وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveotamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

بنام خدا

ریاضی ۲

توابع برداری و انتگرال مکان

توابع چندمتغیره و انتگرال سه گانه

انتگرال خط و سطح

متد مانی بردار:

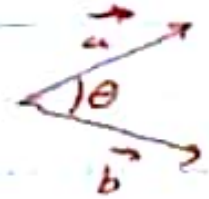
$\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ و $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$

$|a|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

* بردار یکه: برداری است که طول آن ۱ باشد

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}}{|a|}$$

* ضرب داخلی $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$




خواص: ۱- خواص ← عدد

۲- جابجایی $a.b = b.a$

۳- $\vec{a}.\vec{b} = |a||b|$ ضرب

$\theta = 90^\circ \Longrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$

ضرب خارجی دو بردار:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$i(y_1z_2 - y_2z_1) - j(x_1z_2 - x_2z_1) + k(x_1y_2 - x_2y_1)$$

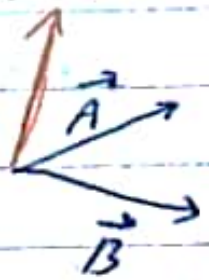
خواص ضرب خارجی

۱- جواب ⟵ بردار

۲- جابجایی ندارد ⟵ $A\times B = -B\times A$

۳- $\vec{A}\times\vec{B} = |A||B|\sin\theta$

۴- $\vec{A}\times\vec{B}$ حتماً بر $\vec{A}$ و هم $\vec{B}$ عمود است ⟵




مثال: a را طوری بیابید که بردارهای زیر بر هم عمود باشند

$\vec{A} = a\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ $\qquad$ $B = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$2a - 1 - 2 = 0 \quad 2a = 3 \quad a = \frac{3}{2}$

مثال: زاویه بین دو بردار زیر را بیابید

$\vec{A} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$ → $(2, 0, -2)$ → $|\vec{A}| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$ → $(0, 1, -1)$ → $|\vec{B}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$A \cdot B = |A||B| \cos\theta$

$0 + 0 + 2 = \sqrt{8} \times \sqrt{2} \cos\theta$

$\sqrt{16} = 4$

$2 = 4\cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

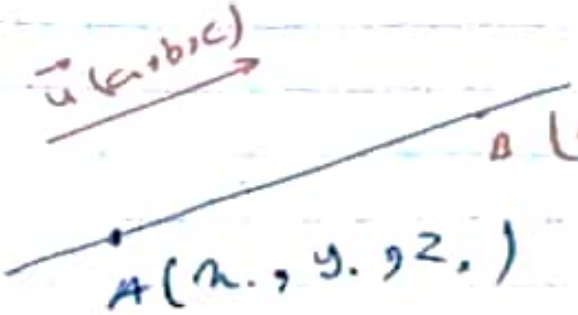
بردار { طول (اندازه)
جهت
راستا

* دو بردار موازیند هرگاه یکی مضرب از دیگری باشد

$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{a} = t\vec{b} \quad t \in \mathbb{R}$

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = t$

* معادله خط در فضا: برای نوشتن معادله خط که متمایز از خط و یک بردار موازی با خط باشد بردار هادی امتداد خط.




$AB = (x - x_. , y - y_. , z - z_.)$

$(x - x_. , y - y_. , z - z_.) = t(a,b,c)$

$$\begin{cases} x - x_. = at \\ y - y_. = bt \\ z - z_. = ct \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = at + x_. \\ y = bt + y_. \\ z_. = ct + z_. \end{cases}$$

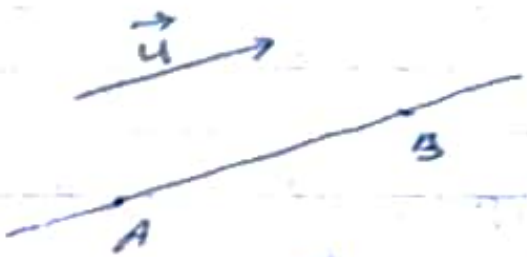
معادله پارامتری خط در فضا

$$\begin{cases} \frac{x - x_.}{a} = t \\ \frac{y - y_.}{b} = t \\ \frac{z - z_.}{c} = t \end{cases}$$

$$\frac{x - x_.}{a} = \frac{y - y_.}{b} = \frac{z - z_.}{c}$$

معادله دکارتی خط در فضا

مثال: معادله دکارتی خط راست را بنویسید که از دو نقطه $A(2,1,3)$ و $B(3,0,4)$ می‌گذرد.




$$\overrightarrow{AB} = (1,-1,1) = \vec{u}$$

($a$, $b$, $c$)

$$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -t+1 \\ z = t+3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

* دو نکته درباره معادله خط در حالت دکارتی:

۱- اگر معادله در این حالت فرم استاندارد داشته باشد، مخرج نشان دهنده مؤلفه‌های بردار هادی می‌باشد.

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-4}{5} \rightarrow \vec{u} = (1,-4,5)$$

$$\frac{2(x-\frac{1}{2})}{\frac{4}{2}} = \frac{-(y-5)}{-2} = \frac{z+1}{-3} \rightarrow \vec{u} = (2,-2,-3)$$

subject: date:

۶- تفریق دو نقطه ها بردار هادی صفر بسته
سلاً دو بردار هادی بدست (a و b و c)
بشه بار را بصورت معادله خط دکارتی به شکل
زیر می آید: $y=0$ و $z=3$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}$$

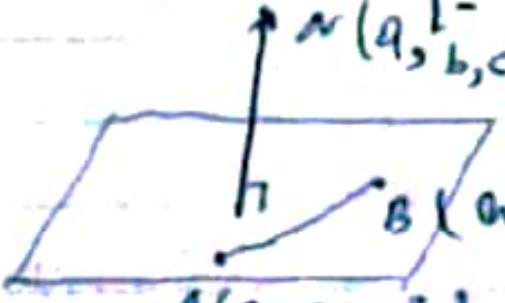
$$\frac{x-\frac{2}{3}}{-9} = \frac{y-4}{2}$$

$$\frac{3x-4}{-9} = \frac{4-y}{2}$$

$$\vec{u} = (-3, -2, 0)$$

* معادله صفحه در فضا:

برای نوشتن معادله صفحه در فضا به یک نقطه از صفحه و یک بردار عمود بر صفحه احتیاج داریم




$$AB = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$$

$\vec{AB} \perp \vec{N} \longrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{N} = 0$

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (a, b, c) = 0$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

معادله صفحه فضا

مثال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از نقطه $A(-2, 3, -1)$ و بردار $\vec{N} = (2, -3, 4)$ عمود شده باشد.

$x_0$ $y_0$ $z_0$

$\frac{2x - 1}{4} = \frac{-y + 1}{2}$ , $z = 4$

$\rightarrow \vec{N} = (2, -3, 4)$
$a \quad b \quad c$

$2(x + 2) - 3(y + 2) + 0 \cdot (z + 1) = 0$

$2x + 4 - 3y - 6 = 0$

$2x - 3y = 2$

مثال: معادله صفحه‌ای را بنویسید که از سه نقطه
$A(2,1,-3)$ و $B(2,-1,5)$ و $C(1,0,1)$ بگذرد.




$$\overrightarrow{AB} = (0,-2,8)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1,1,4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 8 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$-12 \quad \hat{} \quad -2$$
$$i(-4-8) - j(0+8) + k(0-2) =$$
$$\vec{N} \quad a \quad b \quad c$$

$$\vec{N} = (-12, -8, -2)$$

$$-12(x-2) - 8(y-1) - 2(z+3) =$$

۱۳۹۸/۱۱/۱۱

توابع برداری: تابع $f: R \to R^n$ را تابع برداری گویند:

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$$

که دامنه‌ی $t$ یک زیرمجموعه‌ی از اعداد حقیقی است و برد آن یک بردار است. مثال:

$$f(t) = (\underbrace{t+1}_{f_1(t)}, \underbrace{t^2+1}_{f_2(t)}) \qquad f: R \to R^2$$

مشتق تابع برداری:

$$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), \ldots f_n'(t))$$

مثال: فرض کنید $\vec{R}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ یک تابع برداری باشد، مشتق $\vec{R}(t)$ به صورت $\vec{R}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ می‌باشد.

مثال:

$$\vec{R}(t) = (4t, \cos t, e^{2t}) \quad \leftarrow \quad \vec{R}'(t) = (4, -\sin t, 2e^{2t})$$

توابع برداری و حرکت: فاصله‌ی طی شده توسط هر تابع برداری در طول یک بازه‌ی زمانی برابر با مساحت زیر منحنی تابع سرعت این بردار نسبت به زمان است.

سرعت و شتاب:

$$\vec{v}(t) = \vec{R}'(t) \quad \text{سرعت}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{R}''(t) \quad \text{شتاب}$$



sam

Subject Date

مثال: بردار مکان جسمی حرکتی را به صورت روبرو $R(t) = \cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + t^2\vec{k}$

بردار سرعت و شتاب را در $t=\frac{\pi}{2}$

$v(t) = (-3\sin t, \cos t, 2t) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}}$

$v(t) = (0, -1, \pi)$

$a(t) = (-\cos t, -3\sin t, 2) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{2}}$

$a(t) = (-1, 0, 2)$

بردار یکای مماس: بردار واحدی که در جهت بردار مماس است.

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|}$$



بردار یکای قائم: بردار واحدی که در جهت حرکت می‌باشد.

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|}$$

مثال استدلالی

مثال: بردار یکای مماس و قائم را در نقطه‌ای $t$ بیابید.

$N$ $T$

$R(t) = (2\cos t, 2\sin t, t+1)$

$$T(t) = \frac{R'(t)}{|R'(t)|} \rightarrow R'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 2)$$
$$|R'(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{8}$$

$$T(t) = \left(\frac{-2\sin t}{\sqrt{8}}, \frac{2\cos t}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}\right) \longrightarrow T'(t) = \left(\frac{-2}{\sqrt{8}}\cos t, \frac{-2}{\sqrt{8}}\sin t, 0\right)$$

$$|T'(t)| = \sqrt{\frac{4}{8}\cos^2 t + \frac{4}{8}\sin^2 t} = \frac{2}{\sqrt{8}}$$

Subject Date

$N = \left(\frac{-2/\sqrt{13}}{2/\sqrt{13}}\cos t, \frac{-3/\sqrt{13}}{2/\sqrt{13}}\sin t, \frac{0}{2/\sqrt{13}}\right) \longrightarrow \vec{N} = (-\cos t, -\sin t, 0)$

بردار تاب دوم، برداری عمودی است که هم بر $T$ دوم بر $N$ عمود است.

