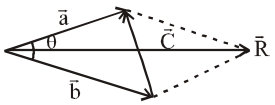
بردار

برآیند و تفاضل دو بردار بر اساس زاویه و بزرگی دو بردار

اندازه‌ی برآیند و تفاضل دو بردار: هنگامی که اندازه‌ی دو بردار و زاویه‌ی بین دو بردار داده می‌شود از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم.



$$(\text{برآیند})\ \vec{R}=\vec{a}+\vec{b}\Rightarrow|\vec{R}|=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\theta}$$

$$(\text{تفاضل})\ \vec{C}=\vec{a}-\vec{b}\Rightarrow|\vec{C}|=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

حالت خاص (۱): اگر دو بردار هم اندازه باشند داریم:

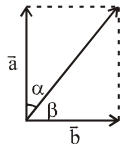
$$|\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow\begin{cases}|\vec{R}|=2a\cos\dfrac{\theta}{2}\\ |\vec{C}|=2a\sin\dfrac{\theta}{2}\end{cases}$$

* در حالت فوق بردار برآیند بر بردار تفاضل عمود است. (مانند قطرهای لوزی)

حالت خاص (۲): اگر دو بردار عمود باشند داریم:

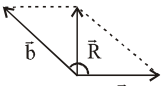
$$|\vec{C}|=|\vec{R}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

* در این حالت بردارهای برآیند و تفاضل هم‌اندازه‌اند (مانند قطرهای مستطیل) همواره بردار (برآیند) با بردار بزرگ‌تر زاویه‌ی کوچک‌تر می‌سازد.



اگر $|\vec{a}|\geq|\vec{b}|\Rightarrow\alpha\leq\beta$

در حالتی که بردار برآیند بر یکی از بردارها عمود است. زاویه‌ی بین دو بردار منفرجه خواهد بود و داریم:



$$a^2+R^2=b^2$$

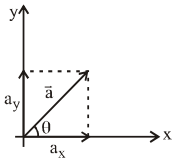
اندازه‌ی بردار برآیند و تفاضل از مجموع اندازه‌ی دو بردار کوچک‌تر و از تفاضل اندازه‌ی دو بردار بزرگ‌تر است.

$$|\vec{a}|-|\vec{b}|\leq|\vec{c}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

تذکر: اگر زاویه‌ی بین دو بردار را بر صفر تا 180° افزایش دهیم، بزرگی برآیند آن‌ها کاهش یافته و بزرگی تفاضل آن‌ها افزایش می‌یابد.

تجزیه‌ی بردار به دو مؤلفه

تجزیه‌ی بردار: هر بردار در صفحه‌ی x و y را می‌توان بر حسب دو بردار در راستای x و y تجزیه کرد و حاصل آن را بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$ و $\vec{j}$ نشان داد.



$$\begin{matrix}|a_x|=a\cos\theta\\ |a_y|=a\sin\theta\end{matrix}\Rightarrow\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

اندازه‌ی یک بردار در دستگاه $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\Rightarrow|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

جمع و تفریق دو بردار در دستگاه $\vec{i}$ و $\vec{j}$:

$$(\text{برآیند})\ \vec{R}=\vec{a}+\vec{b}\Rightarrow\vec{R}=(a_x+b_x)\vec{i}+(a_y+b_y)\vec{j}\Rightarrow|\vec{R}|=\sqrt{(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2}$$

$$(\text{تفاضل})\ \vec{C}=\vec{a}-\vec{b}\Rightarrow\vec{C}=(a_x-b_x)\vec{i}+(a_y-b_y)\vec{j}\Rightarrow|\vec{C}|=\sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$$

زاویه‌ی بردار با محورxها: زاویه‌ی یک بردار با محور x از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود:

$$\tan\theta=\frac{a_y}{a_x}$$

* هرگاه $\tan\theta$ مثبت باشد بردار در ربع اول یا سوم است و هرگاه $\tan\theta$ منفی باشد بردار در ربع دوم یا چهارم خواهد بود.

دو بر دار عمود بر هم در دستگاه یکه $(\vec{i},\vec{j})$

دو بردار عمود بر هم: هنگامی دو بردار بر هم عمود هستند که حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر شود.

$$\begin{matrix}\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}\\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}\end{matrix}\xrightarrow{\vec{a}\perp\vec{b}}a_xb_x+a_yb_y=0$$

برآیند چند بردار در یک صفحه

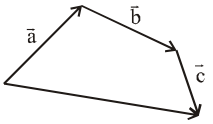
محاسبه‌ی برآیند چند بردار به روش تجزیه:

۱. ابتدا بردارهایی را که در راستای محور x و y نیستند، تجزیه می‌کنیم.

۲. برآیند بردارها در راستای محور x را R_x می‌گیریم و در راستای y را R_y می‌نامیم.

۳. اندازه‌ی بردار برآیند را از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌کنیم. $|R| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$

محاسبه‌ی بردار برآیند به روش چند ضلعی: ابتدا یک بردار را رسم کرده از انتهای بردار اول بردار دوم را رسم می‌کنیم این کار را به همین ترتیب تا آخرین بردار انجام داده و سپس از ابتدای بردار اول به انتهای بردار آخر، بردار برآیند را رسم می‌کنیم.



$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

تعادل و نیروی برآیند صفر

هنگامی برآیند نیروها صفر می‌شود که برآیند مؤلفه‌های نیرو در راستای محور x و y صفر شود.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{1x} + \vec{F}_{2x} + \vec{F}_{3x} = 0 \\ \vec{F}_{1y} + \vec{F}_{2y} + \vec{F}_{3y} = 0 \end{cases}$$

- در این حالت گوییم که مجموعه در حال تعادل است.
- در این حالت می‌گوییم که مجموع در حال تعادل است. هرگاه برآیند چند نیرو صفر باشد با حذف یک نیرو، اندازه‌ی بردار برآیند نیروهای باقی‌مانده، هم‌اندازه‌ی نیروی حذف شده و در خلاف جهت آن است.

مسائل و نمودارهای حرکت، جابه‌جایی، سرعت و شتاب یک متحرک در حرکت با شتاب ثابت

استفاده از رابطه‌ی حرکت و جابه‌جایی $x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$ و $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$

معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت: اگر متحرکی با شتاب ثابت a از مکان x_0 با سرعت اولیه‌ی V_0 در امتداد یک مسیر مستقیم (مثلاً محور x) شروع به حرکت کند معادله‌ی حرکت آن در SI به صورت زیر است که در آن t لحظه‌ای است که متحرک در مکان x قرار گرفته.

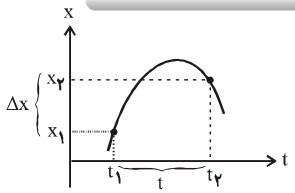
$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

تعیین جابه‌جایی با استفاده از معادله‌ی حرکت: جابه‌جایی یک متحرک در حرکت با شتاب ثابت در مدت t به صورت زیر محاسبه می‌شود که در آن V_0 سرعت اولیه در لحظه‌ی ابتدایی شروع این جابه‌جایی است.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$$

استفاده از رابطه‌ی حرکت و جابه‌جایی به کمک نمودار مکان – زمان (x-t)

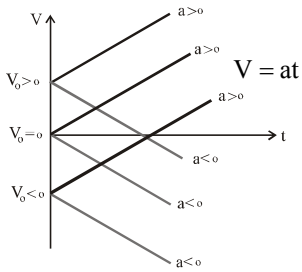
نمودار مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت: در حرکت با شتاب ثابت نمودار مکان- زمان قسمتی از یک سهمی است که با استفاده از آن می‌توان در هر لحظه مکان متحرک را تعیین کرده و با محاسبه‌ی جابه‌جایی در مدت زمان t معادله‌ی جابه‌جایی آن یعنی $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t$ را حل کرد.

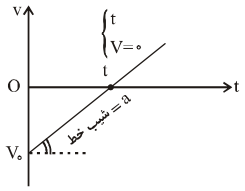


استفاده از معادله‌ی سرعت، تعیین معادله‌ی سرعت-زمان و معادله‌ی حرکت به کمک نمودار سرعت-زمان و برعکس

معادله‌ی سرعت– زمان: در حرکت با شتاب ثابت a و سرعت اولیه‌ی V_0 معادله‌ی سرعت زمان به صورت مقابل است: $V = at + V_0$

نمودار سرعت- زمان در حرکت با شتاب ثابت: از آنجایی که در حرکت با شتاب ثابت، شتاب بدون تغییر است، نمودار سرعت زمان، یک خط راست با شیب ثابت خواهد بود که شیب خط برابر شتاب متحرک است. با تحلیل این نمودار می‌توان شتاب حرکت (شیب خط)، سرعت اولیه‌ی V_0 (نقطه‌ی

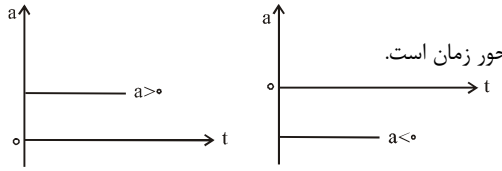




برخورد نمودار با محور V) و حتی لحظه‌ی توقف و تغییر جهت که $V=۰$ است (نقطه‌ی برخورد نمودار با محور t) را مشخص کرده و با استفاده از آنها معادله‌ی سرعت یا حرکت (با فرض آنکه $x_۰$ معلوم باشد) را تعیین کرد.

$$\begin{cases} V = at + V_۰ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_۰t + x_۰ \end{cases}$$

تذکر: نمودار شتاب – زمان در حرکت با شتاب ثابت، خط راستی موازی محور زمان است.

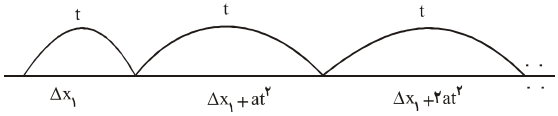


جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nام در حرکت با شتاب ثابت

جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nام: اگر متحرکی با شتاب ثابت a و با سرعت اولیه‌ی $V_۰$ در امتداد یک مسیر مستقیم (مثلاً محور x) شروع به حرکت کند، جابه‌جایی‌اش در t ثانیه‌ی nام (nامین t ثانیه) از رابطه‌ی مقابل محاسبه می‌شود:

$$\boxed{\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲(۲n-۱) + V_۰t}$$

تذکر: به طور کلی در حرکت با شتاب ثابت a در امتداد یک مسیر مستقیم، جابه‌جایی‌های متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی t تشکیل یک تصاعد عددی (حسابی) با قدر نسبت $at^۲$ می‌دهند.

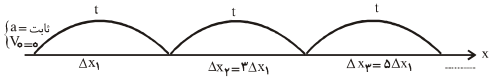


$$at^۲ = \frac{\Delta x_m - \Delta x_n}{m-n} \begin{cases} \Delta x_m : \text{جابه‌جایی در } t \text{ ثانیه‌ی } m\text{ام} \\ \Delta x_n : \text{جابه‌جایی در } t \text{ ثانیه‌ی } n\text{ام} \end{cases}$$

جابه‌جایی در ثانیه‌ی nام: در حرکت با شتاب ثابت a در امتداد یک خط راست جابه‌جایی متحرک در ثانیه‌ی nام حرکت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲(۲n-۱) + V_۰t \xrightarrow{t=۱s} \boxed{\Delta x = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱) + V_۰}$$

تذکر: گالیله می‌گوید که «اگر متحرکی از حال سکون $(V_۰=۰)$ با شتاب ثابت a در امتداد خط راست شروع به حرکت کند، نسبت جابه‌جایی‌هایش در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی t همانند نسبت اعداد فرد متوالی است.»



$$a = \text{ثابت} \quad \text{و} \quad V_۰ = ۰ \quad \text{و} \quad \frac{\Delta x_m}{\Delta x_n} = \frac{۲m-۱}{۲n-۱}$$

استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان ($V_۲^۲ - V_۱^۲ = ۲a\Delta x$ که $\Delta x = x_۲ - x_۱$) در حرکت با شتاب ثابت

رابطه‌ی مستقل از زمان: اگر در حرکت بر روی یک مسیر مستقیم (مانند محور x) با شتاب ثابت a، سرعت متحرک در مکان $x_۱$ برابر $V_۱$ و در مکان $x_۲$ برابر $V_۲$ باشد، می‌توان از رابطه‌ای به صورت زیر استفاده کرد: (دقت کنید که عموماً از این رابطه، هنگامی که مدت زمان جابه‌جایی داده نشده است استفاده می‌کنیم.)

$$V_۲^۲ - V_۱^۲ = ۲a\Delta x$$

مسئله‌های توقف در حرکت با شتاب ثابت (زمان و مسافت توقف)

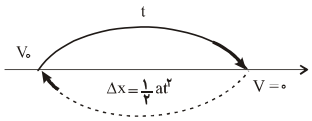
زمان توقف: اگر متحرکی با سرعت $V_۰$ در حرکت بوده و بلافاصله با شتاب ثابت $|a|$ از سرعت خود بکاهد تا متوقف شود، زمان حرکتش از لحظه‌ی شروع حرکت کندشونده تا توقف که به آن t_S می‌گوییم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$V = at + V_۰ \xrightarrow[t=t_S]{V=۰} \boxed{t_S = \frac{V_۰}{|a|}}$$

مسافت توقف: اگر متحرکی با سرعت $V_۰$ در حرکت بوده و بلافاصله با شتاب ثابت $|a|$ از سرعت خود بکاهد تا متوقف شود، مسافت طی شده توسط متحرک از لحظه‌ی شروع حرکت کندشونده تا توقف که به آن x_S می‌گوییم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[\Delta x = x_S]{V=0} \boxed{x_S = \frac{V_0^2}{2|a|}}$$

بزرگی جابه‌جایی در t ثانیه‌ی آخر حرکت کندشونده: می‌توان فرض کرد متحرک در همان مسیر و با همان شتاب با سرعت اولیه‌ی صفر برمی‌گردد.



$$|\Delta x| = \frac{1}{2}|a|t^2$$

استفاده از رابطه‌ی مستقل از شتاب $(\Delta x = \frac{V_2 + V_1}{2}\Delta t)$

رابطه‌ی مستقل از شتاب: اگر متحرکی در حرکت با شتاب ثابت در لحظه‌ی t_1 از مکان x_1 با سرعت V_1 و در لحظه‌ی t_2 از مکان x_2 با سرعت V_2 عبور کند می‌توان از رابطه‌ای به صورت زیر به نام رابطه‌ی مستقل از شتاب در SI استفاده کرد.

$$\Delta x = \frac{V_2 + V_1}{2}\Delta t \begin{cases} \Delta x = x_2 - x_1 \\ \Delta t = t_2 - t_1 \end{cases}$$

