(۰،۰) را اختیار کنند.

اصول شمول و عدم شمول (۱)

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

- چند عدد طبیعی سه رقمی و اول نسبت به ۶۰ وجود دارد؟

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

برای آنکه عدد نسبت به ۶۰ اول باشد باید بر ۲و ۳و ۵ بخش‌پذیر نباشد یعنی تعداد اعداد اول نسبت به $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$ با تعداد اعداد اول نسبت به $5 \times 3 \times 2 = 30$ برابر است.

A_1 و A_2 A_3 به ترتیب مجموعه سه رقمی‌های مضرب ۲،۳و۵:

$$|A_1| = [\frac{900}{2}] = 450 \quad |A_1| = [\frac{900}{3}] = 300 \quad |A_2| = [\frac{900}{5}] = 180$$

$$|A_1 \cap A_2| = [\frac{900}{6}] = 150 \qquad |A_1 \cap A_3| = [\frac{900}{10}] = 90$$

$$[A_2 \cap A_3] = [\frac{900}{15}] = 60 \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [\frac{900}{30}] = 30$$

$$\overline{|A_1 \cap A_2 \cup A_3|} = 900 - 450 - 300 - 180 + 150 + 90 + 60 - 30 = 240$$

نکته۱: تعداد توابع از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: n^m تعداد کل توابع $= 3^4 = 81$

فرض می‌کنیم: $A=\{1,2,3,4\}, B=\{1,2,3\}$ و A_i مجموعه توابعی است که از A به $B-\{i\}$ تعریف نشده باشند.

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4$$

$$\overline{|A_1 \cup A_2 \cup A_3|} = |s| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3^4 - 3 \times 2^4 + 3 \times 1 - 0 = 36$$

نکته ۲: تعداد توابع پوشا از مجموعه m عضوی B به n عضوی A با شرط $n \le m$.

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}1^m$$

نکته ۳: تعداد تابع‌های پوشا و یک به یک روی مجموعه‌ی n عضوی A برابر است با: $n!$

معادله سیاله (۱)

توزیع n شی در k جبهه:

اگر k جعبه داشته باشیم و بخواهیم n شی را داخل جعبه‌ها قرار دهیم به طوری که امکان خالی بودن بعضی از جعبه‌ها وجود داشته باشد تمام حالات ممکن عبارت است از: $N = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$

تذکر: $n \in N$ $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k}$

تذکر: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر است با: $\binom{n-1}{k-1}$

حال به بررسی انواع مسائل مختلف در این مورد می‌پردازیم:

نوع ۱: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ به طوری که $0 \le x_i \le 2$ باشد. $i \in \{1,2,3\}$

$$|s|=\binom{3+4-1}{4}=15$$

تعداد جوابهایی که در محدوده‌ی $0\le x_i\le 2$ نیستند را بدست می‌آوریم:

$$A_i=\{x_i\ge 3\}\quad A_1=\{x_1\ge 3\}\Rightarrow x_1=y_1+3$$

$$\Rightarrow y_1+x_2+x_3=1\Rightarrow |A_1|=\binom{3}{1}\ \text{و}\ |A_2|=|A_3|=3$$

$$|A_1\cap A_2|=|A_1\cap A_3|=|A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$$

تعداد جوابها $=15-3-3-3+0+0+0-0=6$

نوع ۲: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ با شرط $x_1>3, x_2\ge 4$

$$\left.\begin{array}{l} x_1\ge 4\Rightarrow y_1+4\ge 4\Rightarrow y_1\ge 0\\ x_2\ge 4\Rightarrow y_2+4\ge 4\Rightarrow y_2\ge 0\end{array}\right\}\qquad \binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}=35$$

$$\Rightarrow y_1+y_2+x_3+x_4=4$$

نوع ۲: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3=14$ به طوری که $1\le x_i\le 5$ باشد؟ $(i=1,2,3,4)$

$$x_i=y_i+1\Rightarrow 0\le y_i\le 4, y_1+y_2+y_3=11$$

$$0\le \underbrace{4-y_i}_{z_i}\le 4\Rightarrow Z_i\le 4, y_i=4-z_i$$

$$4-z_1+4-z_2+4-z_3=11\Rightarrow z_1+z_2+z_3=1, 0\le z_i\le 4$$

تعداد جوابها $=\binom{1+3-1}{1}=3$

نوع ۳: نامعادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 9$ دارای چند جواب صحیح نامنفی می‌باشد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 9\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=9-y$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+y=9\qquad \binom{9+6+1}{9}=\binom{14}{9}=\binom{14}{5}$$