$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$

$\vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$

مثال: معادله‌ی یکی صفحه‌ی قائم اول و دوم را بیابید سپس زاویه‌ی $t = \frac{\pi}{4}$ بیابید.

$\vec{R}(t) = (\sin t, \sin t, \cos t) \longrightarrow R'(t) = (\cos t, \cos t, -2\sin t)$

$\xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, -2), \quad |R'(t)| = \sqrt{2/4 + 2/4 + 4} = \sqrt{6}$

$\vec{T}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t, 1/\sqrt{6}\cos t, -2/\sqrt{6}\sin t\right)$

$T'(t) = \left(-1/\sqrt{6}\sin t - 1/\sqrt{6}\sin t - 4/\sqrt{6}\cos t\right) \xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}, 0\right)$

$|T'(t)| = \sqrt{1/12 + 1/12 + 0} = \sqrt{2/12}$

$\vec{N} = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}/\sqrt{12}}\sin t, \frac{-1/\sqrt{6}\sin t}{\sqrt{2}/\sqrt{12}}, \frac{-4/\sqrt{6}\cos t}{\sqrt{2}/\sqrt{12}}\right) \Rightarrow \vec{N} = (-\sin t, -\sin t, -4\cos t)$

$\xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \vec{N} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$

(۳)

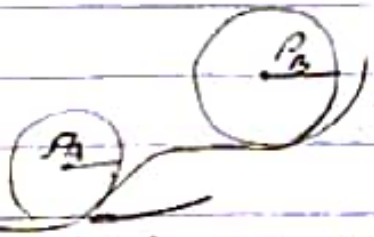
sam

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i\left(0 - \frac{2}{5}\right) - j\left(0 - \frac{2}{5}\right) + k\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{5}, +\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

انحنا (خمیدگی) (تندی بین نقاط) : عکس شعاع دایره ای که بهترین تقریب محلی برای منحنی در یک نقطه است. بنابراین دایره ای که بهترین تقریب محلی برای منحنی در یک نقطه است و در آن نقطه مماس منحنی با آن مماس است را دایره بوسان انحنا می نامیم.




شعاع این دایره را شعاع انحنا و مرکز آن را مرکز انحنا یا مرکز خمیدگی می نامیم

$$K(A) = \frac{1}{AA}$$

فرمول های محاسبه ی انحنا یا خمیدگی :

الف) اگر معادله ی برداری داده شده باشد.

$$K(t) = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}|}{|\vec{v}|^3}$$

ب) اگر معادله ی کارتزی داشته باشیم.

$$K(x) = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Subject Date

مثال: معادله‌ی مسیر حرکت جسمی به صورت

$R(t) = (e^t, e^{-t}, t)$

می‌باشد. انحنا را در $t=0$ بیابید.

$v(t) = R'(t) = (e^t, -e^{-t}, 1) \rightarrow a(t) = (e^t, e^{-t}, 0)$

$v(0) = (e^0, e^0, 1) = (1, -1, 1)$ و $a(0) = (1, 1, 0)$

$$v \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = i(0-1) - j(0-1) + k(1-(-1))$$

$$(1, -1, 1) \times (1, 1, 0) = (-1, +1, 2)$$

$|v \times a| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$|v| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$K(0) = \frac{\sqrt{6}}{(\sqrt{3})^3} = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{3}}$$

تمرین: انحنای منحنی $R(t) = (t+t^2)i + t^2 j + (2t^2+1)k$ در $t=1$ بدست آورید.

sam

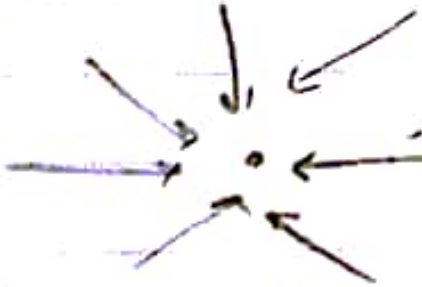
Subject.
Date.

ریاضی ۱

* تابع چند متغیره: تابع $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ یک تابع $n$ متغیره می‌باشد.

دامنه‌ی این تابع زیر مجموعه‌ای از فضای $\mathbb{R}^3$ است.

* حد تابع چند متغیره: برای حد گرفتن از یک تابع چند متغیره به روش زیر عمل می‌کنیم. چون در یک فضای $m$ بعدی ($m \geq 2$) از بی‌نهایت جهت می‌توان به یک نقطه نزدیک شد پس می‌توان بی‌نهایت مسیر برای نزدیک شدن به یک نقطه داشت.




حتماً شود خصوصیت حد یک تابع چند متغیره وجود دارد که روی تمامی مسیرهای موجود ($\infty$ مسیر) حد، موجود و برابر باشد.

Subject
Date

مسیرهای نزدیک شدن به یک نقطه دلخواه می‌توانند به یکی از صدها

نیز باشد: $y=mx$ $y=mx^2$ $y=m\sqrt{x}$ ، ... و

اگر مقدار حد برای مسیرهای مستقل از $m$ باشد (یک عدد ثابت)

می‌گوییم تابع حداقل در نقطه داده شده حد دارد.

۱) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\longrightarrow$ $y=mx$

$$\lim \frac{x^2(mx)}{x^2+m^2x^2} = \lim \frac{mx^3}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2}$$

(چون مقدار حد وابسته به $m$ شده است تابع حد ندارد.) از این خود تابع نمره داده می‌شود!

$\lim \frac{x^2-y}{x+y} = 1$ $\longrightarrow$ این راه $y=mx^2$

$$\lim \frac{x^2-mx^2}{x+mx^2} = \lim \frac{x^2(1-m)}{x(1+mx)} = \lim \frac{x(1-m)}{1+mx} = \frac{0}{1} = 0$$

حد دارد.



TOPCO

Subject.
Date.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{my^2}{x^2+y^4} \Rightarrow y = m\sqrt{x}$$

$$\lim \frac{x(m\sqrt{x})^2}{x^2+(m\sqrt{x})^4} = \lim \frac{m^2x^2}{x^2+m^4x^2} = \frac{m^2}{1+m^4} \quad X$$

$$\overbrace{x^2(1+m^4)}$$

(چون به مقدار خود وابسته به $m$ است پس تابع حد ندارد.)

$$x = my^2 \longrightarrow \lim \frac{my^4}{m^2y^4+y^4} = \frac{my^4}{(m^2+1)y^4} = \frac{m}{1+m^2} \quad X$$

مشتقات جزئی (ادامه):

اگر $f(x,y)$ تابعی دو متغیره و $(x_0,y_0)$ درون‌دامنه $f$ باشد، مشتق جزئی مرتبه اول تابع $f$ نسبت به $x$ و $y$ که به ترتیب با نماد $f_x$ و $f_y$ یا $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ نشان می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_x = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$



PqPCO

Subject
Date

$$f_y = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 - xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \longrightarrow \text{نقطه شکستگی}$$

$$f_x(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} - 0}{x - 0} = \lim \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \boxed{\infty}$$

موجود نیست.

$$f_y = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \frac{\frac{0}{y^2} - 0}{y - 0} = \frac{0}{y} = \boxed{0}$$

سوالش چی بوده؟ مشتقات جزئی مرتبه اول تابع فوق را در (0,0) بیابید

$$\frac{\text{حدی}}{\text{حدی}} = \text{مبهم} \qquad \frac{\text{مطلق}}{\text{حدی}} = \boxed{0} \qquad \frac{\text{حدی}}{\text{حدی}} = \boxed{0}$$

تمامی مشتقات جزئی مرتبه اول تابع زیر را

$$z = x \sin(xy) + y x^2 \qquad z_x = ? \quad z_y = ?$$

Subject
Date

$z_x = (1)\sin(xy) + y(\cos xy)(x) + 2xy =$ مشتق کل

$z_y = (x)\sin(xy) + (x\cos(xy))(x) + x^2 = x^2\cos(xy) + x^2$

در تابع $w = xe^{-yz^2}$ استقلا حداسته شده $w_{xy} = ?$ $w_{xz} = ?$ $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = ?\right)$

تمرین

$w_x = 1 \times e^{-yz^2} + 0 \times x$

$w_x = e^{-yz^2}$ $\quad w_{xz} = -2yze^{-yz^2}$

* دیفرانسیل تابع دو متغیره $f(x,y)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

دیفرانسیل تابع سه متغیره $f(x,y,z)$:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مثال: دیفرانسیل تابع $f(x,y) = x^2 - xy^3$ ؟

$f_x = 2x - y^3 \quad f_y = -3xy^2$

$df = (2x - y^3)dx + (-3xy^2)dy$



RaPCO

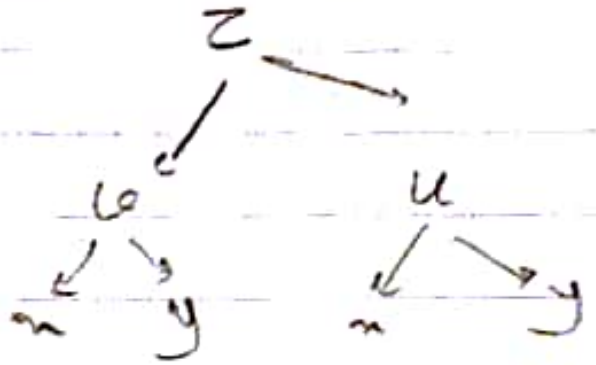
Subject
Date

قاعده‌ی زنجیری مشتق :

$z = f(u,v)$

$u(x,y)$ $v(x,y)$

(۲ حالت)




$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x$

$z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y$

سوال : اگر $z = f(x-y, y-x)$ نشان دهید $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z_u \cdot 1 + z_v \cdot (-1)$

$\frac{\partial z}{\partial x} = z_u - z_v$ ①

$\frac{\partial z}{\partial y} = z_u \cdot (-1) + z_v \cdot 1 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -z_u + z_v$ ②

① + ② = 0 ✓

(۱۱)