بررسی سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت $(\overline{V} = \frac{V_2 + V_1}{2}\ ,\ \overline{V} = \frac{1}{2}at + V_0)$

تعیین سرعت متوسط بدون در نظر گرفتن شتاب: از آنجایی که در حرکت با شتاب ثابت، شتاب متوسط و لحظه‌ای متحرک با هم برابرند (نمودار سرعت- زمان یک خط راست با شیب ثابت است) می‌توان سرعت متوسط در یک مدت را به صورت میانگین دو سرعت لحظه‌ای در ابتدا و انتهای آن مدت محاسبه کرد.

$$\overline{V} = \frac{V_2 + V_1}{2}$$

تعیین سرعت متوسط با در نظر گرفتن شتاب: اگر متحرکی با سرعت اولیه‌ی V_0 و شتاب ثابت a شروع به حرکت کند، بزرگی سرعت متوسط آن در t ثانیه‌ی اول حرکت‌اش به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\overline{V} = \frac{1}{2}at + V_0$$

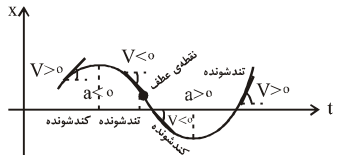
مسئله‌ها ونمودارهای ترکیبی مربوط به یک متحرک در حرکت با شتاب ثابت

تعیین نوع حرکت (تندشونده و کندشونده) با استفاده از نمودارها

استفاده از نمودار مکان- زمان در تعیین نوع حرکت (تند یا کندشونده):

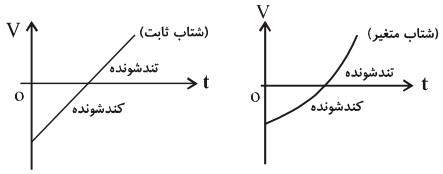
۱. می‌توان تغییرات شیب نمودار $x - t$ که بیان‌گر سرعت لحظه‌ای است را بررسی کرد:

۲. با توجه به علامت شتاب (توجه به تقعر منحنی) و علامت سرعت (توجه به شیب خط مماس بر نمودار) در نمودار $x - t$، می‌توان به نوع حرکت (تند یا کندشونده بودن) پی برد.



$$\begin{cases} aV > 0 \leftrightarrow \text{تندشونده} \\ aV < 0 \leftrightarrow \text{کندشونده} \end{cases}$$

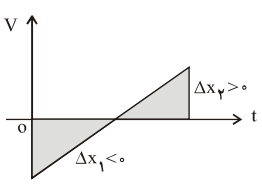
استفاده از نمودار سرعت- زمان در تعیین نوع حرکت (تند یا کندشونده): اگر نمودار سرعت-زمان به محور زمان نزدیک شود، حرکت متحرک کندشونده (بزرگی سرعت کاهش می‌یابد) و اگر از محور زمان دور شود حرکت متحرک تندشونده (بزرگی سرعت افزایش می‌یابد) است.



جابه‌جایی، مسافت طی شده و سرعت متوسط با استفاده از سطح زیر نمودار $(V - t)$

محاسبه‌ی جابه‌جایی یا مسافت طی شده با استفاده از سطح زیر نمودار $V - t$:

می‌دانیم که سطح زیر نمودار $V - t$ برابر جابه‌جایی متحرک است. بدیهی است که جابه‌جایی (سطح زیر نمودار) به ازای مقادیر منفی V در خلاف جهت محور



$(\Delta x < 0)$ و به ازای مقادیر مثبت V، در جهت محور $(\Delta x > 0)$ خواهد بود. لذا برای تعیین جابه‌جایی کل و نیز مسافت کل طی شده به صورت زیر عمل می‌کنیم.

جابه‌جایی کل $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$ (جمع جبری) مسافت کل طی شده $d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$

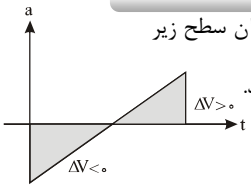
سرعت متوسط با استفاده از سطح زیر نمودار $V-t$: با استفاده از سطح زیر نمودار $V-t$ جابه‌جایی را یافته، سپس با استفاده از رابطه‌ی $\overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$، سرعت متوسط کل را محاسبه می‌کنیم.

تذکر: اگر نمودار سرعت- زمان در یک بازه‌ی معین به صورت یک خط راست با شیب ثابت باشد، شتاب حرکت ثابت بوده و می‌توان برای تعیین $\overline{V}$ در آن بازه به صورت زیر نیز عمل کرد:

$$\overline{V} = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

بررسی تحلیلی نمودار شتاب- زمان (a-t)

نمودار شتاب- زمان: با استفاده از این نمودار می‌توان به نوع ثابت و یا متغیر بودن شتاب حرکت پی برد. علاوه بر ان سطح زیر نمودار $a-t$ برابر تغییر سرعت متحرک (ΔV) است. دقت کنید که سطح زیر نمودار می تواند مثبت یا منفی باشد.



تذکر: اگر نمودار $a-t$ خط راستی موازی با محور t باشد، شتاب حرکت ثابت بوده و می‌توان از روابط مربوط به حرکت با شتاب ثابت در آن بازه استفاده کرد.

تعیین نوع حرکت به کمک معادله‌ی حرکت

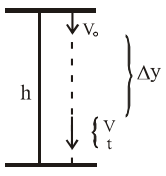
استفاده از معادله‌ی حرکت با شتاب ثابت در تعیین نوع حرکت: به طور کلی اگر معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $x = At^2 + Bt + C$ داده شده باشد، در صورتی که ضریب t^2 یعنی (A) و ضریب t یعنی (B) هم‌علامت باشند حرکت الزاماً تندشونده و اگر ضریب t^2 یعنی (A) و ضریب t یعنی (B) هم‌علامت نباشند حرکت در ابتدا کندشونده (قبل از توقف) و بعد از آن تندشونده است که لحظه‌ی توقف از رابطه‌ی $t_S = \left|\frac{B}{2A}\right|$ محاسبه می‌شود.

تعیین نوع حرکت با استفاده از a و V: اگر در حرکت یک متحرک، در یک لحظه a و V هم‌علامت باشند $(aV > 0)$ در آن لحظه حرکت متحرک تندشونده بوده (بزرگی سرعتش افزایش می‌یابد) و اگر a و V هم‌علامت نباشند $(aV < 0)$ در آن لحظه حرکت متحرک کندشونده است. (بزرگی سرعتش کاهش می‌یابد).

محاسبه‌ی کمیت‌ها در پرتاب به سمت پایین برای یک جسم

رابطه‌ی حرکت، سرعت، مستقل از زمان در پرتاب به پایین یا سقوط آزاد جسم: به طور کلی سقوط آزاد و یا پرتاب در راستای قائم در شرایط خلاء، یک حرکت با شتاب ثابت است، لذا تمامی روابط مربوط به حرکت با شتاب ثابت برای آن صدق می‌کند. در اینجا عموماً جهت رو به بالا را مثبت فرض می‌کنیم، از این‌رو تمامی بردارهایی مانند سرعت، جابه‌جایی و ... که جهت آنها رو به پایین است را با علامت منفی در نظر می‌گیریم.

معمولاً نقطه‌ی پرتاب را مبدأ مکان در نظر می‌گیریم $y_0 = 0$



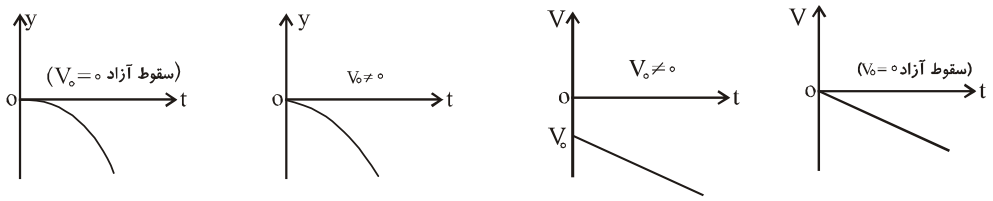
(معادله‌ی حرکت) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \xrightarrow[V_0=0]{\text{در سقوط آزاد}} y = -\frac{1}{2}gt^2$

(معادله‌ی جابه‌جایی) $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t \xrightarrow[V_0=0]{\text{در سقوط آزاد}} \Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$

(معادله‌ی سرعت- زمان) $V = -gt + V_0 \xrightarrow[V_0=0]{\text{در سقوط آزاد}} V = -gt$

(معادله‌ی مستقل از زمان) $V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y \xrightarrow[V_0=0]{\text{در سقوط آزاد}} V = \sqrt{-2g\Delta y}$

نمودارهای حرکت و سرعت: نمودارهای مربوط به حرکت و سرعت در این حالت (پرتاب به طرف پایین یا سقوط آزاد) به صورت زیر است. دقت کنید که جهت رو به بالا را مثبت فرض کرده‌ایم.

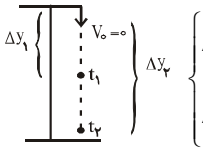


تذکر: در پرتاب جسم به طرف پایین، سرعت و شتاب جسم همواره همسو بوده لذا حرکت جسم تا قبل از رسیدن به زمین تندشونده است.

تذکر: در اینجا نیز برای تعیین سرعت متوسط با استفاده از تعریف به صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: $\overline{V}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}$

مقایسه‌ی کمیت‌ها در پرتاب به سمت پایین در دو نقطه‌ی مختلف برای یک جسم

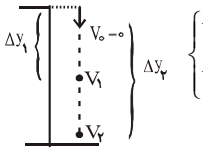
مقایسه‌ی زمان و جابه‌جایی یک جسم در دو نقطه‌ی مختلف: اگر گلوله‌ای از حال سکون، از نقطه‌ای بالای سطح زمین رها شود، برای مقایسه‌ی زمان رسیدن گلوله به دو مکان مختلف، معادله‌ی جابه‌جایی‌اش را نسبت به نقطه‌ی پرتاب برای این دو مکان نوشته و آنها را به صورت زیر مقایسه می‌کنیم: (در هر دو حالت معادله را نسبت به نقطه‌ی پرتاب می‌نویسیم).



$$\begin{cases}\Delta y_1=-\frac{1}{2}gt_1^2+V_0t_1\\ \Delta y_2=-\frac{1}{2}gt_2^2+V_0t_2\end{cases}\xrightarrow{V_0=0}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2=\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}$$

مقایسه‌ی سرعت و جابه‌جایی یک جسم در دو نقطه‌ی مختلف:

اگر گلوله‌ای از حال سکون، از نقطه‌ای بالای سطح زمین رها شود، برای مقایسه‌ی سرعت جسم در دو مکان مختلف، معادله‌ی مستقل از زمان را برای دو جابه‌جایی نوشته و آنها را به صورت زیر مقایسه می‌کنیم: (در هر دو حالت معادله را نسبت به نقطه‌ی پرتاب می‌نویسیم).



$$\begin{cases}V_2^2-V_0^2=-2g\Delta y_2\\ V_1^2-V_0^2=-2g\Delta y_1\end{cases}\xrightarrow{V_0=0}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2=\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}$$

محاسبه و مقایسه‌ی کمیت‌ها در پرتاب به سمت پایین در t ثانیه‌ی nام برای یک جسم

محاسبه‌ی جابه‌جایی در t ثانیه‌ی n ام: اگر گلوله‌ای از نقطه‌ای در بالای سطح زمین با سرعت اولیه‌ی V_0 به پایین پرتاب شود، جابه‌جایی‌اش در t ثانیه‌ی n ام حرکت به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2(2n-1)-|V_0|t\xrightarrow[V_0=0]{\text{در سقوط آزاد}}\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2(2n-1)$$

تذکر: برای مقایسه‌ی نسبت جابه‌جایی‌ها در دو بازه‌ی زمانی متفاوت در سقوط آزاد داریم: $V_0=0$ $\quad\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1}=\frac{2n_2-1}{2n_1-1}$

مقایسه‌ی جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های متوالی: اگر گلوله‌ای با سرعت V_0 به طرف پایین پرتاب شود جابه‌جایی آن در ثانیه‌ی اول برابر $\Delta y_1=\frac{1}{2}g+V_0$ است و جابه‌جایی‌های متوالی در هر ثانیه تشکیل تصاعد حسابی با قدر نسبت g می‌دهند

1s: $\Delta y_1=\frac{1}{2}g+V_0$

1s: $\Delta y_2=\Delta y_1+g\rightarrow\Delta y_2-\Delta y_1=g$

1s: $\Delta y_3=\Delta y_2+g\rightarrow\Delta y_3-\Delta y_2=g$

تذکر: اگر گلوله‌ای از حال سکون رها شود، جابه‌جایی‌های آن در ثانیه‌ی اول ۵ متر و در ثانیه‌های متوالی دیگر به ترتیب ۱۵ متر (جابه‌جایی در ثانیه‌ی دوم) و ۲۵ متر (جابه‌جایی در ثانیه‌ی سوم) و ..... است.

مقایسه‌ی جابه‌جایی در t ثانیه‌ی متوالی: جابه‌جایی جسم در t ثانیه‌های مساوی و متوالی تشکیل یک تصاعد عددی با قدر نسبت gt^2 می‌دهند.

مقایسه و محاسبه‌ی کمیت‌ها در پرتاب به سمت پایین برای دو جسم

بررسی حرکت دو جسم که با فاصله‌ی زمانی t از یک نقطه رها شده‌اند $(V_0=0)$**:** از آن‌جایی که شتاب حرکت دو گلوله یکسان و برابر g به طرف پایین است، شتاب هر یک نسبت به دیگری صفر بوده و حرکت هر یک نسبت به دیگری یکنواخت است، لذا فاصله‌ی دو گلوله‌ای که با

فاصله‌ی زمانی t رها شده‌اند، با افزایش زمان مرتباً افزایش می‌یابد و به صورت زیر محاسبه می‌شود. (t_2 مدت زمان حرکت گلوله‌ی دوم است و جهت مثبت را به طرف پایین در نظر گرفته‌ایم).

$$\begin{cases} V_{0_1} = V_{0_2} = 0 \\ \Delta y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 \end{cases} \xrightarrow[t_1 = t_2 + t]{\text{فاصله‌ی دو گلوله از هم } \Delta y = \Delta y_1 - \Delta y_2} \Delta y = \frac{1}{2} g(t_1^2 - t_2^2)$$

تذکر: بدیهی است که در این حالت هر دو گلوله با سرعت یکسان به زمین می‌رسند. $V = \sqrt{2gh}$

تذکر: در این حالت، بیشترین فاصله‌ی بین گلوله‌ها، هنگامی است که گلوله‌ی اول به زمین رسیده باشد، در این لحظه فاصله‌ی گلوله‌ی دوم از زمین برابر بیشترین فاصله‌ی دو گلوله از هم است.