نوع ۴: نامعادله $x_1+x_2+x_3+x_4<7$ دارای چند جواب صحیح نامنفی می‌باشد؟

$$x_1+x_2+x_3+x_4\le 6\Rightarrow x_1+x_2+x_3+x_4=6-y\Rightarrow \binom{10}{6}$$

از تجزیه‌ی عدد طبیعی n به عوامل اول $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}....p_k^{\alpha_k}$ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n که نسبت n اولند:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})=...(1-\frac{1}{p_k})$$

نکته ۱: اگر n عدد اول باشد $\varphi_{(n)}=n-1$

نکته ۲: اگر $n=P_1P_2...P_k$ آنگاه

$$\varphi_{(n)}=(P_1-1)(P_2-1)...(P_k-1)$$

نکته ۳: $(m,n)=1\Rightarrow \varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)$

نکته ۴: m و $2n$ عدد طبیعی به طوری که تمام عوامل عدد m یک شمارنده n نیز باشند آنگاه $\varphi(mn)=m\varphi(n)$

اصل ضرب

اصل ضرب: اگر عملی به n_1 طریق، عمل دومی به n_2 طریق و...عمل kامی به n_k طریق صورت پذیرد، این k عمل با هم به $n_1,n_2,...n_k$ طریق صورت می‌گیرد.

جایگشت

فرض کنید n شی متمایز داریم. هر یک از حالات کنار هم قرار گرفتن n شی را یک جایگشت از آن n شی می‌نامیم. تعداد جایگشت‌های، n شی متمایز برابر با $n!$ است و با P_n نشان داده می‌شود.

$$P_n=n!$$

نکته (۱): جایگشت روی دایره (n شی متمایز): $(n-1)!$ حالت

m نفر به چند حالت می‌توانند دور یک میز گرد بنشینند به طوری که دوم شخص a و b کنار هم باشند؟

a و b را یک نفر در نظر می‌گیریم پس $(m-2)!$ حالت وجود دارد و ۲ نفر a و b نیز به $2!$ طریق جابه‌جا می‌شوند پس کل حالات برابر $2(m-2)!$ می‌شود.

جایگشت تکراری: هرگاه n شی که در آن r_1,r_2,r_3 شی تکراری باشد و بخواهیم در یک ردیف کنار هم قرار دهیم از فرمول $\frac{n!}{r_1!\times r_2!\times r_3!}$ استفاده می‌کنیم.

تذکر: اگر n شی را بخواهیم در k جعبه توزیع کنیم به طوری که در جعبه اول n_1 شی و در جعبه دوم n_2 شی و... در جعبه kام n_k شی باشد آنگاه:

$$N=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times ...\times n_k!}$$

ترکیب

هرگاه در انتخاب r شی از n شی ترتیب آنها مهم نباشد از ترکیب استفاده می‌کنیم.

$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!}$$

- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب از ۷ کتاب سال سوم و ۳ کتاب از ۵ کتاب سال چهارم را یک در میان در قفسه کتاب چیند؟

$$\binom{7}{4}\times 4!+\binom{5}{3}\times 3!$$

خواص عمل ترکیب:

$$1-\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

$$2-\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$$ قانون پاسکال:

$$3-\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$$

$$4-\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$$

فضای نمونه‌ای (S): پیوسته / گسسته

گسسته: مجموعه‌ای متناهی و یا نامتناهی ولی قابل شمارش.

پیوسته: مجموعه‌ای نامتناهی و غیرقابل شمارش و قابل اندازه‌گیری به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی یا مساحت اشکال و احجام هندسی.

پیشامد و عملیات بر روی آن

پیشامد: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای s را یک پیشامد می‌گویند.

۱) ϕ: پیشامد غیر ممکن

۲) s: پیشامد حتمی

۳) $A\cap B$: هم A و هم B رخ دهد.

۴) $A\cup B$: حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

۵) $A\cap A'$ رخ ندهد.

۶) $A-B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد که معادل $A\cap B'$ است.

دو پیشامد ناسازگار: A و B را ناسازگار گویند هرگاه $A\cap B=\phi$

- پیشامدهای A و B و C از فضای نمونه‌ای یک آزمایش مفروضند، آنگاه داریم:

الف) $A\cap B'\cap C'$ فقط پیشامد A رخ دهد.

ب) $A\cup B\cup C$ حداقل یکی از پیشامدها رخ دهد.

ج) $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$ حداقل دو تا از پیشامدها رخ دهد.

د) $(A\cap B'\cap C')\cup(B\cap A'\cap C')\cup(C\cap A'\cap B')$ تنها یکی از پیشامدها رخ دهد.