Subject
Date

$$w = f\left(\frac{y-x}{yx}, \frac{z-y}{yz}\right)$$ نشان دهید

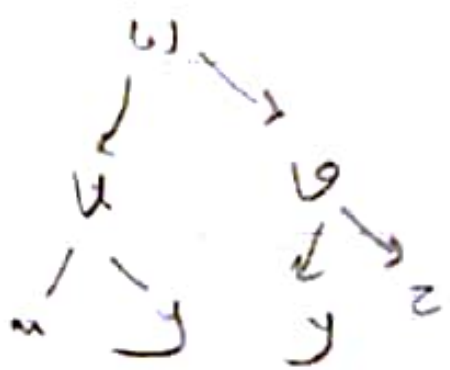
$$x^2 f_x + y^2 f_y + z^2 f_z = 0$$

$$u_x = \frac{(-1)(yz) - y(y-z)}{x^2y^2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$u_y = \frac{1(yz) - x(y-z)}{x^2y^2} = 1/y^2$$

$$v_y = \frac{(-1)(yz) - z(z-y)}{y^2z^2} = -1/y^2$$

$$v_z = \frac{1(yz) - y(z-y)}{y^2z^2} = \frac{1}{z^2}$$




$$\begin{cases} f_x = w_u \cdot u_x \\ = w_u\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_y = w_u \cdot u_y + w_v \cdot v_y \\ f_y = w_u\left(1/y^2\right) + w_v\left(-1/y^2\right) \end{cases}$$

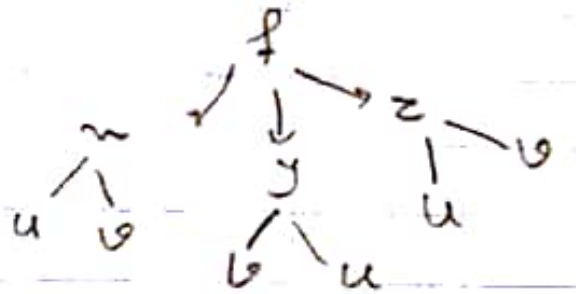
$$\begin{cases} f_z = w_v \cdot v_z = w_v\left(\frac{1}{z^2}\right) \end{cases}$$

حالا اگر جای $x$ و $z$ عوض شود:

$$x^2\left(w_u\left(-1/y^2\right)\right) + y^2\left(w_u\left(1/y^2\right) + w_v\left(-1/y^2\right)\right) +$$

$$z^2\left(w_v\left(1/z^2\right)\right) = -w_u + w_u - w_v + w_v = 0$$

اگر $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ و $x=u+e^{2v}$ و $y=v-\cos u$ و $z=2uv$ و $f_v$ ؟




$$f_u = f_x \cdot x_u + f_y \cdot y_u + f_z \cdot z_u$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2} \qquad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2} \qquad f_z = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$x_u = 1 \qquad y_u = \sin u \qquad z_u = 2v$$

$$f_u = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)(1) + \left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)(\sin u) + \left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)(2v)$$

تقسیم همغوری ادامه دارد

Subject.
Date.

مشتق ضمنی : اگر ضابطه تابع به صورت ضمنی $F(x,y,z)=0$ باشد $z$ بیان صریح می‌شود. اما اگر ضابطه تابع به صورت ضمنی $F(x,y,z)=0$ باشد $z$ بیان صریح نمی‌شود. $z_x$ و $z_y$ از فرمول‌های مشتق ضمنی به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} \qquad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

مثال: مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع زیر را بیابید.

$$xy^2 + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}} - 2\sin(zy) - 1 = 0 = F$$

$$F_x = y^2 + \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}} \quad (1) \qquad F_y = 2xy - z\cos(zy) \quad (2)$$

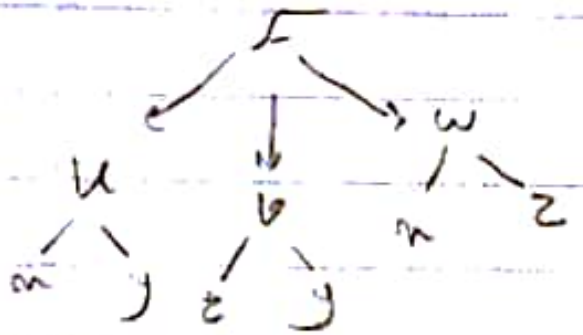
$$F_z = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}} - y\cos(zy) \quad (3)$$

$$z_x = -\frac{(1)}{(3)} \qquad z_y = -\frac{(2)}{(3)}$$

(14)

Subject.
Date

مثال: اگر $f(\underbrace{y^2x}_{u}, \underbrace{z^2y}_{v}, \underbrace{x^2z}_{w}) = 0$ باشد مطلوبست $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ ؟




$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = -\frac{F_u}{F_z} \qquad z_x = -\frac{F_u \cdot u_x + F_v \cdot v_x + F_w \cdot w_x}{F_v \cdot v_z + F_w \cdot w_z}$$

$$z_x = -\frac{y^2 F_u + 2xz F_w}{2yz F_v + x^2 F_w}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = -\frac{F_y}{F_z} \qquad z_y = -\frac{F_u \cdot u_y + F_v \cdot v_y + F_w \cdot w_y}{F_v \cdot v_z + F_w \cdot w_z} =$$

$$= -\frac{2xy \cdot F_u + z^2 F_v}{2yz F_v + x^2 F_w}$$

* تذکر: در صورتی که $x$ و $y$ توابعی از $u$ و $v$ باشند، یعنی $\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \end{cases}$ و $u$ و $v$ توابعی از $x$ و $y$ باشند، در این صورت حل مسائل مشتق جزئی نیز همانند

Subject
Date

$$y = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

در این صورت مشتقات جزئی مرتبه اول از پارامترها به شکل زیر است

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial v} \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial v}$$

مثال: مشتقات جزئی مرتبه اول این تابع؟

$$\begin{cases} x = 2u - 3v \\ y = \arctan(uv) \end{cases} \xrightarrow{t} (\arctan t)' = \frac{t'}{1+t^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ \frac{v}{1+u^2v^2} & \frac{u}{1+u^2v^2} \end{vmatrix} = \frac{2u}{1+u^2v^2} - \left(-\frac{3v}{1+u^2v^2}\right) =$$

$$\frac{2u+3v}{1+u^2v^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{u}{1+u^2v^2} =$$

Subject.
Date.

$$\left(\frac{1+u^2v^2}{2u+cw}\right)\left(\frac{u}{1+u^2v^2}\right)-\frac{u}{2u+3v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)=3\left(\frac{1+u^2v^2}{3u+3v}\right)^{-3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial u}=-\left(\frac{1+u^2v^2}{2u+cw}\right)\left(\frac{v}{1+u^2v^2}\right)$$

$$=\frac{-v}{2u+3v}$$

* آنالیز برداری: بردار نابلا با نماد $\vec{\nabla}$ به صورت زیر تعریف

می‌کنیم $\vec{\nabla}=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$ اگر $f(x,y,z)$

آنگاه $\vec{\nabla}f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z})$ به صورت

$\vec{\nabla}f$ گرادیان تابع $f$ می‌نامند.

نکته ① حاصل گرادیان بردار است

Subject.
Date.

نکته ② : بردار گرادیان در هر نقطه برسطح تابع f عمود است

مثال : بردار گرادیان تابع زیر را در نقطه $f(1,2,0)$ ، $f(x,y,z)$

$= -2xe^{-y^2z}$

$\vec{\nabla} f = (-2e^{-y^2z}, 4xyze^{-y^2z}, 2x^2ye^{-y^2z}) \longrightarrow (-2,0,-2)$

$-2xe^{-y^2z}$ $\quad (e^u)' = u'e^u$

$-2x_0(-2yz)e^{-y^2z}$

* میدان برداری : تابع $F: R^3 \to R^3$ اضافه ای

$F(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$

مثل میدان برداری ی نامند. مولفه های میدان برداری توابع

$M, N, P$ هستند که هریک تابعی سه متغیره اند

* دیورژانس : (ضرب داخلی بردار نابلا و میدان برداری) $\vec{\nabla} \cdot F$

(دل)

Subject.
Date.

* کرل: (ضرب خارجی بردار نابلا و میدان برداری) $\nabla \times \vec{F}$

مثال: دیورژانس $F = (z+2x, x^2z+y, yx^2-z)$

$$div(F) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (z+2x, x^2z+y, yx^2-z)$$

$$= 2+1-1 = \boxed{2}$$

مثال، کرل:

$$\vec{F} = (2x+z^2, \cos(xy), z^2+x)$$

$$curl(\vec{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2x+z^2 & \cos(xy) & z^2+x \end{vmatrix} = i(0-0) + j(1-2z) + k(-y(\sin(xy)-0))$$

$$= (0, 1-2z, -y\sin(xy))$$

تمرین: شان دهید میدان توابع زیر

$$\vec{F} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$div(\vec{F}) = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

برایم: ف ۱



PAPCO

Subject.
Date.

$\operatorname{curl} \vec{F} = 0$ ⟸ (۱)

مشتق سوی (جهتی) $f$ اگر $\vec{u}$ بردار یکه و مشتق‌پذیر باشد تابع $f(x,y,z)$ در نقطه‌ی $A$ موجود است. در این صورت مشتق سوی $f$ در نقطه‌ی $A$ در جهت $\vec{u}$ که با $f'_u(A)$ نشان داده می‌شود بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'_u(A) = \vec{\nabla} f(A) \cdot \vec{u}$$

مثال: مشتق سوی تابع $f(x,y,z) = y^2 + z^2 - 4xz$ در نقطه‌ی $A(0,2,1)$ در جهت $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ را بیابید.

$\vec{w}$ بردار یکه $\longrightarrow$ $\sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$ $\longrightarrow$ $(2,-1,1)$

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$ (۱)

(۲۵)

Subject.

Date.

(۱) $\nabla \vec{F} = (-4z, 2y, 2z - 6x)$

$\nabla F(A) = (-4, 4, 2)$

$f'_u(A) = (-6, 6, 2) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{9}}, -\frac{1}{\sqrt{9}}, \frac{1}{\sqrt{9}}\right) =$

$-\frac{8}{\sqrt{9}} - \frac{4}{\sqrt{9}} + \frac{2}{\sqrt{9}} = \boxed{\frac{-10}{\sqrt{9}}}$

تمرین: مشتق سوی تابع $f(x,y,z) = x^2z - 2y^2z$ را در نقطه $A(1,-1,1)$ در جهت بردار $\vec{v}(2,1,-1)$ بیابید.

مشتق جهتی تابع $f(x,y,z) = x^2 + y^2 e^{-z}$ در نقطه‌ی $(0,1,-1)$ در جهت کدام بردار یکه بیشترین مقدار را دارد؟

(۲) $\vec{F} = (2x^3 y^2, 2x^4 y - y^2)$ یک میدان برداری است.

Subject.

Date.

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z+2 & xyz & -xy^2 \end{vmatrix}$$

$$i(-2xy - 0) - j(-y^2 - 1) - k(2y - 0)$$

$$\text{curl } F = (-2xy, y^2+1, 2y) \quad A(2,2,2)$$

$$\sqrt{2+2+2} = \sqrt{12} \quad | \quad \vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}\right)$$

$$\nabla F = (2yz, 2ye^{-z}, -y^2e^{-z})$$

$$\nabla F = (-2, 2, -1) \qquad f'_u(A) = (-2, 2, -1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}\right)$$

$$= \frac{-4+4-2}{\sqrt{12}} = \frac{-2}{\sqrt{12}}$$

(۲۲)

Subject.