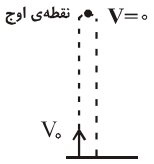
بررسی حرکت دو جسم که با فاصله‌ی زمانی t از دو نقطه‌ی مختلف پرتاب شده‌اند: اگر در این حالت گلوله‌ی اولی از ارتفاع h_1 (نسبت به زمین) به طرف پایین پرتاب شود و گلوله‌ی دوم از ارتفاع h_2 (نسبت به زمین) بعد از t ثانیه از حرکت اولی به پایین پرتاب شود، $t_1 = t_2 + t$ بوده و معادله‌ی حرکت هر یک را نوشته، سپس آنها را با هم مقایسه می‌کنیم: (رو به پایین مثبت)

$$\begin{cases} \Delta y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 + V_{0_1} t_1 \\ \Delta y_2 = \frac{1}{2} g t_2^2 + V_{0_2} t_2 \end{cases} , \quad t_1 = t_2 + t$$

پرتاب در راستای قائم به طرف بالا

محاسبه‌ی کمیت‌های نقاط مرزی (نقطه‌ی پرتاب و اوج) در پرتاب به سمت بالا از سطح زمین

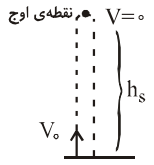
محاسبه‌ی زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج: می‌دانیم که در نقطه‌ی اوج سرعت گلوله صفر است، لذا اگر جهت رو به بالا را مثبت فرض کنیم، زمان رسیدن به اوج به صورت زیر خواهد بود:



$$V = -gt + V_0 \xrightarrow[t = t_S]{V=0} t_S = \frac{V_0}{g}$$

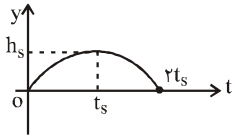
محاسبه کل زمان رفت و برگشت به نقطه‌ی پرتاب اولیه: از آنجایی که شتاب حرکت گلوله ثابت است، زمان رفت تا نقطه‌ی اوج با زمان برگشت از نقطه‌ی اوج به سطح نقطه‌ی پرتاب یکسان است، یعنی زمان کل رفت و برگشت دو برابر زمان اوج بوده، لذا داریم: $t_{\text{کل}} = 2t_S = \frac{2V_0}{g}$

محاسبه‌ی ارتفاع نقطه‌ی اوج نسبت به زمین: از آنجایی که در پرتاب گلوله از سطح زمین به طرف بالا، تا قبل از رسیدن به نقطه‌ی اوج حرکت گلوله کندشونده است، (و بعد از توقف در نقطه‌ی اوج و تغییر جهت، حرکت گلوله تندشونده می‌شود) با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان و این مطلب که در نقطه‌ی اوج گلوله متوقف می‌شود داریم:



$$V^2 - V_0^2 = -2gh \xrightarrow[h = h_S]{V=0} h_S = \frac{V_0^2}{2g} \quad , \quad h_S = \frac{1}{2} g t_S^2$$

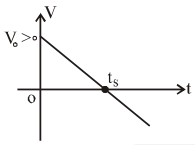
تذکر: نمودار حرکت گلوله‌ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده به صورت مقابل است.



محاسبه‌ی سرعت گلوله در پرتاب به طرف بالا در زمان‌های مختلف و برعکس ($V_y = -gt + V_{0y}$)

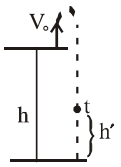
محاسبه‌ی سرعت و یا زمان در یک نقطه‌ی خاص با استفاده از معادله‌ی سرعت: اگر جهت رو به بالا را مثبت فرض کنیم، برای تعیین سرعت در یک لحظه‌ی معین و یا برای تعیین لحظه‌ای که سرعت V است، از رابطه‌ی سرعت به صورت $\boxed{V = -gt + V_0}$ استفاده می‌کنیم. دقت

کنید که در این رابطه اگر در لحظه‌ی t، جهت حرکت به طرف بالا باشد V با علامت مثبت و اگر به طرف پایین باشد با علامت منفی در نظر گرفته می‌شود.



تذکر: نمودار سرعت- زمان گلوله‌ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده به صورت شکل مقابل است:

حل مسئله‌ی پرتاب در راستای قائم به طرف بالا با استفاده از معادله‌ی حرکت و جابه‌جایی $(\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t)\ (y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t+y_0)$

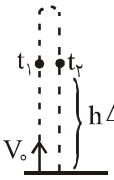


بررسی پرتاب گلوله از ارتفاع h (نسبت به زمین) به طرف بالا: اگر گلوله‌ای از ارتفاع h نسبت به زمین با سرعت اولیه‌ی V_0 به بالا پرتاب شود، برای تعیین مدت زمان حرکتش تا نقطه‌ای در ارتفاع h' از سطح زمین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t \xrightarrow{\Delta y=h'-h} h'-h=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t$$

تذکر: بدیهی است که برای تعیین زمان حرکت گلوله از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به زمین به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t \xrightarrow[h'=0 \text{ در لحظه‌ی برخورد به زمین}]{\Delta y=h'-h} -h=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t$$



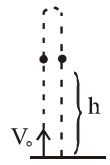
بررسی زمان حرکت گلوله‌ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده تا به ارتفاع h از زمین برسد: در این حالت با استفاده از معادله‌ی حرکت به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t \xrightarrow{\Delta y=h} h=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t$$

تذکر: جابه‌جایی در t ثانیه‌ی nام گلوله‌ای که با سرعت اولیه‌ی V_0 به بالا پرتاب شده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2(2n-1)+V_0t$$

حل مسئله‌ی پرتاب در راستای قائم به طرف بالا با استفاده از رابطه‌ی مستقل از زمان $(V_y^2-V_{0y}^2=\pm 2gh)$

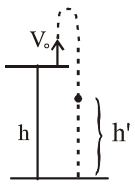


بررسی رابطه‌ی مستقل از زمان برای گلوله‌ای که از سطح زمین به بالا پرتاب شده: در این حالت با توجه به این که جهت رو به بالا را مثبت در نظر می‌گیریم، از رابطه‌ی مستقل از زمان به صورت زیر استفاده می‌کنیم که در آن h ارتفاع از سطح زمین برای نقطه‌ای است که بزرگی سرعت در آن نقطه V است.

$$V^2-V_0^2=-2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y=h} V^2-V_0^2=-2gh$$

تذکر: اگر رابطه‌ی بین ارتفاع نقطه‌ی موردنظر و ارتفاع نقطه‌ی اوج معلوم باشد، رابطه‌ی بین سرعت در آن نقطه و سرعت اولیه به صورت زیر خواهد بود:

$$V^2-V_0^2=-2gh \xrightarrow[h_S=\frac{V_0^2}{2g}]{h=\frac{m}{n}h_S} \boxed{V=V_0\sqrt{1-\frac{m}{n}}}$$



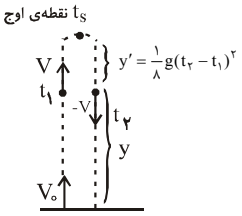
بررسی رابطه‌ی مستقل از زمان برای گلوله‌ای که از ارتفاع h نسبت به زمین به بالا پرتاب شده است: در این حالت نیز با توجه به این که جهت مثبت رو به بالا فرض شده از رابطه‌ی زیر به عنوان رابطه‌ی مستقل از زمان استفاده می‌کنیم که در آن h' فاصله از سطح زمین است:

$$V^2-V_0^2=-2g\Delta y \xrightarrow{\Delta y=h'-h} V^2-V_0^2=-2g(h'-h)$$

تذکر: بدیهی است که اگر گلوله به سطح زمین برسد $h'=0$ بوده لذا رابطه‌ی فوق به صورت زیر به کار می‌رود.

$$V^2-V_0^2=-2g\Delta y \xrightarrow[h'=0]{\Delta y=h'-h} V^2-V_0^2=2gh$$

دو عبور متوالی از یک نقطه در پرتاب به طرف بالا



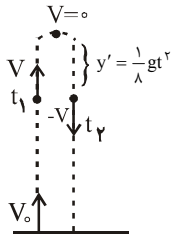
محاسبه‌ی سرعت اولیه و ارتفاع نقطه‌ای که گلوله دو بار از آن‌جا می‌گذرد: اگر معادله‌ی جابه‌جایی گلوله از لحظه‌ی پرتاب تا لحظه‌ای که گلوله در ارتفاع y نسبت به نقطه‌ی پرتاب قرار گرفته است را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\Delta y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t \xrightarrow{\Delta y=y} y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t \rightarrow \frac{1}{2}gt^2-V_0t+y=0$$

از آن‌جایی که گلوله در لحظه‌های t_1 و t_2 در ارتفاع موردنظر قرار دارد، t_1 و t_2 ریشه‌های این معادله بوده لذا با توجه به رابطه‌ی بین ریشه‌ها داریم:

$$\frac{c}{a}=t_1t_2 \rightarrow t_1t_2=\frac{y}{\frac{1}{2}g} \rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}gt_1t_2}$$

$$-\frac{b}{a}=t_2+t_1 \rightarrow t_2+t_1=\frac{V_0}{\frac{1}{2}g} \rightarrow \boxed{V_0=\frac{1}{2}g(t_2+t_1)}$$



تذکر: در این حالت می‌توان t_S (زمان توقف) را به صورت زیر محاسبه کرد:

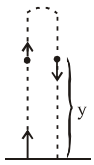
$$t_S=\frac{t_1+t_2}{2}$$

محاسبه‌ی بزرگی سرعت گلوله در نقاط هم‌ارتفاع در پرتاب به طرف بالا: از آنجایی که بزرگی سرعت گلوله در نقاط هم‌ارتفاع یکسان است، در صورتی که بعد از پرتاب، گلوله در لحظه‌ی t_1 از یک نقطه به طرف بالا عبور کرده و t ثانیه بعد، یعنی در لحظه‌ی t_2 نیز دوباره از همان نقطه به طرف پایین بگذرد، بزرگی سرعتش در آن نقطه به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} V=-gt_1+V_0 \\ -V=-gt_2+V_0 \end{cases} \rightarrow \boxed{|V|=\frac{1}{2}g(t_2-t_1)} \xrightarrow{t_2-t_1=t} \boxed{|V|=\frac{1}{2}gt}$$

بررسی حرکت دو گلوله در پرتاب به طرف بالا

بررسی حرکت دو گلوله که با سرعت اولیه‌ی یکسان و فاصله‌ی زمانی t از زمین به بالا پرتاب می‌شوند:

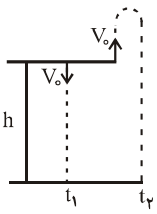


اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی V_0، از سطح زمین به بالا پرتاب شده و t ثانیه بعد گلوله‌ی دیگری با همان سرعت اولیه‌ی V_0 به دنبال اولی از زمین به بالا پرتاب شود و دو گلوله در ارتفاع y از سطح زمین به هم برسند، بزرگی سرعت گلوله‌ها در نقطه‌ی به هم رسیدن یکسان بوده ($|V|$) و ارتفاع نقطه‌ی موردنظر نسبت به زمین به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} |V|=\frac{1}{2}gt \\ V^2-V_0^2=-2gy \end{cases}$$

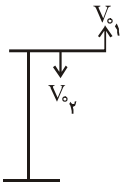
پرتاب دو گلوله در دو سوی مخالف

بررسی حرکت دو گلوله که از یک ارتفاع معین یکی روبه بالا و دیگری به پایین پرتاب می‌شوند.



بررسی دو گلوله که از یک ارتفاع همزمان با سرعت اولیه‌ی یکسان یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین پرتاب می‌شوند: اگر دو گلوله مطابق شکل به طور همزمان با سرعت اولیه‌ی یکسان، یکی رو به بالا و دیگری رو به پایین پرتاب شوند تا به زمین برسند، فاصله‌ی زمانی رسیدن آنها به زمین به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2t_s = 2\frac{V_0}{g}$$



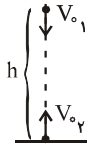
بررسی دو گلوله که از یک ارتفاع معین با سرعت‌های متفاوت یکی رو به بالا و دیگری به پایین پرتاب شده‌اند: اگر دو گلوله به طور همزمان از ارتفاع h، اولی رو به بالا با سرعت اولیه‌ی V_{01} و دومی رو به پایین با سرعت اولیه‌ی V_{02} پرتاب شده باشند، حرکت هر یک نسبت به دیگری یکنواخت بوده، لذا فاصله‌ی بین آن‌ها بعد از مدت زمان t از پرتاب به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta y = |V_{02} + V_{01}|\, t$$

بررسی دو گلوله که از یک ارتفاع هر دو به طرف بالا و یا هر دو به طرف پایین با سرعت اولیه‌ی متفاوت پرتاب شوند: اگر دو گلوله به طور همزمان از ارتفاع h، هر دو به طرف بالا و یا هر دو به طرف پایین با سرعت اولیه‌ی V_{01} و V_{02} پرتاب شوند، فاصله‌ی بین آن‌ها، t ثانیه بعد از پرتاب به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta y = |V_{02} - V_{01}|\, t$$

بررسی حرکت دو گلوله که به طرف هم پرتاب شده‌اند



زمان رسیدن دوگلوله که به طرف هم پرتاب شده‌اند: اگر گلوله‌ای از ارتفاع h نسبت به سطح زمین با سرعت اولیه‌ی V_{01} به پایین و همزمان با آن گلوله‌ی دیگری از سطح زمین با سرعت اولیه‌ی V_{02} به بالا پرتاب شود، حرکت هر یک نسبت به دیگری یکنواخت بوده لذا اندازه‌ی جابه‌جایی هر یک نسبت به دیگری به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta y = (|V_{01}| + V_{02})t$$

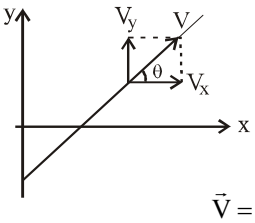
طبیعی است که اگر دو گلوله به هم برسند خواهیم داشت:

$$\Delta y = (|V_{01}| + V_{02})t \xrightarrow[\text{در لحظه‌ی به هم رسیدن}]{\Delta y = h} t = \frac{h}{|V_{01}| + V_{02}}$$

بررسی حرکت در صفحه در حالت کلی

معادله‌ی مسیر حرکت

تعیین معادله‌ی مسیر با استفاده از معادله‌ی حرکت: به طور کلی معادله‌ی مسیر حرکت یک متحرک در صفحه‌ی xoy، رابطه‌ای بین x و y مستقل از زمان است، لذا با استفاده از معادله‌ی حرکت در امتداد محور x و y $(x = f(t)\ ,\ y = g(t))$ و تشکیل یک دستگاه، بعد از حذف t (زمان) رابطه‌ای بین y و x پیدا می‌کنیم که به آن معادله‌ی مسیر حرکت متحرک می‌گوییم.