ه) $A'\cap B'\cap C'=(A\cup B\cup C)'$ هیچیک از پیشامدها رخ ندهد.

و) $(A\cap B\cap C)'$ حداکثر دو پیشامد رخ دهد.

ز) $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$ تنها یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد.

قوانین احتمال

۱) $0\le P(A)\le 1$

۲) $P(\phi)=0$

۳) $p(S)=1$

۴) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۵) اگر A و B ناسازگار باشند: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

۶) $P(A')=1-P(A)$

۷) $P(A-B)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

۸) اگر $A\subseteq B$ آنگاه:

الف) $P(A)\le P(B)$ ب) $P(B-A)=P(B)-P(A)$

۹)

$$P(A\cap B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$
$$=2P(A\cup B)-P(A)-P(B)$$

۱۰) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

پیشامدهای مستقل وابسته

تعریف دوپیشامد مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گویند هرگاه رخ دادن پیشامد A تأثیری در رخ دادن پیشامد B نداشته باشد یعنی:

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

در غیر این صورت دو پیشامد را وابسته گویند:

$$P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$$

نکته ۱: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A و B' نیز مستقل هستند.

نکته ۲: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A' و B نیز مستقل هستند.

نکته ۳: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه A' و B' نیز مستقل هستند.

- A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند و $P(A).P(B)+P(A'\cup B')=1$ آنگاه دو پیشامد A و B نسبت به هم مستقلند.

$$P(A).P(B)+P(A\cap B)'=1\Rightarrow$$
$$P(A).P(B)+1-P(A\cap B)=1\Rightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)$$

دو پیشامد مستقل هستند.

احتمال در فضای گسسته هم شانس

ظرفی شامل ۴ مهره‌ی قرمز و ۵ مهره‌ی سفید است از این ظرف ۳ مهره را با هم به تصادف خارج می‌کنیم مطلوبست احتمال: A دو مهره سفید و یک مهره قرمز باشد: B هر سه مهره همرنگ نباشد.

$P(B)=1-$ (هر سه مهره همرنگ باشد)

$$p(A)=\frac{m(A)}{n(s)}=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84}$$

$$=1-\frac{\binom{5}{3}+\binom{4}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{5}{6}$$

احتمال در فضای گسسته غیر هم‌شانس

هرگاه $s=\{e_1,e_2,....,e_n\}$ یک فضای نمونه‌ای باشد، اگر $p(e_i)$ احتمال وقوع پیشامد ساده e_i باشد آنگاه:

۱) $p(e_i)\ge 0$

۲) $p(e_1)+p(e_2)+...+p(e_n)=1$

احتمال دو جمله‌ای

در پرتاب n سکه احتمال k بار رو آمدن و یا در n مورد به دنیا آمدن نوزاد، احتمال به دنیا آمدن k پسر یا k دختر برابر است با:

$$p\ (\text{رو}\ k\ \text{آمدن})=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

نکته: توان a و b تعداد دفعات رو و پشت را نشان می‌دهد.

$3a^2b=3(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$ = احتمال دوبار رو بیاید.

احتمال در فضای پیوسته

در فضای پیوسته سه نوع فضای نمونه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- فضای نمونه‌ای طولی $p(A)=\frac{L(A)}{L(s)}=\frac{\text{طول}A}{\text{طول}S}$

۲- فضای نمونه‌ای سطحی $p(A)=\frac{S(A)}{S(S)}=\frac{\text{مساحت}A}{\text{مساحت}S}$

۳- فضای نمونه‌ای حجمی $p(A)=\frac{V(A)}{V(S)}=\frac{\text{حجمی}A}{\text{حجمی}S}$

احتمال شرطی و احتمال

احتمال شرطی:

$$p(A\mid B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

قانون ضرب احتمالات:

$$p(A\cap B)=p(B).p(A\mid B)$$
$$p(A\cap B)=p(A).p(B\mid A)$$

قانون احتمال کل:

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i).P(A\mid B_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A\cap B_i)$$

نکته ۱:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)p(B\mid A)p(C\mid A\cap B)$$

قاعده بیز:

$$p(A\mid B)=\frac{p(A).p(B\mid A)}{p(B)}$$

مثال: هرگاه داشته باشیم $p(A)=\frac{1}{4}$ و $p(A\mid B)=\frac{3}{7}$ و $p(B\mid A)=\frac{1}{5}$ آنگاه $p(B)$ کدام است؟

$$p(B)p(A\mid B)=p(A)p(B\mid A)\Rightarrow p(B)\times\frac{3}{7}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\Rightarrow p(B)=\frac{7}{60}$$