Date.

## آلستم توابع دومتغیره :

تعدیناً نقطه‌ای همایی : نقاطی که در آن‌ها مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول تابع موجود نباشد یا صفر باشد.

* برای تعیین آلستم‌های تابع دومتغیره به روش زیر عمل می‌کنیم :

۱) ابتدا نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم

۲) سپس دترمینان هسین را تشکیل می‌دهیم

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

۳) در این صورت : الف) اگر $D>0$ و $f_{xx}>0$ آنگاه

min نسبی

ب) اگر $D>0$ و $f_{xx}<0$ آنگاه max نسبی



PdPCO

Subject.
Date.

ج) اگر $D<0$ ⇐ نقطه‌ی زینی

د) اگر $D=0$ ⇐ روش فوق جواب نمی‌دهد و باید به روش‌های اصلی عمل کرد. (که البته می‌توان این‌جا هم از این روش استفاده کرد)

مثال: نقاط بحرانی تابع زیر را در نقاط بحرانی‌اش بررسی کنید.

۱) $f(x,y)=x^2-2xy+\frac{y^4}{4}-3y$

$f_x=2x-2y=0 \rightarrow \boxed{x=y}$

$f_y=-2x+y^2-3=0 \rightarrow \boxed{x=-1,3}$

نقاط بحرانی $(3,3)$ و $(-1,-1)$

$D=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2y \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1,-1)} D=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}=-4-4=\boxed{-8}$

$D<0 \rightarrow (-1,-1)$

زینی



RqPCD

Subject.

Date.

$(3,3) \rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 4 = \boxed{8}$

$D>0 \quad f_{xx}>0 \longrightarrow$ نسبی $\min (3,3)$

۲) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$

$f_x = 4x^3 - 4y = 0 \longrightarrow y = x^3$

$f_y = 4y^3 - 4x = 0 \longrightarrow x = y^3$

$\longrightarrow x = (x^3)^3$

$\boxed{x = x^9}$

$x^9 - x = 0 \longrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \longrightarrow x = 0$

$x^8 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$(0,0) \quad (+1,1) \quad (-1,-1)$

$D = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(0,0)} D = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 16 = \boxed{-16}$

در $(0,0)$ اکسترمم نسبی ندارد

$\xrightarrow{(1,1)} \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0 \quad D>0$

$f_{xx}>0$ $\Rightarrow$ نسبی $\min$

Subject.
Date.

$(-1,-1) \longrightarrow D = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 16 > 0$

$D > 0 + f_{xx} > 0 \longrightarrow$ نقطه min $(-1,-1)$

تمرین: $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 3x - 4y - 3$

انتگرال دوگانه:

$$\int_1^3 \left[ \int_0^2 (3xy+1)\, dx \right] dy$$

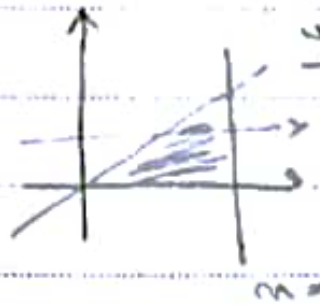
$$\int_1^3 \left( \frac{3}{2}x^2 y + x \Big|_0^2 \right) dy$$

$$\int_1^3 \left[ (3y+2) - (0) \right] dy = \int_1^3 (3y+2)\, dy = \frac{3}{2}y^2 + 2y \Big|_1^3$$

$$(\frac{27}{2} + 6) - (\frac{3}{2} + 2) = 28$$

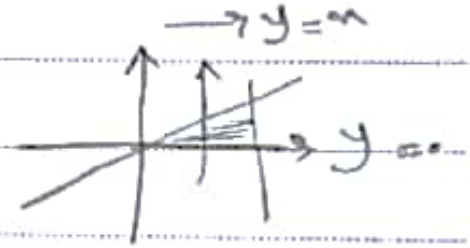
Subject.
Date.

$$\iint_D |x+y|\,dA = ?$$




$$\int_0^1 \int_y^1 (x^2+y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \int_0^x (x^2+y)\,dy\,dx$$




اگر اولین دیفرانسیل داخل انتگرال dx بود، داخل شکل یک فلش افقی کشیده و تغییرات x را بررسی می‌کنیم (همین اول می‌بینیم فلش افقی به کدام خط برخورد کرده و تغییرات را می‌نویسیم). اما اگر اولین دیفرانسیل انتگرال dy بود داخل شکل فلش عمودی می‌کشیم و تغییرات y را می‌نویسیم.



PaPCO

Subject.
Date.

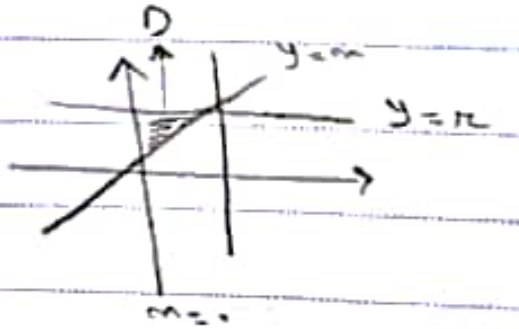
قضیه ی فوبینی :

اگر تابع $f(x,y)$ بر ناحیه ی $D$ پیوسته باشد

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$$

$$I = \int_0^{\pi} \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx = ?$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \pi \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi \\ x = 0 \end{cases}$$




$$\int_0^{\pi} \int_0^{y} \left(\frac{\sin y}{y}\right) dx\,dy$$

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin y}{y} x \Big|_0^{y}\right) dy$$

$$\left(\frac{\sin y}{y} \cdot y\right) - (0) = \sin y$$



RqPCO

Subject.
Date.

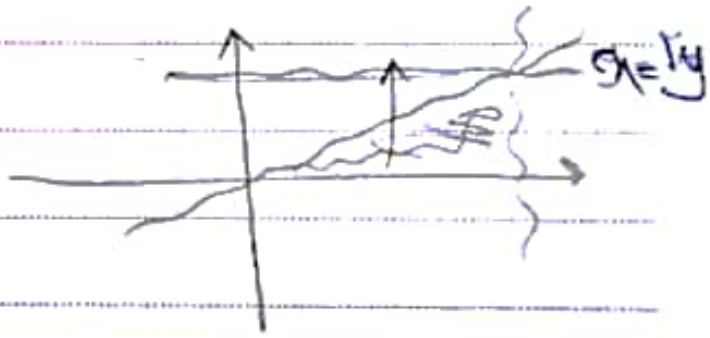
$$\int_0^{\pi} \sin y \, dy = -\cos y \Big|_0^{\pi}$$

$$(-\cos\pi)(-(-\cos 0)) = 2$$

$$+1 \qquad +1$$

$$I = \int_0^1 \int_{2y}^{2} \cos(x^2)\, dx\, dy$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$




$$I = \int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} (\cos x^2)\, dy\, dx$$

$$y \cos x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{1}{2}x\cos x^2$$

$$I = \frac{1}{2\times 2}\int_0^2 \underbrace{2x\cos x^2\, dx}_{u}\, du$$

$$u = x^2 \longrightarrow du = 2x\,dx \longrightarrow I = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \cos u\, du$$

Subject.
Date.

$$I = \tfrac{1}{4}\sin u\,\Big|_0^{t} = \tfrac{1}{4}\sin t$$

* تغییر متغیر در انتگرال چندگانه:

$$\iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \iint_{D'} f(g,h)\,|J|\,du\,dv$$

ژاکوبین $= J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

نکته: ۱) ژاکوبین تغییر متغیر چیست؟

۲) ناحیه‌ی جدید D چیست؟

مثال:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-y} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy$$

$$* \begin{cases} u = x-y \\ v = x+y \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$



PqPCO

Subject
Date.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-1) = 2 \xrightarrow{\text{معکوس}} J = \frac{1}{2}$$

$$I = \iint (\cos \frac{u}{v}) \frac{1}{2} \, du \, dv$$

$$\begin{cases} x = 1-y \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$y=0 \xrightarrow{*} \begin{cases} u = x \\ v = x \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = v} \longrightarrow \text{تنیسبت} \; u \begin{cases} v \\ -v \end{cases}$$

$$x=0 \xrightarrow{*} \begin{cases} u = -y \\ v = y \end{cases} \Rightarrow \boxed{u = -v}$$

$$x = 1-y \rightarrow \underbrace{x+y}_{v} = 1 \rightarrow v = 1 \longrightarrow \text{تنیسبت} \; v \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_{-v}^{v} (\cos \frac{u}{v}) \, du \right) dv$$

$$v \sin \frac{u}{v} \Big|_{-v}^{v}$$

$$(*1) \quad v(\sin 1 - \sin(-1)) = \boxed{2v \sin 1}$$

$$\sin 1 + \sin 1$$

$$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin \alpha}$$

PqPCO

Subject.
Date.

$$I = \sin 1 \int_0^1 v \cdot dv = \tfrac{1}{2} v^2 \Big|_0^1 = \tfrac{1}{2} - 0 = \tfrac{1}{2}$$

$$\boxed{I = \tfrac{1}{2} \sin 1}$$

حاصل انتگرال $\iint_D e^{\frac{x^2+y^2}{xy}} dA$ که در آن $D$ محصور به

$x^2 = y$ ، $x = y^2$ ، $x = 2y^2$ منحنی‌های

و $2x^2 = y$ می‌باشد.

$$\frac{x^2}{2y} + \frac{y^2}{2y} = \underbrace{\frac{x^2}{y}}_{u} + \underbrace{\frac{y^2}{x}}_{v}$$

$$\begin{cases} u = x^2/y \\ v = y^2/x \end{cases}$$

$x = 2y^2 \to y^2/x = 1/2 \to v = \begin{cases} 1 \\ 1/2 \end{cases}$

$x = y^2 \to y^2/x = 1$

$x^2 = y \to \left(x^2/y = 1\right) \to u = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

$x^2 = 2y \to x^2/y = 2$

(۳۲)

Subject.

Date.