تعیین سرعت با توجه به معادله‌ی مسیر: می‌دانیم که بردار سرعت در هر لحظه بر مسیر حرکت متحرک مماس است، لذا اگر بزرگی سرعت در یک لحظه V باشد، مولفه‌های سرعت در آن لحظه به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}\ ,\ \begin{cases} V_x = V\cos\theta \\ V_y = V\sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

که در آن θ از شیب خط مماس بر نمودار مسیر در آن لحظه به دست می‌آید.

بردار مکان و جابه‌جایی در صفحه

تعیین بردار مکان در هر لحظه: با توجه به حرکت دو بعدی متحرک (حرکت در صفحه)، بردار مکان در هر لحظه به صورت زیر بررسی می‌شود:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \xrightarrow[y=g(t)]{x=f(t)} \vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$$

که با قرار دادن لحظه‌ی موردنظر در بردار مکان مقادیر x و y را تعیین، سپس بزرگی بردار مکان را محاسبه می‌کنیم. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

تعیین جابه‌جایی در صفحه: در یک بازه‌ی زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$، بردار مکان را در لحظه‌ی t_1 و t_2 تعیین و بعد از آن بردار جابه‌جایی و نیز بزرگی آن را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} \\ \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \end{cases} \xrightarrow{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1} \Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$$

$$\xrightarrow[\Delta y = y_2 - y_1]{\Delta x = x_2 - x_1} \Delta\vec{r} = \Delta x(\vec{i}) + \Delta y(\vec{j}) \rightarrow \Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

سرعت متوسط و لحظه‌ای در حرکت در صفحه

سرعت متوسط در صفحه: با استفاده از تعریف سرعت متوسط که به صورت جابه‌جایی در واحد زمان بیان می‌شود می‌توان سرعت متوسط و نیز بزرگی آن را در صفحه به صورت زیر تعیین کرد.

$$\overline{\vec{V}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j}}{\Delta t} = \overline{V}_x\vec{i} + \overline{V}_y\vec{j} \rightarrow \overline{V} = \sqrt{\overline{V}_x^2 + \overline{V}_y^2} \quad \text{یا} \quad \overline{V} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

که در آن $\overline{V}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ و $\overline{V}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ است.

تذکر: اگر بزرگی بردارهای مکان به صورت r_1 و r_2 در دو لحظه‌ی t_1 و t_2 داده شده باشد و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد بزرگی Δr را به صورت زیر نیز می‌توان محاسبه کرد:

$$\Delta r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta} \xrightarrow{r_1 = r_2 = r} \Delta r = 2r\sin(\frac{\theta}{2})$$

سرعت لحظه‌ای در صفحه: می‌توان با تعیین مولفه‌های سرعت لحظه‌ای در امتداد محورهای x و y بردار سرعت لحظه‌ای و بعد از آن بزرگی‌اش را محاسبه کرد.

$$\begin{cases} V_x = \frac{dx}{dt} \\ V_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \rightarrow \vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} \quad , \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

تذکر: زاویه‌ی θ بین بردار سرعت و سوی محور x در هر لحظه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

تذکر: برای تعیین θ به علامت مولفه‌های V_y و V_x (به عبارتی جهت آن‌ها) دقت کنید.

شتاب متوسط و لحظه‌ای در حرکت در صفحه

شتاب متوسط در حرکت در صفحه: در اینجا شتاب متوسط نیز دارای دو مولفه در امتداد محورهای x و y است که با محاسبه‌ی هر یک می‌توان بردار شتاب متوسط و نیز بزرگی آن را تعیین کرد.

$$\overline{\vec{a}} = \overline{a}_x\vec{i} + \overline{a}_y\vec{j} \xrightarrow[\overline{a}_y = \frac{\Delta V_y}{\Delta t}]{\overline{a}_x = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}} \overline{\vec{a}} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\vec{j} \quad , \quad \text{بزرگی شتاب متوسط} \quad \overline{a} = \sqrt{\overline{a}_x^2 + \overline{a}_y^2} \quad , \quad \overline{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

تذکر: اگر بزرگی بردارهای سرعت و زاویه‌ی بین آن‌ها (θ) معلوم باشد برای تعیین بزرگی ΔV داریم:

$$\Delta V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\theta} \xrightarrow{V_1 = V_2 = V} \Delta V = 2V\sin(\frac{\theta}{2})$$

شتاب لحظه‌ای در حرکت در صفحه: با یکبار مشتق‌گیری از معادله‌ی سرعت نسبت به زمان و یا دو بار مشتق‌گیری از معادله‌ی حرکت نسبت به زمان می‌توان معادله‌ی شتاب لحظه‌ای متحرکی که در صفحه حرکت می‌کند را تعیین، سپس بزرگی آن را محاسبه کرد.

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} \xrightarrow[a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}]{a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

مسائل ترکیبی

مسائل مربوط به برخورد دو متحرک در صفحه

ویژگی مکان و یا لحظه‌ی برخورد: شرط برخورد دو متحرک در صفحه این است که دو متحرک در یک لحظه بردار مکان برابر داشته، به عبارتی در یک لحظه دارای x و y برابر باشند.

در لحظه‌ی برخورد دو متحرک:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ , \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

تذکر: با تعیین لحظه‌ی برخورد دو متحرک (t) می‌توان بردار مکان، سرعت و یا شتاب هر یک را در لحظه‌ی برخورد، با قراردادن لحظه‌ی مورد نظر در معادله‌ی حرکت، سرعت یا شتاب تعیین کرد.

زمان رسیدن به اوج و زمان رفت و برگشت خاص

زمان رسیدن به اوج: اگر گلوله‌ای با سرعت V_0 تحت زاویه‌ی α نسبت به افق به بالا پرتاب شود، زمان رسیدن به نقطه‌ی اوج آن از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

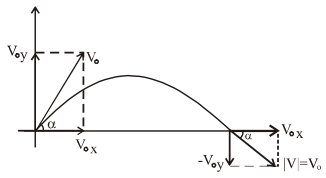
$$t_{\text{اوج}} = \left|\frac{V_{0y}}{g}\right| = \left|\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right|$$

زمان رفت و برگشت به نقطه‌ی پرتاب: در شرایط خلاء زمان رفت گلوله از لحظه‌ی پرتاب تا رسیدن به نقطه‌ی اوج، با زمان برگشت گلوله از نقطه‌ی اوج تا نقطه‌ی هم سطح با نقطه‌ی پرتاب برابر بوده، لذا زمان رفت و برگشت به همان سطح نقطه‌ی پرتاب اولیه دو برابر زمان اوج است.

$$t_{\text{کل رفت و برگشت}} = 2t_{\text{اوج}} = 2\left|\frac{V_{0y}}{g}\right| = 2\left|\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right|$$

سرعت در نقاط مرزی (پرتاب و اوج) و یا یک لحظه و یک مکان

سرعت در نقطه‌ی پرتاب: اندازه‌ی سرعت در نقطه‌ی پرتاب با اندازه‌ی سرعت هنگام برگشت به همان سطح افقی نقطه‌ی پرتاب یکسان است و هم چنین زاویه‌ی پرتابه نسبت به افق هنگام رفت و برگشت یکسان است.

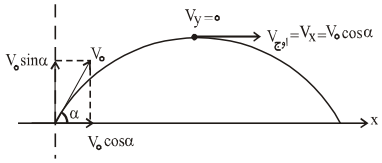


$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha$$
$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha$$

سرعت در نقطه‌ی اوج: سرعت پرتابه در این نقطه کم‌ترین مقدار خود را دارد و به صورت زیر بررسی می‌شود:

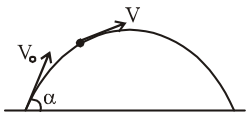
۱. مؤلفه‌ی قائم سرعت در اوج برابر صفر است: $V_y = 0$

۲. مؤلفه‌ی افقی سرعت در اوج برابر V_x است: $V = V_{x_{\text{اوج}}} = V_0 \cos\alpha = V_{min}$



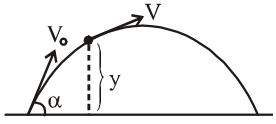
سرعت در یک مکان یا لحظه‌ی خاص: اگر گلوله‌ای تحت زاویه‌ی α نسبت به افق با سرعت اولیه‌ی V_0 روبه بالا پرتاب شود، بزرگی سرعت این گلوله در یک مکان خاص به دوگونه محاسبه می‌شود.

۱. در صورتی که زمان حرکت گلوله تا رسیدن به این محل داده شده باشد:



$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \xrightarrow{V_y = -gt + V_0 \sin\alpha} V = \sqrt{V_x^2 + (-gt + V_0 \sin\alpha)^2}$$

۲. در صورتی که مکان متحرک در محل مورد نظر داده شده باشد:



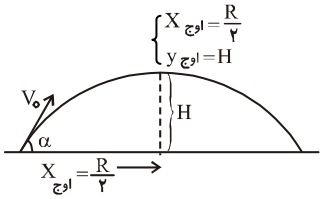
$$V^2 - V_0^2 = -2gy$$

تعیین ارتفاع نقطه‌ی اوج پرتابه

رابطه‌ی ارتفاع اوج در حرکت پرتابی: برای تعیین ارتفاع اوج از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم:

$$H=\frac{V_{oy}^{2}}{|2g|}=\frac{V_{o}^{2}\sin^{2}\alpha}{|2g|}=\frac{1}{2}gt_{\text{اوج}}^{2}$$

تعیین ارتفاع اوج به کمک معادله‌ی مسیر: اگر معادله‌ی مسیر حرکت پرتابه معلوم باشد کافی است اکسترمم تابع که همان مختصات مکان نقطه‌ی اوج است را به دست آوریم، در این صورت از معادله‌ی مسیر نسبت به x مشتق گرفته $(\frac{dy}{dx})$ و مساوی صفر قرار می‌دهیم تا جابه‌جایی در راستای افقی به دست آید (x)، سپس در معادله‌ی مسیر گذاشته تا y به دست آید. (H)



$$y=ax^{2}+bx+c$$

$$y'=2ax+b=0\Rightarrow\begin{cases}x_{\text{اوج}}=-\frac{b}{2a} & \text{نصف برد}\\ y_{\text{اوج}}=\text{جاگذاری} & (x=\frac{-b}{2a}\ \text{به ازای})\end{cases}$$

تعیین برد پرتابه

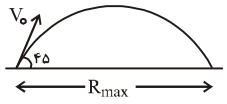
محاسبه‌ی برد پرتابه: از آن‌جایی که در امتداد افق حرکت پرتابه یکنواخت است.

۱. برای تعیین برد پرتابه ازرابطه‌ی روبه‌رو استفاده می‌کنیم.

$$R=\frac{V_{o}^{2}\sin 2\alpha}{|g|}=\frac{2V_{oy}V_{ox}}{|g|}\qquad (\text{رابطه‌ی ۱})$$

۲. اگر زمان کل رفت و برگشت را داشته باشیم از رابطه‌ی $R=x=(V_o\cos\alpha)t_{\text{کل}}$ استفاده می‌کنیم.

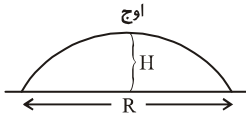
بیشینه‌ی برد: برد یک پرتابه وقتی بیشینه است که در رابطه‌ی (۱) مقدار $\sin 2\alpha=1$ یعنی $\alpha=45^\circ$ باشد



$$\sin 2\alpha=1\rightarrow\alpha=45^\circ\Rightarrow R_{max}=\frac{V_{o}^{2}}{|g|}$$

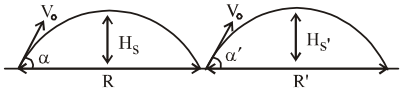
رابطه‌ی بین برد و ارتفاع اوج پرتابه

نسبت ارتفاع اوج به برد پرتابه: برای تعیین این نسبت رابطه‌ی H و R را نوشته و آن‌ها را به هم تقسیم می‌کنیم.



$$\begin{cases}H=\frac{V_{o}^{2}\sin^{2}\alpha}{|2g|}\\ R=\frac{V_{o}^{2}\sin 2\alpha}{|g|}\end{cases}\xrightarrow{\text{تقسیم می‌کنیم}}\frac{H}{R}=\frac{\sin^{2}\alpha}{2\sin 2\alpha}=\frac{\sin^{2}\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{4}\tan\alpha$$

تذکر: هرگاه دو پرتابه با سرعت اولیه‌ی یکسان طوری پرتاب شوند که زوایای پرتاب آن دو متمم باشند، برد هر دو پرتابه یکسان است:

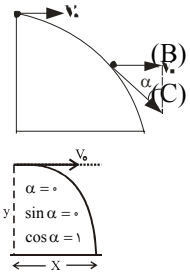


$$\alpha+\alpha'=\pi/2=90^\circ\Rightarrow R=R',\ \frac{H_S'}{H_S}=\tan^{2}\alpha',\ \frac{t_S'}{t_S}=\tan\alpha'$$

یک جمع‌بندی کوتاه از روابط پرتاب تحت زاویه‌ی α از سطح زمین:

(A) تصویر حرکت قائم (آینه‌ی قائم)	(B) تصویر حرکت افق (آینه‌ی افقی)	(C) حرکت پرتابی (کلی)
۱- تصویر حرکت بر روی محور قائم (آینه‌ی قائم) حرکتی شتاب‌دار با شتاب ثابت g است. $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}gt^2+(V_\circ\sin\alpha)t \\ V_y=-gt+V_\circ\sin\alpha \\ V_y^2-V_\circ^2\sin^2\alpha=-2gy \end{cases}$ ۲- روابط در نقطه‌ی اوج $\begin{cases} t=\left\|\frac{V_{\circ y}}{g}\right\|=\left\|\frac{V_\circ\sin\alpha}{g}\right\| \\ H=\frac{V_\circ^2 y}{\|2g\|}=\frac{V_\circ^2\sin^2\alpha}{\|2g\|} \\ V=V_x=V_\circ\cos\alpha \end{cases}$	۱- تصویر حرکت افقی، حرکتی با سرعت ثابت و یکنواخت است. ۲- ثابت $V_x=V_\circ\cos\alpha$ ۳- $x=(V_\circ\cos\alpha)t$ ۴- برد حرکت: $R=\frac{V_\circ^2\sin2\alpha}{\|g\|}=\frac{2V_{\circ x}V_{\circ y}}{\|g\|}$ $=\frac{2V_\circ^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}$ $=V_{\circ x}t_{\text{کل}}$ ، $R_{max}=\frac{V_\circ^2}{g}$	۱- اگر سرعت برحسب زمان مطرح باشد: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{(V_\circ\cos\alpha)^2+(-gt+V_\circ\sin\alpha)^2}$ ۲- اگر سرعت برحسب مکان مطرح باشد: $V^2-V_\circ^2=-2gy$ ۳- معادله‌ی مسیر حرکت (رابطه‌ی x و y مستقل از زمان): $y=\frac{-gx^2}{2V_\circ^2\cos^2\alpha}+x\tan\alpha$

پرتاب افقی از ارتفاع h نسبت به زمین



محاسبه‌ی زمان سقوط: در این‌جا زمان سقوط به سرعت اولیه بستگی ندارد (A)

محاسبه‌ی جابه‌جایی افقی: چون حرکت در امتداد افق یکنواخت است جابه‌جایی افقی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

محاسبه‌ی سرعت در یک لحظه‌ی و یا یک مکان خاص: دقت کنید که بزرگی سرعت دارای دو مؤلفه افقی و قائم است.