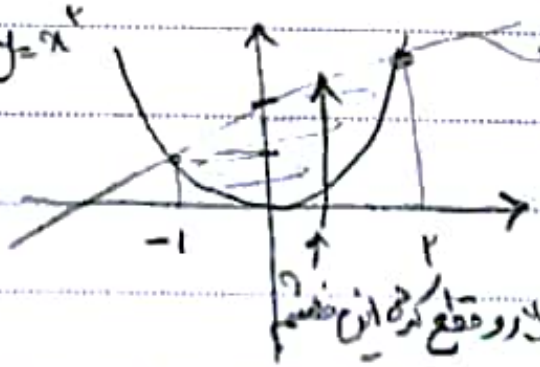
$$J = \begin{vmatrix} \frac{3}{3}x & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{6xy}{xy} - \frac{x^2y^2}{x^2y^2} = 6 - 2 = 4$$

سکوبین $\rightarrow |J| = 1/3$

$$I = \frac{1}{4} \int_{1/3}^{1} \int_{1}^{2} e^{u+v} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{4} \int_{1}^{4} \left( \int_{1}^{2} (e^u \cdot e^v) \, du \right) dv$$

مثال: مساحت ناحیه‌ای محدود بین منحنی‌های $y = x+2$ و $y = x^2$



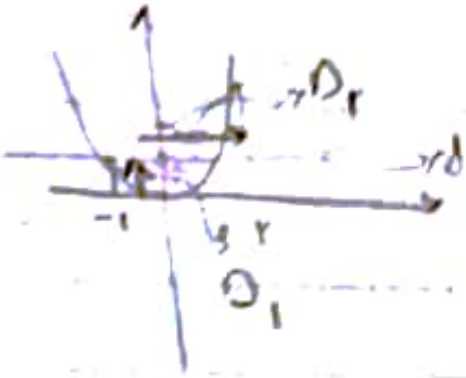

ابتدا محل تقاطع را حساب کنید.

$x^2 = x+2 \rightarrow x = -1, 2$

$$S = \iint_D dA = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} dy \, dx$$

$$S = \int_{-1}^{2} x+2-x^2 \, dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

(۳۰)




$$\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dy\,dx + \int_{-1}^{2}\int_{x+2}^{x^2} dx\,dy = \underbrace{\qquad}_{D_1} \quad \underbrace{\qquad}_{D_2}$$

مساحت ناحیه محصور به منحنی های $xy=2$ ، $xy^2=3$ ، $xy^4=15$ و $xy=4$ را بیابید.

$$\begin{cases} u = xy^4 \\ v = xy \end{cases}$$

$$J^{-1} = \begin{vmatrix} y^3 & 4xy^3 \\ y & x \end{vmatrix} = xy^4 - 4xy^4 = -3xy^4 = \boxed{-3u}$$

$$|J| = \frac{1}{3u}$$

$$\left.\begin{aligned} xy^4 = 15 &\to u = 15 \\ xy^2 = 3 &\to u = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u = \begin{cases} 15 \\ 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} xy = 2 &\to v = 2 \\ xy = 4 &\to v = 4 \end{aligned}\right\} \to v = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

$$S = \iint_D |J|\,dA = \int_2^4 \int_3^{15} \frac{1}{3u}\,du\,dv = \frac{1}{3}\underbrace{\int_2^4 dv}_{v\Big|_2^4 = 2} \int_3^{15} \frac{du}{u}$$

$$\ln u\Big|_3^{15} =$$

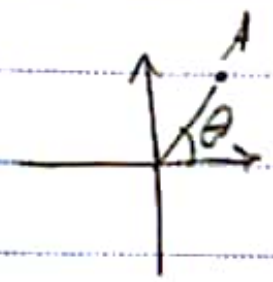
Subject.

Date.

$$۴-۲=۲ \qquad \ln a\Big|_{۵}^{۱۵} = \ln ۱۵ - \ln ۵ = \ln ۳$$

$$\tfrac{۱}{۲} \times ۲ \times \ln ۳ \qquad \boxed{۳ = \ln ۳}$$

۱- تغییر متغیر قطبی:




$$(۲) \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$A(r,\theta)$ فاصله نقطه تا مبدأ مختصات $r$

زاویه‌ای که نقطه با محور $x$ها می‌سازد $\theta$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^۲\theta + r\sin^۲\theta = r$$

$$dA \overset{\text{کارتزی}}{=\!=} dx\,dy$$

$$dA \overset{\text{قطبی}}{=\!=} |J|\,dr\,d\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{dA = r\,dr\,d\theta} \quad (۱)$$

$dr$ و $d\theta$ همواره جایی جا می‌شوند

$$x^۲ + y^۲ = r^۲\cos^۲\theta + r^۲\sin^۲\theta = r^۲(\cos^۲\theta + \sin^۲\theta) = r^۲$$

$$\boxed{x^۲ + y^۲ = r^۲} \quad (۳)$$



Name

Subject.
Date.

* هرگاه تابع تحت انتگرال در ناحیه‌ی انتگرال‌گیری حاوی $\sqrt{\ }$ یا قسمتی از یکی حاوی $\sqrt{\ }$ باشد برای حل انتگرال از تغییر متغیر مقابل استفاده می‌کنیم.

معادله‌ی دایره به مرکز $(a,b)$ و شعاع $r$ $\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

مثال: $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx = ?$

$$I=\iint \frac{r\cos\theta \times r\sin\theta}{\sqrt{r^2}}\,r\,dr\,d\theta = \iint \underbrace{r^2\cos\theta\sin\theta}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta}\,dr\,d\theta$$

$$=\iint r^2\times\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\,dr\,d\theta =$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\times\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\,dr\,d\theta = \tfrac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2}\sin 2\theta\,d\theta}_{-\frac{1}{2}\cos 2\theta\,\Big|_0^{\pi/2}=1}\underbrace{\int_0^1 r^2\,dr}_{\frac{1}{3}r^3\,\Big|_0^1=\frac{1}{3}}$$

$$I=\tfrac{1}{4}\times 1\times\tfrac{1}{3}=\boxed{\tfrac{1}{12}} \qquad =\boxed{I}$$

Subject

Date

$y=0$

$y=\sqrt{1-x^2} \longrightarrow y^2=1-x^2 \longrightarrow x^2+y^2=1$




$x=0$

$x=1$

$y=\pm\sqrt{1-x^2}$

$$I=\iint_D \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}}=?$$

$$D=\{(x,y) \mid x^2+(y-1)^2 \le 1\}$$

$x^2+y^2-2y+1=1$ (قطبی)

$r^2-2r\sin\theta=0$

$r(r-2\sin\theta)=0 \longrightarrow \begin{cases} r=0 \\ r=2\sin\theta \end{cases}$




$$I=\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} \frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{2-r^2}}$$

اول $dr$: $-\frac{1}{2}\int_0^{2\sin\theta} \frac{-2r}{\sqrt{2-r^2}}\,dr=-\frac{1}{2}\int_1^{1+\cos 2\theta} u^{-\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{u}}$

$u=2-r^2$

Subject.
Date.

$$= -\tfrac{1}{2} \times \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{-u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}u} \Big|_{4}^{4\cos^2\theta} = -\sqrt{4\cos^2\theta} + \sqrt{4} = -2\cos\theta + 2$$

$$\text{کل انتگرال} : \int_0^{\pi} -2\cos\theta - 2 \, d\theta = -2\sin\theta - 2\theta \Big|_0^{\pi} = \boxed{2\pi}$$

$$= \int u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

$$u = 4 - r^2$$

$$du = -2r\,dr$$

$$r = 0 \rightarrow u = 4$$

$$r = 2\sin\theta \rightarrow u = 4 - 4\sin^2\theta = 4(1 - \sin^2\theta) = 4\cos^2\theta$$

مثال: مساحت ناحیه‌ی محدود بین دایره‌های $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2=1$

و خطوط $y=\sqrt{3}x$ و $y=-\sqrt{3}x$ را در قسمت بالای محور $x$ها بیابید.

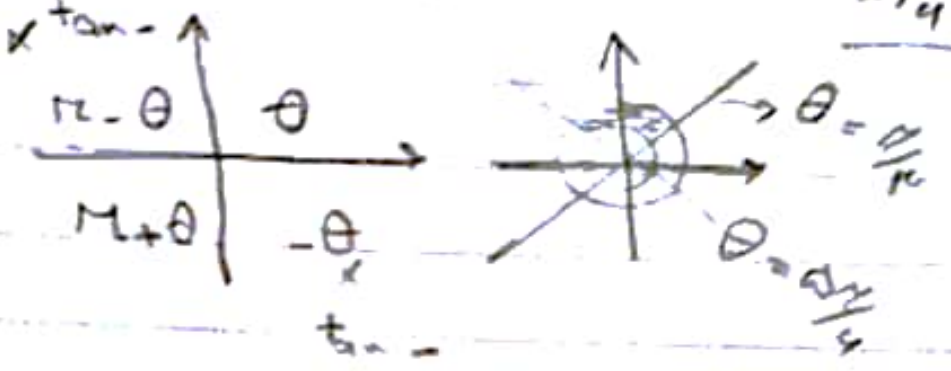
$$y = \sqrt{3}x \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \qquad \frac{y}{x} = \frac{2\sin\theta}{2\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\tan\theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = \pi/3$$

(۳۸)

Subject
Date

$y = -\sqrt{3}/2\, a \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3}/2$ $\quad \tan\theta = -\sqrt{3}/1 = \pi - \pi/4 = 5\pi/4$




$$S = \iint_D dA = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_1^2 r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} d\theta \int_1^2 r\,dr$$

$$\theta\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = \pi/2 \qquad \tfrac{1}{2}r^2\Big|_1^2 = 2 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}$$

$$S = \pi/2 \times 3/2 = \boxed{3\pi/4}$$

مثال: مساحت دایره‌ای به شعاع $a$ با به وسیله انتگرال دوگانه در دستگاه قطبی

$$S = \iint dA = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \boxed{\pi a^2}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr = \tfrac{1}{2}a^2 \times 2\pi = \boxed{\pi a^2}$$

$\theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \qquad \tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}a^2$

Subject
Date

کاربرد انتگرال سه‌گانه:

کاربرد ۱: حجم $V = \iiint_R dv$

مثال: حجم ناحیه‌ی محصور بین صفحات مختصات و صفحه $2x+y+z=4$

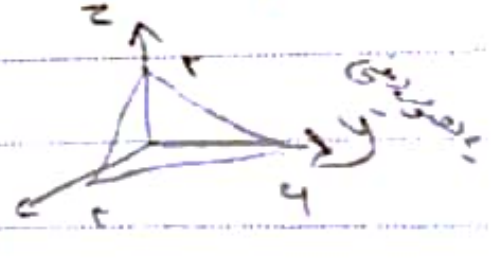
$\Rightarrow z = \frac{1}{4}(4-2x-y)$

رابطه آوردیم.