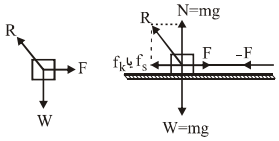
هرگاه گلوله‌ای از یک بلندی با سرعت افقی $V_\circ$ پرتاب شود مسیر حرکت آن مطابق شکل است. در این حالت زاویه‌ی

پرتابه نسبت به افق صفر و در نتیجه $\begin{cases}\sin\alpha=0\\ \cos\alpha=1\end{cases}$ است، لذا روابط حرکت پرتابی در سه نگاه کلی – تصویر حرکت افقی (آینه‌ی افقی) و تصویر حرکت قائم (آینه‌ی قائم) به صورت زیر به دست می‌آید.

(A) تصویر حرکت قائم (آینه‌ی قائم)	(B) تصویر حرکت افقی (آینه‌ی افقی)	(C) حرکت پرتابی (کلی)
$y=-\frac{1}{2}gt^2+0\rightarrow t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ $V_y=-gt+0$ $V_y^2-0=-2gy$ * مطابق شکل، نقطه‌ی اوج نداریم *زمان حرکت به $V_\circ$ بستگی ندارد.	$V_x=V_\circ$ $x=V_\circ\times t$	۱- اگر سرعت برحسب زمان مطرح باشد: $V=\sqrt{V_x^2+V_y^2}=\sqrt{V_\circ^2+(-gt)^2}$ ۲- اگر سرعت برحسب مکان مطرح باشد: $V^2-V_\circ^2=-2gy$ ۳- معادله‌ی مسیر حرکت: $y=\frac{-gx^2}{2V_\circ^2}+0$

۱. بررسی نیروهای وارد بر جسم از سکون تا لغزش: جسمی به جرم m را مطابق شکل در نظر می‌گیریم که بر سطح افقی دارای اصطکاک تحت اثر نیروی $\vec{F}$ حرکت می‌کند. این جسم تحت اثر سه نیرو می‌باشد.

الف) نیروی وزن W که از طرف کره‌ی زمین به جسم وارد می‌شود و واکنش آن از طرف جسم به مرکز کره‌ی زمین وارد می‌شود.



ب) نیروی کشش $\vec{F}$ که از طریق نخ بر جسم وارد می‌شود و واکنش آن در خلاف جهت به عامل بوجود آورنده نیروی F وارد می‌شود.

پ) نیروی سطح که آن را به دو نیروی عمودی سطح و نیروی اصطکاک تجزیه می‌کنیم.

تا زمانی که جسم ساکن است با افزایش نیروی کشش F مقدار نیروی اصطکاک در حال سکون f_s نیز افزایش می‌یابد ولی در هر لحظه این دو نیرو هم‌اندازه هستند. (چون $\Sigma F=0$ است) در یک لحظه جسم در آستانه‌ی حرکت قرار می‌گیرد. در این حالت نیروی اصطکاک ایستایی حداکثر بوده و اندازه‌ی آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{s\max} = \mu_s \times N$$

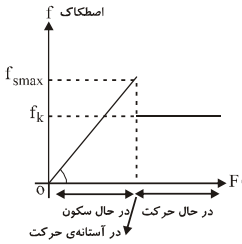
نیروی عمودی سطح (N) — ضریب اصطکاک در حال سکون — نیروی اصطکاک بیشینه در حال سکون (در آستانه‌ی لغزش)

پس از حرکت نیروی اصطکاک کاهش یافته و ثابت می‌ماند که آن را اصطکاک لغزشی گویند. (اصطکاک در حال حرکت یا اصطکاک جنبشی).

$$f_k = \mu_k \times N$$

نیروی عمودی سطح — ضریب اصطکاک لغزشی — نیروی اصطکاک جنبشی (N)

به نمودار زیر توجه کنید با افزایش نیروی کشش F نیروی اصطکاک ایستایی f_s نیز افزایش می‌یابد ولی در هر لحظه $F = f_s$ است و هنگام حرکت نیروی اصطکاک لغزشی f_k ثابت بوده و مقدارش از $f_{s\max}$ کم‌تر است.

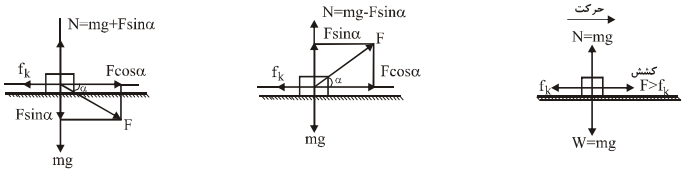


$$\begin{cases} f_{s\max} = \mu_s \times N \\ f_k = \mu_k \times N \end{cases} \Rightarrow f_{s\max} > f_k \Rightarrow \mu_s > \mu_k$$

شرط نلغزیدن جسم بر روی سطح $F \le f_{s\max}$

شرط آن‌که جسم بر روی سطح نلغزد آن است که نیروی کشش $\mathbf{F}$ از $f_{s\max}$ کوچک‌تر باشد.

۲. اهمیت نیروی واکنش عمودی سطح در محاسبه‌ی نیروی اصطکاک: نیروی عمودی سطح در شکل‌های مختلف با توجه به نیروهای وارد بر جسم متفاوت است بنابراین با تجزیه‌ی نیروها در دو راستای موازی سطح و عمود بر سطح، نیروی عمودی سطح را مشخص کرده سپس نیروی اصطکاک را به‌دست می‌آوریم. در شکل زیر چند نمونه برای سطح افقی نشان داده شده است.



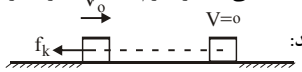
در مورد نیروی سطح در حالت‌های مختلف می‌توان نوشت:

۱) $R = \sqrt{N^2 + f_s^2}$ (در حال سکون)

۲) $R = \sqrt{N^2 + f_{s\max}^2} \xrightarrow{F_{s\max} = \mu_s N} R = N\sqrt{1 + \mu_s^2}$ (در آستانه‌ی حرکت)

$R = \sqrt{N^2 + f_k^2} \Rightarrow R = N\sqrt{1 + \mu_k^2}$ (در حال حرکت)

۱. محاسبه‌ی شتاب توقف: اگر مطابق شکل جسمی با سرعت اولیه‌ی $V_\circ$ بر سطح افقی حرکت داده شود، (پرتاب شود) اگر اصطکاک ناچیز باشد حرکت جسم با سرعت $V_\circ$ یکنواخت خواهد بود، در غیر این‌صورت در اثر نیروی اصطکاک با حرکت کند شونده پس از زمان t_s و طی مسافت d_s متوقف می‌شود. شتاب حرکت $|a| = \mu_k g$ خواهد بود. این شتاب مستقل از جرم جسم است، یعنی تغییر جرم جسم تاثیری بر شتاب حرکت و زمان توقف و مسافت طی شده تا توقف نخواهد داشت. به شکل و رابطه‌های زیر دقت کنید:



$$\Sigma F = ma \Rightarrow \circ - f_k = ma \Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow |a| = \mu_k g$$

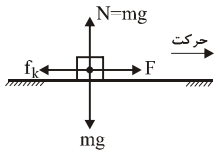
۲. محاسبه‌ی زمان و مسافت توقف:

$$\begin{cases} t_s = \dfrac{V_\circ}{|a|} \\ d_s = \dfrac{V_\circ^2}{|2a|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_s = \dfrac{V_\circ}{\mu_k g} \\ d_s = \dfrac{V_\circ^2}{2\mu_k g} \end{cases}$$

حرکت یکنواخت و شتاب‌دار جسم بر سطح افقی

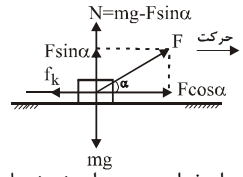
۱. حرکت یکنواخت جسم در سطح افقی: اگر برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر صفر باشد به عبارتی نیروی محرک هم اندازه با نیروی مقاوم باشد، حرکت جسم بر سطح افقی یکنواخت خواهد بود. به نمونه‌های زیر توجه کنید.

الف)



$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - f_k = ma = 0 \Rightarrow F = f_k = \mu_k mg$$

ب)



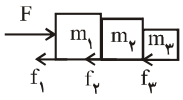
$$f_k = \mu_k N = \mu_k (mg - F\sin\alpha) \xrightarrow{a=0} \Sigma F = ma = 0 \Rightarrow F\cos\alpha = \mu_k (mg - F\sin\alpha)$$

۲. حرکت شتاب‌دار جسم بر سطح افقی: چنان‌چه برآیند نیروهای وارد بر جسم برابر صفر نباشد حرکت شتاب‌دار خواهد بود. برای نمونه‌های فوق در این حالت می‌توان نوشت:

الف) $F - f_k = ma \Rightarrow F - \mu_k mg = ma$

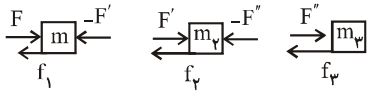
ب) $F\cos\alpha - f_k = ma \Rightarrow F\cos\alpha - \mu_k (mg - F\sin\alpha) = ma$

محاسبه‌ی نیروی تماسی بین دو جسم: در نظر بگیرید چند جسم مطابق شکل تحت اثر نیروی محرک F بر سطح افقی حرکت می‌کنند و سطح دارای اصطکاک است. کل مجموعه تحت اثر نیروهای خارجی محرک **F** و مقاوم f_1 و f_2 و f_3 هستند.



(برای کل دستگاه)

$$\Sigma F = \Sigma m \times a \Rightarrow F - (f_1 + f_2 + f_3) = (m_1 + m_2 + m_3)a$$



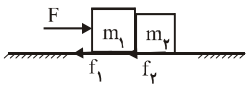
اگر اجسام را جداگانه در نظر بگیریم نیروهای کنش و واکنش بین آن‌ها به صورت مقابل خواهد بود.

مانند نمونه‌ی قبلی می‌توان قانون دوم نیوتون را برای کل مجموعه و یا تک تک آن‌ها و یا دو جسم را با هم در نظر گرفت.

تعادل اجسام در اثر نیروهای همراستا

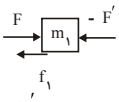
شرط تعادل اجسام: در نظر بگیرید یک یا چند جسم در راستای افقی یا قائم در حال تعادل باشند (ساکن باشند) با توجه به این‌که $(a = 0 \Rightarrow \Sigma F = 0)$ برآیند نیروهای وارد بر هر یک از اجزاء و کل مجموعه برابر صفر خواهد بود. به نمونه‌ی شکل‌های زیر که اجسام در حال تعادل هستند توجه کنید.

الف) دو وزنه تحت اثر نیروی محرک F و اصطکاک‌های f_1 و f_2 در حال تعادل هستند.



(برای مجموعه) $\Sigma F = 0 \Rightarrow F - f_1 - f_2 = 0 \Rightarrow F = f_1 + f_2$

(برای m_1) $\Rightarrow$



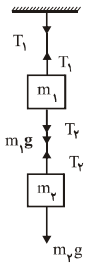
$\Sigma F = 0 \Rightarrow F - F' - f_1 = 0 \Rightarrow F = F' + f_1$

(برای m_2) $\Rightarrow$



$\Sigma F = 0 \Rightarrow F' - f_2 = 0 \Rightarrow F' = f_2$

ب) دو جسم آویخته شده با نخ‌های سبک در حال تعادل هستند.

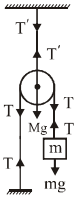


(برای مجموعه‌ی دو وزنه) $\Rightarrow T_1 = (m_1 + m_2)g$

(برای m_1) $\Rightarrow T_1 = T_2 + m_1 g$

(برای m_2) $\Rightarrow T_2 = m_2 g$

پ) جسم m به وسیله‌ی نخ سبک عبوری از قرقره‌ای به جرم M در حال تعادل است. کشش در سرتاسر نخ سبک یکسان است.



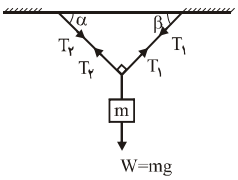


(برای جسم m) $\Rightarrow T = mg$

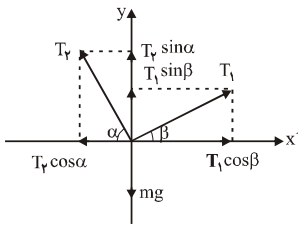
(برای قرقره) $\Rightarrow T' = 2T + Mg = 2mg + Mg$

توجه: اگر در طول مسیر یک نخ، نیروسنج قرار دهیم، همواره نیروسنج کشش آن نخ را نشان می‌دهد.

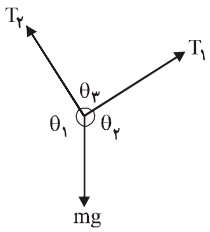
تعادل اجسام در اثر نیروهای ناهم‌راستا



شرط تعادل و محاسبه‌ی نیروها: اگر جسمی تحت اثر چند نیرو واقع در یک صفحه در حال تعادل باشد برآیند این نیروها برابر صفر خواهد بود. برای محاسبه‌ی نیروها، می‌توان هر یک از نیروهای وارد بر جسم را در راستای محورهای x و y تجزیه کرد و برآیند مؤلفه‌های نیروها را بر دو محور مساوی صفر قرار داد. مانند نمونه‌ی زیر که جسمی بوسیله‌ی دو نخ سبک از سقف آویخته شده است. این جسم تحت اثر سه نیروی وزن $w = mg$ و کشش‌های نخ T_1 و T_2 در حال تعادل است.



$$\begin{cases}\Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T_1\cos\beta = T_2\cos\alpha \\ T_2\sin\alpha + T_1\sin\beta = mg\end{cases}$$

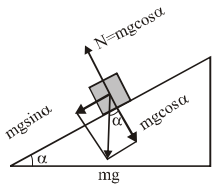


تذکر: استفاده از رابطه‌ی سینوس‌ها: در قسمت بردارها فرا گرفته‌اید که اگر برآیند سه نیرو برابر صفر باشد می‌توان از تساوی نسبت‌های زیر استفاده کرد.

$$\frac{T_1}{\sin\theta_1} = \frac{T_2}{\sin\theta_2} = \frac{mg}{\sin\theta_3}$$

سطح شیب‌دار تنها

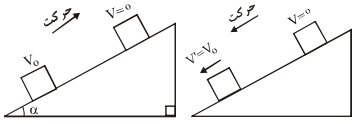
لغزش آزاد جسم بر سطح شیب‌دار بدون اصطکاک به سمت پایین



بررسی نیروها و محاسبه‌ی شتاب لغزش: در این‌حالت جسم تحت اثر دو نیرو خواهد بود، نیروی وزن mg و نیروی واکنش عمودی سطح N. (چون اصطکاک ناچیز است نیروی سطح همان نیروی عمودی سطح خواهد بود). با تجزیه نیروی وزن به دو مؤلفه‌ی عمود بر هم داریم:

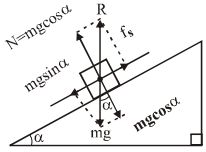
$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg\sin\alpha = ma \Rightarrow |a| = g\sin\alpha$$

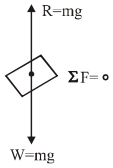
نتیجه‌ی مهم: اگر جسمی را با سرعت اولیه V_0 از پایین سطح شیب‌دار بدون اصطکاک به سمت بالا پرتاب کنیم، باشتاب $g\sin\alpha$ کندشونده بالا می‌رود و با همان اندازه‌ی شتاب تندشونده، به پایین برمی‌گردد. این شتاب مستقل از جرم جسم است. یعنی تغییر جرم جسم تاثیری بر شتاب و زمان رفت و برگشت و سرعت ندارد. زمان رفت و برگشت به نقطه‌ی پرتاب یکسان و سرعت پس از بازگشت به نقطه‌ی پرتاب هم اندازه با V_0 است. (مانند پرتاب جسم در راستای قائم در شرایط خلاء)



$$t_s = \left|\frac{V_0}{a}\right| \text{ (زمان)} \qquad 2t_s = \left|\frac{2V_0}{a}\right| \text{ (زمان رفت و برگشت)} \qquad d_s = \left|\frac{V_0^2}{2a}\right| \text{ (حداکثر مسافت طی شده به سمت بالا)}$$

سکون یا لغزش یکنواخت جسم تنها روی سطح شیب‌دار





تعیین ضریب اصطکاک ایستایی: حالتی را در نظر بگیرد که جسم ساکن بماند و به پایین تلغزد. جسم تحت اثر دو نیروی وزن (W) و نیروی سطح (R) است. چون $\Sigma F = 0$ می‌باشد پس $R = W = mg$ خواهد بود. مولفه‌های دو نیرو را در شکل نشان می‌دهیم.

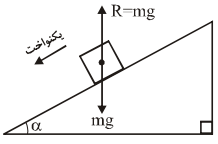
در این حالت نیروی اصطکاک از نوع ایستایی و برابر است با:

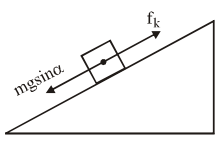
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow f_s = mg\sin\alpha$$

اگر زاویه‌ی سطح شیب‌دار را به تدریج افزایش دهیم تا جسم در آستانه‌ی حرکت به سمت پایین قرار گیرد می‌توان نوشت:

$$f_{s\max} = \mu_s \times N = \mu_s mg\cos\alpha = mg\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \mu_s$$

شرط نلغزیدن جسم در این حالت این است که $\tan\alpha \le \mu_s$ باشد، اگر $\tan\alpha > \mu_s$ باشد جسم به پایین می‌لغزد.



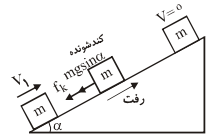


تعیین ضریب اصطکاک لغزشی: اگر هنگام لغزش جسم به سمت پایین سطح شیب‌دار، زاویه سطح را با افق کاهش دهیم تا جسم به طور یکنواخت بلغزد، $\Sigma F = 0$ خواهد شد. در این‌صورت نیروی سطح وارد بر جسم $R = W = mg$

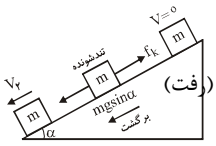
خواهد بود و $\mu_k = \tan\alpha$ می‌شود. با مقایسه این حالت با لغزش شتابدار جسم نتیجه می‌شود $\mu_k < \mu_s$ است.

$$\Sigma F = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha = f_k = \mu_k mg\cos\alpha \Rightarrow \mu_k = \tan\alpha$$

پرتاب جسم روی سطح شیب‌دار دارای اصطکاک و بررسی رفت و برگشت آن



محاسبه‌ی شتاب رفت و برگشت: اگر مطابق شکل جسمی را بر سطح شیب‌داری که دارای اصطکاک است با سرعت اولیه‌ی V_1 به سمت بالا پرتاب کنیم با شتاب $\boxed{a_1 = -g(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)}$ کندشونده بالا می‌رود و در صورت بازگشت با شتاب $\boxed{a_2 = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)}$ تندشونده بر می‌گردد. این شتاب‌ها مستقل از جرم جسم هستند و با تغییر جرم، اندازه‌ی شتاب‌ها تغییر نمی‌کند.



$$(\text{رفت})\ \Sigma F = ma_1 \Rightarrow -mg\sin\alpha - f_k = ma_1 \quad , \quad f_k = \mu_k mg\cos\alpha \Rightarrow a_1 = -g(\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha)$$

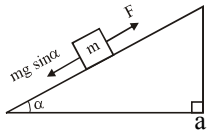
$$(\text{برگشت})\ \Sigma F = ma_2 \Rightarrow mg\sin\alpha - f_k = ma_2 \Rightarrow a_2 = g(\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha)$$

نتیجه‌ی مهم: با توجه به روابط مستقل از زمان برای رفت و برگشت می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} 0 - V_1^2 = -2a_1\Delta x \\ V_2^2 - 0 = 2a_2\Delta x \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| = \frac{\sin\alpha + \mu_k\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu_k\cos\alpha} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| = \frac{\tan\alpha + \mu_k}{\tan\alpha - \mu_k}$$

بررسی حرکت یک جسم بر سطح شیب‌دار تحت اثر نیروی محرک F موازی سطح شیب‌دار

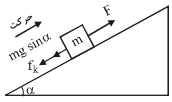
۱. نیروی اعمال شده به طرف بالا است. هنگامی که یک جسم بر سطح شیب‌دار تحت اثر نیروی محرک F موازی سطح شیب‌دار قرار می‌گیرد ممکن است حالت‌های زیر اتفاق بیفتد.



الف) سطح شیب‌دار بدون اصطکاک بوده و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند و یا بر سطح شیب‌دار ساکن می‌ماند در این صورت خواهیم داشت:

$$a = 0 \Rightarrow \Sigma F = ma = 0 \Rightarrow F = mg\sin\alpha$$

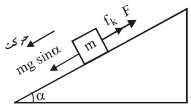
ب) سطح شیب‌دار دارای اصطکاک بوده و جسم به سمت بالا با شتاب (a) حرکت کند.



$$\Sigma F = ma \Rightarrow F - mg\sin\alpha - f_k = ma$$

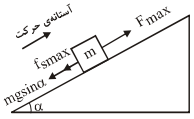
تذکر: حرکت ممکن است تندشونده $(a > 0)$ و یا کندشونده $(a < 0)$ باشد.

پ) سطح شیب‌دار دارای اصطکاک بوده و جسم به سمت پایین با شتاب (a) حرکت کند.



$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg\sin\alpha - F - f_k = ma$$

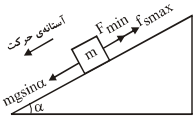
ت) برای تعیین حداکثر و حداقل نیروی F برای این‌که جسم بر سطح شیب‌دار دارای اصطکاک ساکن بماند. یک بار جسم را در آستانه‌ی لغزش به سمت بالا در نظر می‌گیریم و بار دوم در آستانه‌ی لغزش به سمت پایین و حدود نیروی F را تعیین می‌کنیم.



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{max} = f_{smax} + mg\sin\alpha$$

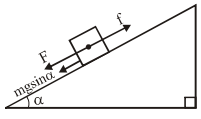
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F_{min} = mg\sin\alpha - f_{smax}$$

بنابراین شرط این‌که جسم بر سطح شیب‌دار ساکن بماند این است که نیروی F در حدود زیر باشد.



$$mg\sin\alpha - f_{smax} \le F \le mg\sin\alpha + f_{smax}$$

۲. نیروی اعمال شده به طرف پایین است: اگر نیروی F به سمت پایین باشد ممکن است جسم در آستانه‌ی حرکت به سمت پایین باشد در این صورت می‌توان نوشت:



$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + mg\sin\alpha = f_{smax}$$

اگر حرکت یکنواخت به سمت پایین باشد می‌توان نوشت:

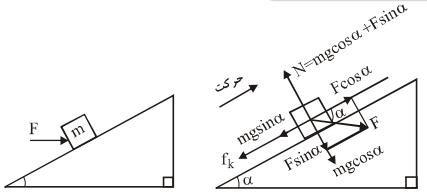
$$\Sigma F = 0 \Rightarrow F + mg\sin\alpha = f_k$$

و در نهایت اگر حرکت شتاب‌دار به سمت پایین باشد می‌توان نوشت:

$$F + mg\sin\alpha - f_k = ma$$

بررسی حرکت جسم روی سطح شیب‌دار تحت اثر نیروی محرک F ناموازی سطح شیب‌دار

۱. تحلیل نیروها و رفتار نیروی اصطکاک: اگر نیروی وارد بر جسم ناموازی با سطح شیبدار باشد، مانند شکل زیر این نیرو را بر روی دو راستای موازی با سطح و عمود بر سطح تجزیه می‌کنیم. ممکن است جسم به سمت بالا حرکت کند و یا به سمت پایین و یا بر سطح ساکن بماند و یا در آستانه‌ی لغزش به سمت بالا و یا پایین



باشد.اگر جسم به سمت بالا حرکت کند خواهیم داشت:

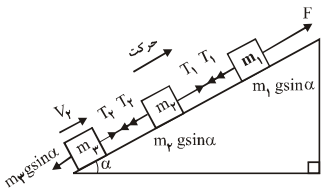
$$\begin{cases} F\cos\alpha - mg\sin\alpha - f_k = ma \\ f_k = \mu_k (mg\cos\alpha + F\sin\alpha) \end{cases}$$

اگر جسم به سمت پایین حرکت کند، اصطکاک به سمت بالا خواهد بودو می توان نوشت: $mg\sin\alpha - F\cos\alpha - f_k = ma$

برای حرکت یکنواخت $a = 0$ و در آستانه‌ی لغزش اصطکاک برابر $f_{s\max}$ خواهد بود.

بررسی حرکت چند جسم با یکدیگر بر سطح شیب‌دار

تحلیل نیروها و محاسبه‌ی کشش نخ‌ها: اگر چند جسم با یکدیگر مانند نمونه‌ی شکل زیر بر سطح شیبدار بدون اصطکاک به سمت بالا در حرکت باشند،می‌توان قانون دوم نیوتون را برای مجموعه‌ی وزنه‌ها و یا تک تک آن‌ها و یا دو به دو در نظر گرفت. با توجه به برآیند نیروها و جهت حرکت، ممکن است حرکت یکنواخت یا تندشونده و یا کندشونده باشد.



(برای کل دستگاه) $F - m_1 g\sin\alpha - m_2 g\sin\alpha - m_3 g\sin\alpha = (m_1 + m_2 + m_3)a$

(m_1 برای) $F - T_1 - m_1 g\sin\alpha = m_1 a$

می‌توان از نسبت‌های زیر نیز در این حالت که وزنه‌ها شرایط یکسانی دارند، استفاده کرد. $\frac{F}{m_1+m_2+m_3} = \frac{T_1}{m_2+m_3} = \frac{T_2}{m_3}$

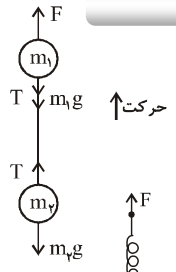
اگر سطح دارای اصطکاک باشد به شرطی که ضریب اصطکاک جنبشی برای وزنه‌های در حال حرکت یکسان باشد. نسبت‌های فوق برقرار هستند و اصطکاک و مولفه‌های $mg\sin\alpha$ بی تاثیر هستند.

کاربردقانون‌های نیوتون در راستای قائم

بررسی حرکت یک یا چندجسم در راستای قائم

محاسبه‌ی شتاب دستگاه و کشش طناب: اگر یک یا چند جسم در راستای قائم در حال حرکت باشند با توجه به جهت حرکت و نیروهای وارد بر اجسام می‌توان قانون دوم نیوتون را برای محاسبه‌ی شتاب حرکت یا کشش‌های نخ اجرا نمود.

به نمونه شکل‌های زیر توجه کنید. (شرایط خلاء)



الف) دو جسم m_1 و m_2 به سمت بالا کشیده می‌شوند، قانون دوم نیوتون را برای کل دستگاه و تک تک می‌توان نوشت:



$$\begin{cases} F - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)a & \text{(برای کل دستگاه)} \\ F - T - m_1 g = m_1 a & (m_1 \text{ برای}) \end{cases}$$

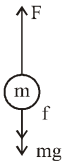
$$T - m_2 g = m_2 a \qquad (m_2 \text{ برای}) \qquad \frac{F}{m_1+m_2} = \frac{T}{m_2}$$

ب) جسم m به وسیله‌ی فنر به سمت بالا کشیده می‌شود باتوجه به قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:

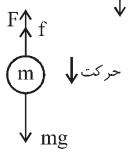
$\Sigma F = ma \Rightarrow F - mg = ma \;,\; F = kx$ (نیروی کشش فنر)

اثر مقاومت هوا در حرکت اجسام در راستای قائم

۱. تحلیل حرکت جسم در هوا تحت اثر نیروی قائم: اگر جسم در هوا در راستای قائم حرکت کند، نیروی مقاومت هوا وارد بر جسم همواره در خلاف جهت حرکت (نیروی مقاوم) خواهد بود. به شکل زیر توجه کنید. جسمی تحت اثر نیروی F و مقاومت هوای f به سمت بالا یا پایین حرکت می‌کند.



الف) جسم به سمت بالا حرکت می‌کند.