$x=y=0 \rightarrow z=2 \rightarrow A(0,0,2)$

$x=z=0 \rightarrow y=4 \rightarrow B(0,4,0)$

$y=z=0 \rightarrow x=2 \rightarrow C(2,0,0)$

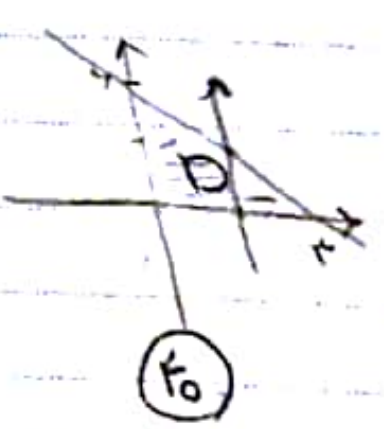



$$V = \iiint_R dv = \iint_D \int_0^{\frac{1}{4}(4-2x-y)} dz \, dA =$$

$$z\Big|_0^{\frac{1}{4}(4-2x-y)}$$

$$V = \iint_D \frac{1}{4}(4-2x-y)\,dA$$

| x | y |
|---|---|
| 0 | 4 |
| 1 | 2 |




$z=0$ حذف $z$ ← تابع D

$2x+y=4 \rightarrow y = -2x+4$

۲۵

Subject
Date

$$V = \frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^{-2x+4} 4 - 2x - y \, dy \, dx$$

$$4y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 \Big|_0^{-2x+4}$$

$$4(-2x+4) - 2x(-2x+4) - \frac{1}{2}(-2x+4)(-2x+4)$$

$$(-2x^2+12x-18)$$

$$-12x+36+4x^2-12x-2x^2+12x-18 =$$

$$V = \int_0^2 2x^2 - 12x + 18 \, dx = 9 \cdot \frac{1}{2}(18 - 36 + 36) = 9$$

تفسیر هندسی استوانه ای در انتگرال سه‌گانه :

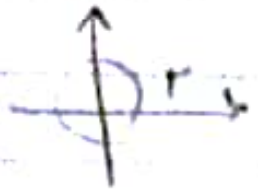
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad dv = dz\, r\, dr\, d\theta$$

ترتیب عوض نمیشود

$x^2+y^2=4$ ⟶ دوبعدی دایره $(0,0)$ و $r=2$

↓

استوانه ← سه‌بعدی






Subject.
Date.

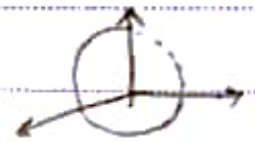
مثال: حجم محدود به دو رویه $z = x^2+y^2$ و $z = 8 - x^2 - y^2$ را محاسبه کنید.

* سه مثال:

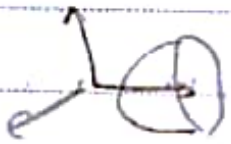
$z = x^2+y^2$ { راستای محور z، دهانه رویه بالا، $(0,0,0)$ }



$x = 4 - y^2 - z^2$ { راستای محور x، دهانه رویه پایین، $(4,0,0)$ }



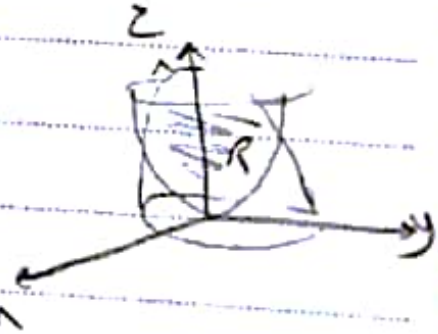
$y = 1 + x^2 + z^2$ { راستای y، دهانه رویه بالا، $(0,1,0)$ }



حل مثال:

$z = 8 - x^2 - y^2$ ← راستای z، دهانه پایین، $(0,0,8)$

$z = x^2+y^2$ ← راستای z، دهانه ↑، $(0,0,0)$




$$V = \iiint_R dv = \iint_D \left| \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} dz \right| dA =$$

انتگرال دوگانه

$$z \Big|_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} = 8 - 2(x^2+y^2)$$

نوشتن دقیق فرمول نحوه داده حتی نمره



PAPCO

Subject.
Date

$$V=\iint_D 8-2(\underbrace{x^2+y^2}_{r^2})\,dA \qquad \text{قطبی: } V=\int_0^{2\pi}\int_0^2 (8-2r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

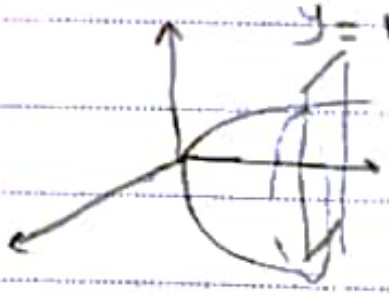
$$V=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (8-2r^2)\,r\,dr \Rightarrow V=8\times 2\pi=16\pi$$

$$\underbrace{\theta\Big|_0^{2\pi}}_{2\pi} \qquad \underbrace{4r^2-\tfrac{1}{2}r^4\Big|_0^2}_{16-8=8}$$

مثال: حجم محصور بین سهمی‌وار $y=x^2+z^2$ و صفحه $y=1$ ؟

در راستای $y$ و صعودی

$(0,0,0)$




$$V=\iiint_R dv=\iint_D \left[\int_{\frac{1}{2}(x^2+z^2)}^{1} dy\right] dA$$

$$y\Big|_{\frac{1}{2}(x^2+z^2)}^{1} \longrightarrow 1-\tfrac{1}{2}(x^2+z^2)$$

(صفحه) $y=1$ — (سهمی‌وار) $y=\frac{1}{2}(x^2+z^2)$

$$V=\iint_D 1-\tfrac{1}{2}(x^2+z^2)\,dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}(1-\tfrac{1}{2}r^2)\,r\,dr\,d\theta \quad (\text{ج})$$

مثال برعکس: $x^2+z^2=2$ دایره $\begin{cases}(0,0)\\ \sqrt{2}\end{cases}$

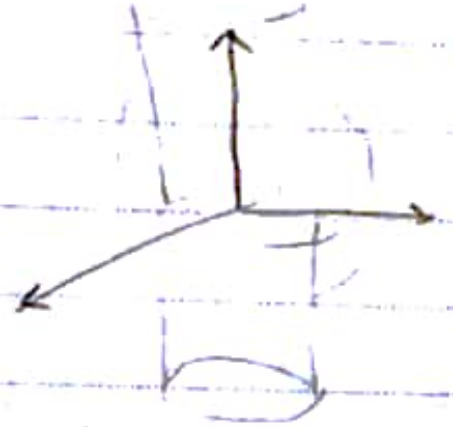



(۴۲)

Subject
Date.

مثال: حجم جسمی را محاسبه کنید که محدود بکره $x^2+y^2+z^2=4$ باشد

و داخل استوانه $x^2+y^2=1$ قرار گیرد.



$$z^2 = 4-x^2-y^2 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{4-x^2-y^2}$$

$$V = \iiint_R dv = \iint_D \left| \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{+\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right| dA$$

$$\downarrow \quad 2\sqrt{4-(x^2+y^2)}$$

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4-r^2}\, r\,dr\,d\theta$$

$$V = 2\int_0^{2\pi} d\theta \cdot -\frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{\sqrt{4-r^2}}_{u}\,\underbrace{(r\,dr)}_{(-2)\,du}$$

$$\underbrace{2\pi}\qquad -\frac{1}{2}\int_4^3 \sqrt{u}\,du \longrightarrow \frac{1}{2}\int_3^4 \sqrt{u}\,du$$

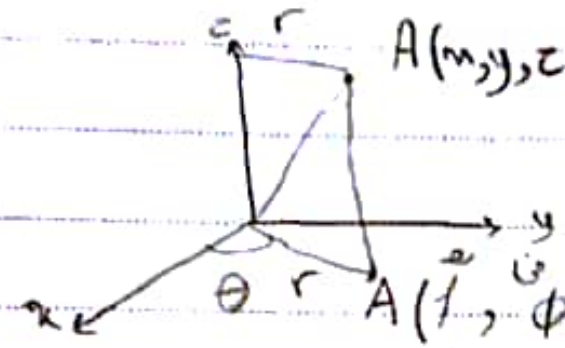
$$= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_3^4 = \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3})$$

$$2\times 2\pi\times\frac{1}{3}(8-3\sqrt{3}) = \frac{4\pi}{3}(8-3\sqrt{3})$$

(۴۴)

Subject.
Date.

* تعبیر هندسی کره‌ی در دستگاه کروی سه‌بعدی:




(* $\phi$ بیشتر از نیم‌خط $0 \leq \phi \leq \pi$ *)

فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدا ← $\rho$

زاویه‌ی بین $\rho$ و جهت + محور $z$ها ← $\phi$

زاویه‌ی بین ۲ جهت + محورهای $x$ها ← $\theta$

رابطه‌ی بین مختصات کروی و دکارتی:

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases} \quad (1)$$

$\sin\phi = r/\rho \longrightarrow r = \sin\phi \cdot \rho$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$\cos\phi = z/\rho \longrightarrow z = \cos\phi \cdot \rho$ (2)

Subject.
Date.

(2) $x^2+y^2 = \rho^2\sin^2\phi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\phi\sin^2\theta = \rho^2\sin^2\phi$

(3) $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$

$\rho^2\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi = \rho^2$

(4) $dv = \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

مثال: به کمک انتگرال سه‌گانه، حجم کره‌ای به شعاع $a$ برابر است با:

$\frac{4}{3}\pi a^3$

$V = \iiint dv =$

$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$

$\iint_S z\, dA$ ← مساحت

$\iiint_V dv$ ← حجم جسم

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi \int_0^{a} \rho^2 d\rho = 2\pi \times 2 \times \frac{1}{3}a^3 = \frac{4\pi}{3}a^3$

$\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$

$\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi = -\cos\phi\,|_0^{\pi} = 2$

$\int_0^{a} \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\rho^3\,|_0^{a} = \frac{1}{3}a^3$

∴

Subject

Date.

مثال: انتگرال سه‌گانه $I = \iiint \frac{dv}{x^2+y^2+z^2}$ را محاسبه کنید.

که ناحیه $R$ داخل کره $x^2+(y-1)^2+z^2 \le 1$ و خارج کره $x^2+y^2+z^2 \le 1$ باشد.