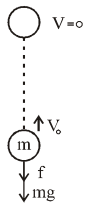


$$F - f - mg = ma$$

ب) جسم به طرف پایین حرکت می‌کند.

$$mg - f - F = ma$$

۲. سقوط آزاد جسم در هوا: اگر جسمی را در هوا رها کنیم به تدریج سرعت جسم افزایش یافته و مقاومت هوا نیز افزایش می‌یابد. ممکن است قبل از برخورد با زمین مقاومت هوا و وزن جسم هم اندازه شوند و حرکت جسم یکنواخت گردد (سرعت حد)



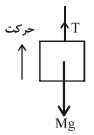
$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - f = ma \xrightarrow{mg=f} a = 0 \quad \text{(حرکت یکنواخت)}$$

اگر جسم را به سمت بالا پرتاب کنیم حرکت کندشونده خواهد بود می‌توان نوشت: $\Sigma F = ma \Rightarrow 0 - (mg + f) = ma$

آسانسور

نیروی کشش کابل- نیروی عمودی سطح و .....

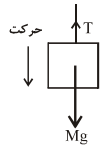
۱. محاسبه‌ی شتاب و کشش کابل آسانسور: با توجه به شکل نیروی کشش کابل آسانسور را با توجه به نوع حرکت و جهت حرکت محاسبه می‌کنیم.



$$T - Mg = Ma \Rightarrow T = M(g + a) \begin{cases} a > 0 & \text{تندشونده} \quad \text{(شتاب رو به بالا)} \\ a < 0 & \text{کندشونده} \quad \text{(شتاب رو به پایین)} \end{cases}$$

الف) حرکت به سمت بالا.

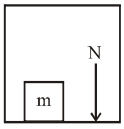
ب) حرکت به سمت پایین.

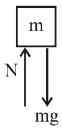


$$Mg - T = Ma \Rightarrow T = M(g - a) \begin{cases} a > 0 & \text{تندشونده} \quad \text{(شتاب رو به پایین)} \\ a < 0 & \text{کندشونده} \quad \text{(شتاب رو به بالا)} \end{cases}$$

ج) اگر آسانسور ساکن باشد و یا با سرعت ثابت حرکت کند، کشش کابل هم اندازه با وزن آسانسور است. $a = 0 \Rightarrow T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg$

۲. محاسبه‌ی نیروی سطح وارد بر شخص یا جسم داخل آسانسور: اگر شخصی به جرم $\mathbf{m}$ در آسانسور روی باسکول ایستاده باشد و یا وزنه‌ای توسط فنر (نیروسنج) از سقف آسانسور آویخته شده باشد. عددی که باسکول یا نیروسنج نشان می‌دهند. هم اندازه با نیروی عمودی سطح یا نیروی کشسانی فنر است.





۱) $N - mg = ma \Rightarrow N = m(g + a)$

۲) $mg - N = ma \Rightarrow N = m(g - a)$

۳) $N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

محاسبه‌ی نیروی کشش نخ یا فنر متصل به جسم که از سقف آویزان است.

۱) $F - mg = ma \Rightarrow F = m(g + a)$ ۲) $mg - F = ma \Rightarrow F = m(g - a)$ ۳) $F - mg = 0 \Rightarrow F = mg$

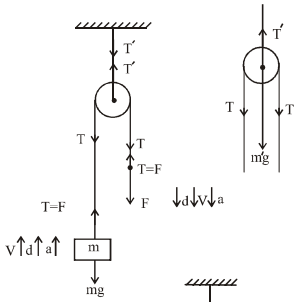
اگر حرکت تندشونده باشد $a > 0$ و در صورت کندشونده بودن $a < 0$ خواهد

۴) $\mathbf{F = kx} \rightarrow$ تغییر طول فنر $(\mathbf{m})$

ثابت فنر $(N/m) \leftarrow$

قرقره‌ی ثابت و متحرک و ماشین آتوود

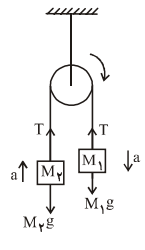
۱. قرقره‌ی ثابت (حالت تعادل): مطابق شکل با عبور نخ سبک از قرقره و وارد کردن نیروی محرک $\mathbf{F}$ به انتهای نخ کشش در سرتاسر نخ یکسان و هم اندازه با نیروی $\mathbf{F}$ است.



در حالت تعادل $F = T = mg$ و $T' = 2T = 2F$ می‌باشد و اگر در حالت تعادل جرم قرقره m' باشد، می‌توان نوشت: $T' = 2T + m'g = 2F + m'g$

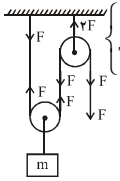
اگر $F > mg$ باشد حرکت وزنه تندشونده به سمت بالا خواهد بود. $(F - mg = ma)$

و اگر $F < mg$ باشد حرکت وزنه تندشونده به سمت پایین $(mg - F = ma)$



تذکر: بزرگی سرعت، شتاب و جابه‌جایی در سمت راست و چپ قرقره یکسان است.

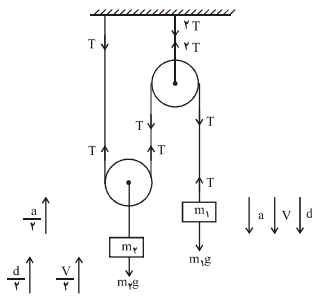
۲. بررسی شتاب و کشش طناب: ماشین آتوود، مطابق شکل از یک قرقره‌ی ثابت و دو وزنه m_1 و m_2 تشکیل شده است. اگر $m_1 > m_2$ در نظر گرفته شود وزنه m_1 با شتاب به پایین می‌آید و وزنه m_2 با همان اندازه‌ی شتاب بالا می‌رود. هر وزنه تحت اثر دو نیروی وزن و کشش نخ می‌باشد. کشش نخ و شتاب حرکت از روابط زیر محاسبه می‌شود.



$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \dfrac{|m_1 - m_2|}{m_1 + m_2} \times g \\ T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \times g \end{cases}$$

۱.حالت تعادل: در حالت تعادل داریم: $2F = (m + m')g$ (m' جرم قرقره است.)

۲. بررسی شتاب و کشش نخ: در شکل مقابل ترکیب یک قرقره‌ی ثابت و یک قرقره‌ی متحرک نشان داده شده است. اگر وزنه‌ی m_1 با شتاب **a** پایین بیاید، وزنه‌ی m_2 با شتاب $\frac{a}{2}$ بالا می‌رود. اگر سرعت وزنه‌ی m_1 برابر **V** باشد، سرعت وزنه‌ی m_2 برابر $\frac{V}{2}$ خواهد بود. جابه‌جایی وزنه‌ی m_2 نصف جابه‌جایی وزنه‌ی m_1 است. می‌توان نوشت:

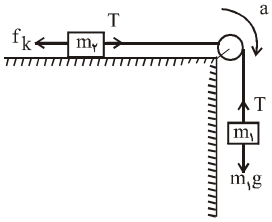


$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ 2T - m_2 g = m_2 \times \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

کاربرد قانون‌های نیوتون در سطوح ترکیبی

قائم و شیب‌دار،افقی و شیب‌دار

سطوح (افقی و قائم): چنانچه دو یا چند جسم بر سطوح ترکیبی، مانند نمونه‌ی شکل‌های زیر حرکت کنند با توجه به جهت حرکت می‌توان قانون دوم نیوتون را برای کل دستگاه یا تک تک اجسام در نظر گرفت. انتخاب هر یک از حالات برای شروع حل یک تست بستگی به داده‌های تست دارد.



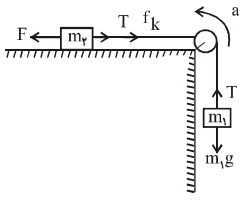
(برای کل دستگاه) $m_1 g - f_k = (m_1 + m_2)a$

(m_1 برای) $m_1 g - T = m_1 a$

(m_2 برای) $T - f_k = m_2 a$

تذکر مهم: هنگام استفاده از قانون دوم نیوتون برای کل دستگاه، نیروهای کشش نخ را در نظر نمی‌گیریم. این نیروها به عنوان نیروهای داخلی خواهند بود.

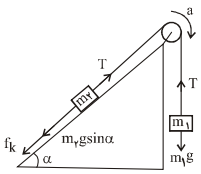
(برای کل دستگاه) $F - m_1 g - f_k = (m_1 + m_2)a$



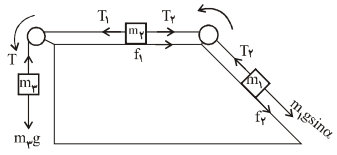
(m_2 برای) $F - T - f_k = m_2 a$

(m_1 برای) $T - m_1 g = m_1 a$

(برای کل دستگاه) $m_1 g - m_2 g \sin\alpha - f_k = (m_1 + m_2)a$



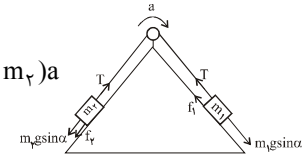
(m_2 برای) $T - m_2 g \sin\alpha - f_k = m_2 a$

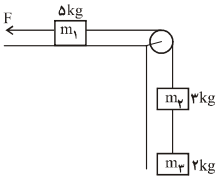


(برای کل دستگاه) $m_3 g - f_1 - f_2 - m_1 g \sin\alpha = (m_1 + m_2 + m_3)a$

(m_2 برای) $T_1 - T_2 - f_1 = m_2 a$

$m_1 g\sin\alpha - f_1 - f_2 - m_2 g\sin\alpha = (m_1 + m_2)a$ (برای کل دستگاه)

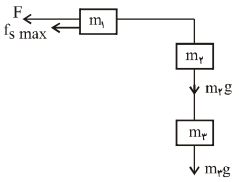




مثال: در شکل مقابل جرم قرقره و نخ‌ها ناچیز است. حداقل نیروی لازم برای جلوگیری از حرکت وزنه‌های آویخته شده به سمت پایین $F = ۴۰N$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین وزنه‌ی m_1 و سطح افقی چه مقدار است؟

۱) ۰/۲۵ ۲) ۰/۲

۳) ۰/۱ ۴) ۰/۱۵



پاسخ: گزینه‌ی (۲): حداقل نیروی **F** زمانی است که وزنه‌های m_2 و m_3 در آستانه‌ی حرکت به سمت پایین باشند. در این‌صورت نیروی اصطکاک $f_{s\,max}$ در جهت نشان داده شده خواهد بود.

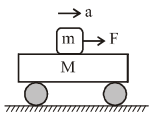
$$F + f_{s\,max} = m_2 g + m_3 g$$
$$\Rightarrow F + \mu_s m_1 g = m_2 g + m_3 g$$
$$\Rightarrow ۴۰ + \mu_s \times ۵۰ = ۵۰$$
$$\Rightarrow \mu_s = ۰/۲$$

لغزش دو یا چند جسم بر روی یکدیگر – تکانه (اندازه‌ی حرکت)

بررسی نیروها و تعیین شتاب در لغزش دو یا چند جسم روی یکدیگر

دو جسم را در نظر بگیرید که تحت اثر یک نیروی محرک افقی F بر سطح افقی حرکت می‌کنند. در این نمونه دو حالت زیر را در نظر گرفته و نیروها و شتاب حرکت را بررسی می‌کنیم.

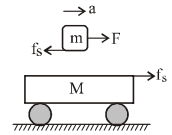
۱. نیرو بر جسم بالایی وارد می‌شود: در نظر بگیرید مطابق شکل جسمی به جرم **m** بر روی یک چهارچرخه به جرم **M** قرار دارد و تحت اثر نیروی کشش **F** بر سطح افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کنند. اگر جسم بر روی چهارچرخه نلغزد. هر دو با هم با شتاب **a** حرکت می‌کنند. نیروی اصطکاک بین دو جسم برای چهارچرخه نیروی محرک است و آن را به جلو می‌راند.



برای محاسبه شتاب حرکت و نیروی اصطکاک می توان نوشت: $F = (m+M)a$ (برای کل دستگاه)

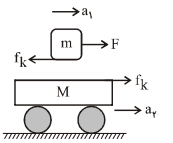
$F - f_s = ma$ (برای m)

تا زمانی که جسم روی چهارچرخه نمی‌لغزد $Ma \le \mu_s mg$ بوده و خواهیم داشت: $f_s = Ma$ (برای M)



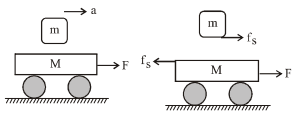
$$a \le \frac{\mu_s mg}{M}$$ (شرط نلغزیدن)

اگر $a > \frac{\mu_s mg}{M}$ باشد، جسم m بر روی چهارچرخه می‌لغزد و هر دو با حرکت تندشونده حرکت می‌کنند. **جسم بر سطح چهارچرخه بلغزد:** جسم با شتاب a_1 و چهارچرخه با شتاب $a_2 < a_1$ هر دو به طرف راست حرکت خواهند کرد.



$$\begin{cases} F - f_k = ma_1 \\ f_k = Ma_2 \end{cases} \quad , \quad f_k = \mu_k mg$$

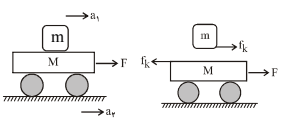
۲. نیرو بر جسم پایینی وارد می‌شود: اگر نیروی کشش **F** را بر چهارچرخه وارد کنیم، برای دو حالت خواهیم داشت.



وزنه روی چهارچرخه نلغزد. $F = (m+M)a \quad f_s = m \times a \quad F - f_s = Ma$

شرط نلغزیدن $a \le \mu_s \times g$

وزنه روی چهارچرخه می‌لغزد. در این حالت هر دو با حرکت تندشونده به طرف راست حرکت می‌کنند و شتاب جسم m کم‌تر خواهد بود. $(a_1 < a_2)$



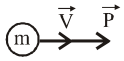
$$f_k = ma_1$$
$$F - f_k = Ma_2$$
$$f_k = \mu_k mg$$

تکانه (اندازه‌ی حرکت) اجسام

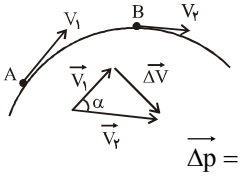
تعریف: حاصلضرب جرم یک جسم در سرعت جسم را اندازه‌ی حرکت یا تکانه گویند. اندازه‌ی حرکت کمیتی است، برداری هم جهت با بردار سرعت.

$$\vec{P} = \vec{m} \times \vec{V} \rightarrow (m/s) \text{ سرعت}$$

(kgm/s) اندازه‌ی حرکت $\leftarrow$ $\rightarrow$ (kg) جرم



تغییرات تکانه: تغییرات تکانه $(\Delta\vec{P})$ برداری است هم‌جهت با بردار تغییر سرعت $(\Delta\vec{V})$ به

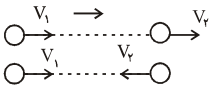


حالت‌های زیر توجه کنید:

الف) متحرک بر مسیر منحنی حرکت می کند و سرعت آن از $\vec{V}_1$ به $\vec{V}_2$ می‌رسد.