(معادله کره به مرکز مبدأ و شعاع ۱)

حل: معادله کره: $x^2+y^2+z^2-2y+1=1$

$\rho^2$

$\rho^2 = 2y \rightarrow \rho^2 = 2\rho\sin\phi\sin\theta$

$\rho = 2\sin\phi\sin\theta$

$\rho = \int_0^{2\sin\phi\sin\theta}$

$$I = \iiint \frac{\rho^2\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta}{\rho^2} = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi\sin\theta} \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$\rho\sin\phi\Big|_0^{2\sin\phi\sin\theta}$

$$I = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin^2\phi\sin\theta\, d\phi\, d\theta =$$

$$2\underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta}_{-\cos\theta\Big|_0^{\pi}\ /\ 2}\ \underbrace{\int_0^{\pi}\sin^2\phi\, d\phi}_{\pi/2} = 2\times 2\times \pi/2 = \boxed{2\pi}$$

Subject
Date

نکته: انتگرال های $\int \sin^2 x$ و $\int \cos^2 x$ را فرمول نصف کمان حل می کنیم.

$$\begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\phi = \int_0^{\pi} \frac{1(1-\cos 2\phi)}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 1-\cos 2\phi =$$

$$\frac{1}{2}\left[\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

مثال: حجم ناحیه ای را در بالای صفحه $xoy$ محاسبه کنید که درون کره $x^2+y^2+z^2=9$ و بین مخروط های $z^2=x^2+y^2$ و $3z^2=x^2+y^2$ قرار دارد.



Subject
Date

$\rho^2 = 9 \rightarrow \rho = 3 \longrightarrow \rho \int_0^3$ : ناحیه ها

$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi \Rightarrow \frac{\sin^2\phi}{\cos^2\phi} = 1 \Rightarrow \phi = \pi/4$

$3z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 3\rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi \rightarrow \tan^2\phi = 3$

$\tan\phi = \sqrt{3}$

$\phi = \pi/3 \longleftarrow \theta \int_0^{2\pi}$ همیشه تغییرات این کمیت $\theta$ از ۰ تا $2\pi$ است

$\phi \int_{\pi/4}^{\pi/3}$

$$v = \iiint_R dv = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\phi \, d\phi \int_0^3 \rho^2 d\rho = 2\pi \times \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right) \times 9 =$$

$\theta|_0^{2\pi} = 2\pi$ ; $-\cos\phi = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ; $\frac{1}{3}\rho^3|_0^3 = 9$ ; $9\pi(\sqrt{2}-1)$

مثال: انتگرال سه‌گانه $I = \iiint_R x e^{(x^2+y^2+z^2)^2} dv$ را حل کنید که ناحیه‌ی R محصور بین دو کره $x^2+y^2+z^2 = 4$ و $x^2+y^2+z^2 = 1$ و بالای مخروط $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ است.

Subject.

Date.




$\rho^2 = 4 \longrightarrow \rho = 2 \longrightarrow \rho \in [1, 2]$ $\qquad \phi \in [0, \pi/4]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$\rho^2 = 1 \longrightarrow \rho = 1$

$\rho^2 \cos^2\phi = 3\rho^2 \sin^2\phi \longrightarrow \tan^2\phi = 1/3 \rightarrow \phi = \pi/6$ ↑

$$I = \iiint \rho \sin\phi \cos\theta \, e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 \rho^4 e^{\rho^3} \sin^2\phi \cos\theta \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$I = \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta}_{\sin\theta \big|_0^{2\pi} = 0} \underbrace{\int_0^{\pi/4} \sin^2\phi \, d\phi}_{\rightarrow \frac{1}{2}(\phi - \frac{1}{2}\sin 2\phi)_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\pi/4 - 1/2)} \int_1^2 \rho^4 e^{\rho^3} \, d\rho =$$

به دلیل متقارن بودن، انتگرال فوق در ربع اول صفحه دو برابر

$$4 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta = 4 (\sin\theta)\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

(۵۰)

Subject.
Date.

$u = \rho^4 \rightarrow du = 4\rho^3 d\rho$

$$\frac{1}{4}\int \underbrace{4\rho^3 e^{\rho^4} d\rho}_{du} = \frac{1}{4}\int_1^{16} e^u du = \frac{1}{4} e^u \Big|_1^{16} =$$

$$\frac{1}{4}(e^{16} - e)$$

$$\Rightarrow I = 4 \times \frac{1}{4}\left(\frac{13}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times \frac{1}{4}(e^{16} - e^1)$$

مثال: حجم جسمی را محاسبه کنید که محصور بین $x^2+y^2+z^2=3$ و سطح $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ است.

فصل پنجم: انتگرال خط و سطح

* انتگرال سطحی الف: تابع $\vec{F}: R^n \rightarrow R^m$

$\vec{F}: R^2 \rightarrow R^2$ را میدان برداری دوبعدی می‌نامیم. مخصوص توابع $(m, n \geq 1)$

و $\vec{F}: R^3 \rightarrow R^3$ میدان برداری دوبعدی و سه بعدی نامیم. سوال:

ملی میدان های برداری دوبعدی و سه بعدی به صورت زیر است:

Subject.
Date.

$$\vec{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y))$$

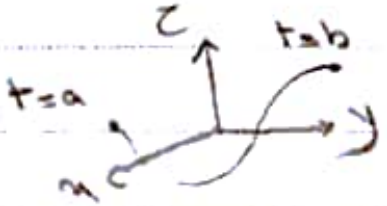
$$\vec{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z))$$

انتگرال خطی، انتگرال کسری از یک میدان برداری $\vec{F}$ بر روی

تابع برداری C با معادله ی $R(t) = (x(t), y(t), z(t))$

را در نظر بگیرید. قبلاً گفتیم که هر تابع برداری در واقع یک معادله

مسیر حرکت می باشد که متغیر را در بازه ی $t$ بدست می دهد.




در انتگرال خطی، انتگرال بر روی یک تابع برداری محاسبه می شود

و مسیر C معمولاً زیر داده می آید:

معادلات پارامتری مسیر C
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a \le t \le b$$

Subject.
Date.

* منحنی $\gamma$ را در فاصله‌ی $[a,b]$ همواره گوییم هرگاه مشتقات

حداکثر مرتبه‌ی اول آن موجود و پیوسته باشد.

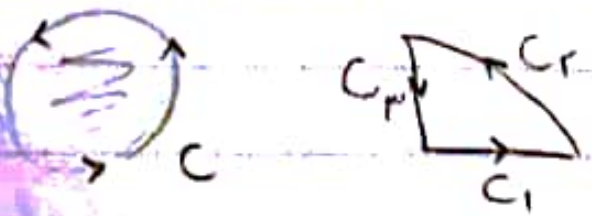
* منحنی $\gamma$ را بسته‌ای نامیم هرگاه $R(a)=R(b)$ یعنی نقاط

ابتدا و انتها بر هم منطبق شده باشند.

* منحنی $\gamma$ را ساده گوییم هرگاه خودش را قطع نکند.




* جهت منحنی $\gamma$ را در جهت $\Delta$ در نظر می‌گیریم.




$C = C_1 + C_2 + C_3$

Subject
Date

اگر مولفه‌های میدان برداری $F$ را $(M, N, P)$ در نظر بگیریم،

انتگرال مسیر خط میدان برداری $F$ در مسیر $C$ به شکل $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$

تعریف می‌شود که در آن:

$$\vec{dR} = (dx, dy, dz)$$
$$\vec{F} = (M, N, P)$$
$$\Rightarrow F \cdot dR = M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot \vec{dR} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz \quad (*)$$

این انتگرال مقدار کاری را حساب می‌کند که نیروی $F$ برای جابه‌جایی جسمی در مسیر $C$ از $a$ تا $b$ انجام می‌دهد. با جایگذاری $x$ و $y$ و $z$ و $dx$ و $dy$ و $dz$ در معادله $(*)$ بر حسب پارامتر داده شده، به انتگرال معمولی بر حسب $t$ می‌رسیم.

Subject
Date.

مثال: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (x+y, y, z+x)$ در امتداد منحنی

بردار مفروض $R(t) = \cos^2 t\,\vec{i} + \sin^2 t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$ با معادله پارامتری

برای $0 \le t \le \pi$ محاسبه کنید.

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = y \\ p = z-x \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u = \cos^2 t + \sin^2 t \longrightarrow u = 1 \\ v = \sin^2 t \\ p = t + \cos^2 t \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} x = \cos^2 t \longrightarrow dx = -2\cos t \sin t = -\sin 2t\,dt \\ y = \sin^2 t \longrightarrow dy = 2\sin t \cos t = \sin 2t\,dt \\ z = t \longrightarrow dz = 1 \times dt = dz = dt \end{cases}$$

$$W = \int_0^{\pi} -\sin 2t + \sin^2 t\,(\sin 2t) + (t + \cos^2 t)\,dt$$

$$= -\int_0^{\pi} \sin 2t\,dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t\,(\sin 2t)\,dt + \int_0^{\pi} t + \cos^2 t\,dt = \frac{\pi^2 + \pi}{2}$$

(۱) (۲) (۳)

Subject
Date

(۲) $\frac{1}{2}\cos 2t \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$

(۱) $\int_0^{\pi} \sin^2 t\,(\sin t)\,dt = \int_0^{0} u\,du = 0$

$u = \sin^2 t \rightarrow du = 2\sin t \cos t = \sin 2t\,dt$

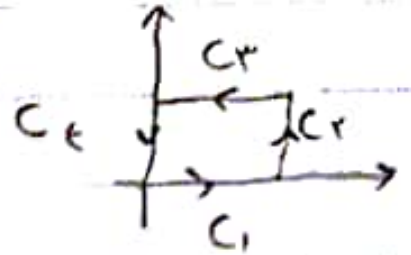
(۳) $\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2+\pi}{2}$

مثال: انتگرال خط $\int_C x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$ را بردی

سربی با رئوس $(0,0)$ و $(0,1)$ و $(1,0)$ و $(1,1)$ در جهت مثلثاتی

محاسبه کنید.

حل:




$C_1\begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = 0 \rightarrow dy = 0 \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$C_2\begin{cases} x = 1 \rightarrow dx = 0 \\ y = t \rightarrow dy = dt \end{cases}$ $\quad 0 \le t \le 1$

$C_3\begin{cases} x = t \rightarrow dx = dt \\ y = 1 \rightarrow dy = 0 \end{cases}$ $\quad 1 \ge t \ge 0$

$C_4\begin{cases} x = 0 \rightarrow dx = 0 \\ y = t \rightarrow dy = dt \end{cases}$ $\quad 1 \ge t \ge 0$

* حواستان جمع باشد!