با محاسبه‌ی بزرگی بردار $\Delta\vec{V}$، تکانه را محاسبه می‌کنیم. $\overrightarrow{\Delta p} = m \times \overrightarrow{\Delta V} = m(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$

ب) متحرک بر خط راست بدون تغییر جهت یا با تغییر جهت حرکت می‌کند (جهت مثبت به طرف راست)



$\Delta p = m(V_2 - V_1)$ (بدون تغییر جهت)

$\Delta p = m(-V_2 - V_1)$ (با تغییر جهت)

قانون دوم نیوتون با استفاده از تغییرات تکانه

تغییر تکانه‌ی یک جسم در واحد زمان برابر نیروی متوسطی است که بر جسم وارد می‌شود. به اثبات توجه کنید:

$$\text{نیروی متوسط} \leftarrow \bar{\vec{F}} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} = \frac{m\overrightarrow{V_2} - m\overrightarrow{V_1}}{t} = \frac{m \times \overrightarrow{\Delta V}}{t} = m \times \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t} = m \times \bar{\vec{a}} \rightarrow \text{شتاب متوسط}$$

$$\text{نیروی لحظه‌ای} \leftarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m \times \vec{a} \rightarrow \text{شتاب لحظه‌ای}$$

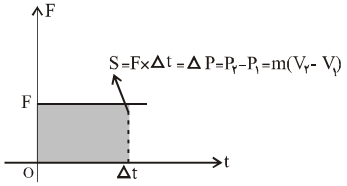
تذکر: رابطه‌ی بین تکانه‌ی P و انرژی جنبشی (K) یک جسم به صورت مقابل است : $K = \frac{P^2}{2m}$

نمودار نیرو- زمان و کاربرد آن در تکانه

نیرو مشتق تکانه است نسبت به زمان. به عبارتی نیروی متوسط آهنگ متوسط تغییر اندازه‌ی حرکت است.

$\frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow$ آهنگ تغییر اندازه‌ی حرکت $\qquad \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \Rightarrow$ آهنگ متوسط تغییر اندازه‌ی حرکت

سطح زیر نمودار نیرو – زمان در یک مدت معین برابر تغییرات اندازه‌ی حرکت است در آن مدت.



حاصل‌ضرب نیرو در مدت اثر نیرو را **ضربه** گویند. $\bar{\vec{F}} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t} \Rightarrow \overrightarrow{\Delta P} = \underbrace{\bar{\vec{F}} \times \Delta t}_{\text{ضربه } (N.s)}$

سرعت زاویه‌ای متوسط، لحظه‌ای و مکان زاویه‌ای

مفاهیم اولیه: هرگاه یک نقطه‌ی مادی به جرم m روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند، می‌توان کمیت های زیر را برای این حرکت تعریف کرد:

۱. زمان تناوب-دوره-پریود (T): مدت زمانی است که متحرک روی دایره، یک دور کامل را طی می‌کند و یکای آن در SI ثانیه است.

۲. تواتر-بسامد- فرکانس(f): تعداد دوری است که متحرک در یک ثانیه انجام می‌دهد. واحد آن هرتز است و با Hz نشان داده می‌شود.

به‌راحتی می‌توان نشان داد که: $f = \frac{1}{T}$

۳. سرعت زاویه‌ای (ω): زاویه‌ای است که متحرک در یک ثانیه روی دایره طی می‌کند، سرعت زاویه‌ای از رابطه‌ی $\omega = \frac{\theta}{t}$ به‌دست می‌آید و واحد آن رادیان بر ثانیه $(\frac{rad}{s})$ است. این رابطه را به شکل‌های زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\omega = \frac{\theta}{t} \xrightarrow[t=T]{\theta=2\pi} \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

سرعت خطی و شتاب در حرکت دایره‌ای

۴.سرعت خطی: طول قوسی از دایره است که متحرک در مدت یک ثانیه طی می‌کند.

$$V=\frac{S}{t}\xrightarrow[t=T]{S=r\theta=2\pi r}V=\frac{r\times 2\pi}{T}=r\times 2\pi f=r\omega$$

شتاب در حرکت دایره‌ای: در حرکت روی مسیر دایره‌ای حتی در زمانی که متحرک با سرعت ثابت حرکت می‌کند به علت تغییر راستای بردار سرعت، سرعت متحرک متغیر می‌باشد، بنابراین تمام حرکت‌ها روی مسیر دایره ای شتاب دارمی باشند.

در حرکت یکنواخت روی مسیر دایره‌ای وجود شتاب به دلیل تغییر در راستای بردار سرعت است. راستای شتاب عمود بر راستای بردار سرعت و جهت آن به طرف مرکز دوران می‌باشد و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$a=\frac{V^2}{R}=R\omega^2=V.\omega \quad \text{(شتاب مرکزگرا)}$$

حرکت شناسی روی مسیر دایره‌ای :

الف)حرکت یکنواخت: اگر متحرک با سرعت ثابت مسیر دایره ای را طی کند، زاویه‌ی طی شده در مدت t ثانیه به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\theta=\omega t$$

ب) در صورتی که متحرک با شتاب روی دایره حرکت کند، تمام روابط حرکت روی مسیر مستقیم برای این حرکت نیز قابل استفاده می‌باشد.

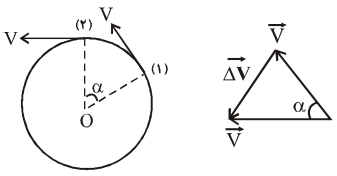
$$\theta=f(t)\ ,\ \omega=\frac{d\theta}{dt}\ ,\ \alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

نیروی مرکزگرا و تکانه

نیروی مرکزگرا: نیرویی است در راستای شعاع دایره‌ی مسیر، این نیرو که همواره بر بردار سرعت عمود بوده و جهت آن روبه مرکز دایره است. بزرگی این نیرو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$F=ma=mr\omega^2=m\frac{V^2}{R}=mV\omega$$

تغییر تکانه در حرکت دایره‌ای یکنواخت: تغییر تکانه‌ی جسمی به جرم m که با سرعت V بر روی یک مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند را به صورت زیر تعیین می‌شود.

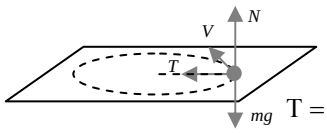


$$\begin{cases}\Delta P=m\Delta V\\ \Delta V=2V\sin(\frac{\alpha}{2})\end{cases}$$

کاربرد حرکت دایره‌ای در صفحه‌ی افقی

نقش نیروی کشش نخ متصل به جسم به عنوان نیروی مرکزگرا

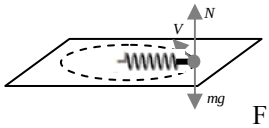
نقش کشش نخ به عنوان نیروی مرکزگرا: گلوله‌ای به انتهای نخی بسته و مجموعه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک می‌تواند حول نقطه‌ی O دوران کند. در شکل روبه‌رو نیروهای وارد بر جسم مشخص شده و فقط نیروی کشش نخ به طرف مرکز می‌باشد.



$$T=ma=m\frac{V^2}{r}=mr\omega^2=mV\omega$$

نقش نیروی فنر به عنوان نیروی مرکزگرا

اگر وزنه به انتهای فنری بسته و روی سطح افقی دوران کند، نیروی فنر همان نیروی مرکزگرا است و داریم:

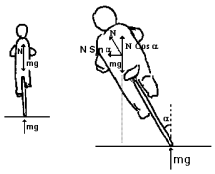


$$F=k\Delta L=ma=m\frac{V^2}{r}=mr\omega^2=mV\omega$$

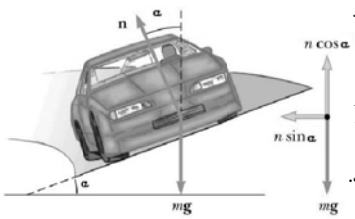
نقش نیروی اصطکاک به عنوان نیروی مرکزگرا

اصطکاک به جای نیروی مرکزگرا: هر جسم که روی سطح افقی در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند تمایل دارد، به خط مستقیم حرکت و به بیرون مسیر پرتاب شود در هنگام پرتاب جسم به بیرون مسیر نیروی اصطکاک به طرف مرکز دوران بر جسم وارد می‌شود که جایگزین نیروی مرکزگرا می‌شود و داریم:

$$f_{s\max}=F_r\rightarrow\mu_s mg=m\frac{V^2_{\max}}{r}\rightarrow V_{\max}=\sqrt{\mu_s rg}$$



شیب عرضی: اگر یک دوچرخه‌سوار بخواهد روی یک مسیر دایره‌ای حرکت کند باید خود را به طرف داخل انحنا خم کند. دوچرخه‌سوار با این عمل بین دو نیروی وزن و عمودی تکیه‌گاه زاویه ایجاد می‌کند و مؤلفه‌ی قائم نیروی عمودی بردار وزن را خنثی می‌کند و مؤلفه افقی جایگزین نیروی مرکزگرا می‌شود.

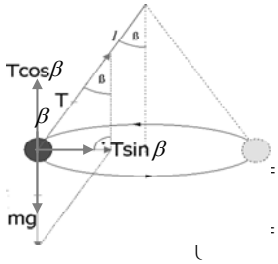


$$\begin{cases}\sum F_y = 0 \Rightarrow N\cos\alpha = mg \\ \sum F_x = N\sin\alpha = m\dfrac{V^2}{r}\end{cases} \rightarrow \tan\alpha = \frac{V^2}{rg}$$

نیروی مرکزگرا $F_r = N\sin\alpha = mg\tan\alpha$ و $N = \dfrac{mg}{\cos\alpha} > mg$

چون اتومبیل نمی‌تواند خود را خم کند با شیب دار کردن جاده بین دو نیرو زاویه به‌وجود می‌آورند.

$$\tan\alpha = \frac{V^2}{rg}$$ (شیب عرضی جاده)

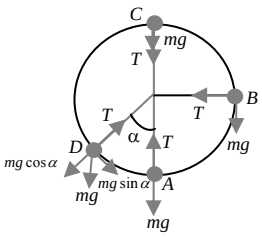


حرکت در صفحه افقی حول محور قائم: گلوله را به انتهای نخی بسته و نخ را حول محور قائم مطابق شکل می‌چرخانیم و جسم روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند. نیروهای وارد بر جسم و برایند آن‌هاروی محورهای x ، y به صورت مقابل می‌باشد:

$$: \circ \Rightarrow T\cos\beta = mg$$

$$: T\sin\beta = m\frac{V^2}{r} \rightarrow \tan\beta = \frac{V^2}{rg}$$

کاربرد حرکت دایره‌ای در صفحه‌ی قائم



حرکت روی مسیر دایره‌ای در سطح قائم: به انتهای نخی یک وزنه بسته و وزنه را در سطح قائم به دوران در می‌آوریم. به علت تبدیل انرژی جنبشی به پتانسیل سرعت جسم در نقاط مختلف مسیر متفاوت است و برای نقاط مختلف داریم :

$$A: T_A - mg = m\frac{V^2}{r} \rightarrow T_A = mg + m\frac{V_A^2}{r} \quad , \quad B: T_B = m\frac{V_B^2}{r}$$

$$C: T_C + mg = m\frac{V^2}{r} \rightarrow T_C = m\frac{V_C^2}{r} - mg$$

$$D: T_D - mg\cos\alpha = m\frac{V^2}{r} \Rightarrow T_D = mg\cos\alpha + m\frac{V^2}{r}$$

اگر سرعت جسم در بالاترین نقطه از مسیر از یک مقدار کم‌تر باشد، جسم مسیر دایره‌ای را طی نمی‌کند. برای تعیین کم‌ترین سرعت متحرک در معادله‌ی حرکت جسم در بالاترین نقطه، کشش نخ را برابر صفر قرار می دهیم. داریم:

$$T + mg = m\frac{V^2}{R} \xrightarrow{T=0} V_{min} = \sqrt{Rg}$$

کاربرد پایستگی انرژی مکانیکی در حرکت دایره‌ای: اندازه‌ی انرژی جنبشی و پتانسیل از روابط $U = mgh, K = \frac{1}{2}mV^2$ تعیین می‌شود.

انرژی مکانیکی مجموع این دو انرژی است و داریم $E = K + U$. اگر در جابه‌جایی یک جسم اصطکاک در طول مسیر صفر باشد، انرژی مکانیکی جسم ثابت باقی می‌ماند. از این مطلب برای تعیین سرعت یا نیروی مرکزگرا در حرکت دایره‌ای استفاده می‌شود. کافی است که سرعت متحرک را در یک نقطه داشته باشیم، با استفاده از مطلب فوق می‌توان سرعت متحرک را در هر مکان دیگری تعیین نمود.

حرکت ماهواره: علت حرکت ماه و ماهواره به دور زمین نیروی گرانشی است که زمین بر آن‌ها وارد می‌کند. این نیرو نقش نیروی مرکزگرا را دارد و داریم :

$$F = G\frac{M_e m}{r^2} = m\frac{V^2}{r} \rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

در رابطه‌ی بالا M_e جرم زمین است و r فاصله‌ی مرکز زمین تا ماهواره می‌باشد. می‌توان ثابت کرد که $GM_e = g_\circ R_e^2$ که $R_e , g_\circ$ شتاب ثقل در سطح زمین و شعاع زمین است. بنابراین داریم : $K = \frac{1}{2}mV^2$,

$$F = G\frac{M_e m}{r^2} = m\frac{V^2}{r} \rightarrow V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} = R_e\sqrt{\frac{g_\circ}{r}}$$

دوره‌ی ماهواره و قانون‌های کپلر

با استفاده از رابطه‌ی بالا دوره‌ی ماهواره به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$V = r\omega = r\frac{2\pi}{T} = R_e\sqrt{\frac{g_\circ}{r}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\frac{r^3}{g_\circ}}$$

در مورد ماهواره به نکات زیر دقت کنید :

۱. نسبت سرعت و دوره‌ی دو ماهواره که در روی مدارهای متفاوت به دور یک سیاره حرکت می‌کنند برابر است با : $\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}, \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}$

۲. چون فقط یک نیرو بر ماهواره وارد می شود ماهواره همیشه در حالتی همانند حالت سقوط بر روی زمین است و تمام اجسام داخل ماهواره بی وزن است.

۳. هر ماهواره با یک سرعت خاص فقط می‌تواند روی یک مدار خاص حرکت کند. یک ماهواره نمی‌تواند با یک سرعت روی دو مدار و یا روی یک مدار با دو سرعت حرکت کند.