Subject.
Date.

$$\int_{C_1} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \int t^2(0)^2\,dt + t^3(0)\,dt = 0$$

$$\int_{C_2} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \int 1\times t^2(0) + 1\times t\,dt = \int_0^1 t\,dt =$$

$$\tfrac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

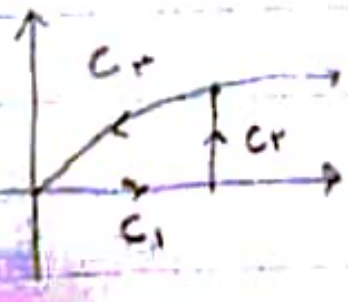
$$\int_{C_3} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \int t^2\,dt + 0 = \tfrac{1}{3}t^3\Big|_1^0 = -\tfrac{1}{3}$$

$$\int_{C_4} x^2y^2\,dx + x^3y\,dy = \int_1^0 0 = 0$$

$$S_C = 0 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + 0 = \tfrac{1}{4}$$

۱) $\int_C (x-y)\,dx + y\,dy$ مثال: انتگرال منفی الف

در هر کدام مسیر C خودش را مشخص کنید.



Subject

Date

$C_1 \begin{cases} x=t \to dx=dt \\ y=0 \to dy=0 \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{C_1} (x-y)dx + y\,dy = \int_0^1 (t-0)dt + 0 = \int_0^1 t\,dt = \tfrac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

$C_2 \begin{cases} x=1 \to dx=0 \\ y=t \to dy=dt \end{cases} \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_{C_2} (x-y)dx + y\,dy = \int_0^1 (1-t)(0) + t\,dt = \int_0^1 t\,dt = \tfrac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

$C_3 \begin{cases} x=t \to dx=dt \\ y=\sqrt{t} \to dy=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt \end{cases} \quad 1 \ge t \ge 0$

$$\int_{C_3} (x-y)dx + y\,dy = \int_1^0 (t-\sqrt{t})dt + \sqrt{t} \times \tfrac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \int_1^0 (t-\sqrt{t}+\tfrac{1}{2})\,dt = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2}t\Big|_1^0 = 0 - (\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3}$$

$\therefore I_{ac} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

(ans)

FAFCO

Subject.
Date.

تعریف: میدان برداری $\vec{F}$ را کامل یا پایستار گوییم هرگاه تابع چند متغیره

$f$ پیدا شود به طوری که $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ تابع $f$ را تابع پتانسیل

میدان برداری $\vec{F}$ می نامند.

* قضیه: میدان برداری $\vec{F}$ کامل است اگر و تنها اگر $\operatorname{curl} \vec{F} = 0$

مثال: برای میدان برداری زیر $\vec{F} = \frac{x}{x^2+y^2}\vec{i} + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right)\vec{j}$

الف) نشان دهید $\vec{F}$ کامل است.

$$\vec{\nabla F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{vmatrix} = \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) - \left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

$\operatorname{curl} \vec{F} = 0$ میدان $\vec{F}$ کامل است.

نحوه یافتن تابع پتانسیل: مشخص باشد که میدان کامل $\vec{F}$ یک تابع

پتانسیل $f$ وجود دارد که $\vec{\nabla} f = \vec{F}$

Subject
Date

پس می‌توان برای یافتن تابع پتانسیل از مولفه‌های میدان برداری انتگرال گرفت

$$\vec{F} = (M, N, P)$$

انتگرال‌های $\int P\,dz$ ، $\int N\,dy$ ، $\int M\,dx$ را حل کرده، سپس

عبارتی که بدست آمده را به صورتی می‌نویسیم که متغیرهای ها یکبار نوشته شوند.

مثال) تابع پتانسیل را بیابید

$$\int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx = \ln(x^2+y^2)$$

$$\int \left(\frac{y}{x^2+y^2} - y\right)dy = \int \frac{2y}{x^2+y^2} - \int y = \ln(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) - \tfrac{1}{2}y^2$$

قضیه اساسی انتگرال خط:

انتگرال مستقل از مسیر است $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{R}$ انتگرال منفی الخط

Subject
Date

اگر و تنها اگر میدان برداری $\vec{F}$ کامل باشد. در این صورت:

$$\int_C \vec{F}.d\vec{R} = f(B) - f(A)$$

که در آن A, B نقاط ابتدا و انتهای مسیر C تابع پتانسیل است.

مثال: برای میدان برداری نیرو $\vec{F} = \frac{x}{x^2+y^2} i + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) j$

ج) کار انجام شده توسط این میدان را بردار مسیر $y = \sqrt{x}$

از $x = 1$ تا $x = 4$ بدست آورید.

ابتدا $(1,1)$ و انتها $(4,2)$ است

$$W = \int_C F.dR = f(\text{انتها}) - f(\text{ابتدا}) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln 20 - 2\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}(\ln 20 - \ln 2) - 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 10 - \frac{3}{2} = \boxed{\frac{\ln 10 - 3}{2}}$$

Subject.
Date.

برای میدان برداری $\vec{F} = \left( \frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2} \right)$

الف) نشان دهید $F$ پایا است.

ب) تابع پتانسیل ؟

ج) کاری را محاسبه کنید که توسط این میدان روی مسیر $\vec{R}(t) = (t, t^2, t+1)$ $0 \le t < 2$ انجام می‌شود.

الف)

$$\text{Curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{z} & \frac{y}{z} & 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\left( \frac{-2y}{z^2} - \left(-\frac{2y}{z^2}\right) \right) - \vec{j}\left( \frac{-2x}{z^2} - \left(-\frac{2x}{z^2}\right) \right) + \vec{k}(0-0) = 0$$

ب)

$$\int \frac{x}{z}\,dx = \frac{1}{z}\int x\,dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} x^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$\int \frac{y}{z}\,dy = \frac{1}{z}\int y\,dy = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} y^2 = \frac{y^2}{4}$$

$$\int \left(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\right) dz = \int 1\,dz - (x^2+y^2)\int \frac{1}{z^2}\,dz = z + \frac{x^2+y^2}{z}$$

$$\int \frac{1}{z^2}\,dz = \frac{z^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{1}{z}$$

Subject
Date

$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z$

ج)

$W = f(\text{انتها}) - f(\text{ابتدا})$

$(2,2,3) \leftarrow \qquad \rightarrow (0,0,1)$

$W = \left(\frac{4}{2} + \frac{16}{2} + 3\right) - (0+0+1) = 12 + 3 = \boxed{\frac{25}{2}}$

تمرین: کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = (ze^x + e^y, xe^y - e^z, e^x - ye^z)$

در راستای مسیر $\vec{R}(t) = (\sin t - \cos t + t, \sin t + \cos t)$ برای

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ بیابید.

نکته: اگر میدان برداری $\vec{F}$ کامل و متغیر $C$ بسته باشد

$$\int_C F \cdot dR = 0$$

* قضیه گرین: اگر $C$ یک منحنی ساده و بسته در $R^2$

جهت + مثلثاتی و $D$ ناحیه‌ی درون آن باشد و $\vec{F} = (M, N)$

Subject.
Date.

فرض کنید $C$ مرزی دوبعدی باشد، در این صورت:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dy\,dx$$



قضیه گرین: یک انتگرال خط در راستای مسیر بسته $C$ را با یک انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ی داخل $C$ یعنی $D$ مرتبط می‌کند. شرط استفاده از قضیه گرین به صورت زیر دقت کنید: ۱) منحنی $C$ بسته باشد.

۲) $\vec{F}$ دوبعدی باشد.

مثال: اگر $C$ دایره‌ای با مرکز مبدا و شعاع ۱ باشد، انتگرال خط

$$\oint_C \underbrace{e^{x^2}}_{M} dx + \underbrace{(x^2 - y)}_{N} dy$$

را محاسبه کنید.

Subject
Date

$$\frac{\partial m}{\partial y}=0 \qquad \iint_D (1x-0)\,dy\,dm = \iint_D \overset{r\cos\theta}{\uparrow} r\,m\,\underbrace{dy\,dm}_{r\,dr\,d\theta}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}=1m \qquad \oint \uparrow \cdot = 1\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$= 1\Big(\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta}_{+\int_0^{\pi/2}\cos\theta = 1}\Big)\Big(\underbrace{\int_0^1 r^2\,dr}_{\frac{1}{3}r^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}}\Big) = 1\times 1\times\tfrac{1}{3} = \boxed{\tfrac{1}{3}}$$

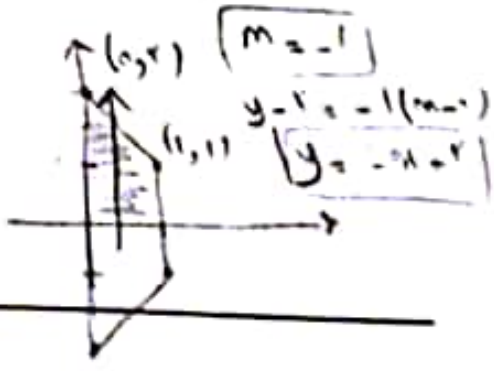
سؤال: انتگرال $I=\oint_C (2x\sin^2 y - y^2)\,dx + (2x^2 y\cos y - 3x)\,dy$ را روی مسیر C حول نقطه‌های $(0,2),(0,-2),(1,1)$ به دست آورید.

حل: نسبت به مبدأ $(1,-1)$ با استفاده از $\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x^2\cos y - 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 4xy\cos y + 3$$

$$\longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 3 + 2y$$






RAPCO

Subject.
Date.

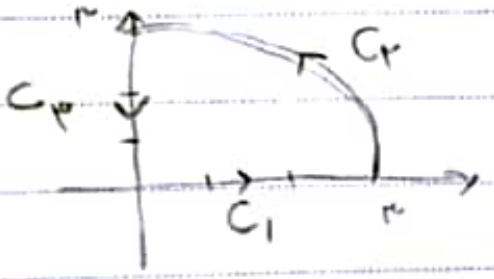
$$I = 2\iint_D (x^2+2y)\,dA = 2\int_0^1 \underbrace{\int_0^{2-x} (x^2+2y)\,dy}_{x^2y+y^2\Big|_0^{2-x}}\,dx$$

$$x^2(2-x)+(2-x)^2 = 4-2x+4x^2-x^3-4x$$

$$I = 2\int_0^1 x^2-5x+10\,dx$$

$$= 2\left(\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{5}{2}x^2+10x\right)_0^1 = 2\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{5}{2}+10\right) = 2\times\tfrac{41}{6} = \boxed{\tfrac{41}{3}}$$

اگر میدان $F=(x+2y,\ xy)$ و مسیر $C$ قطعه زیر باشد مقدار $\int_C F\cdot dr$ را بیابید.




$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

حل: برای حل انتگرال مقابل کافیست ابتدا مسیر را پارامتری کنیم:

$$C_1 = \begin{cases} x=t \to dx=dt \\ y=0 \to dy=0 \end{cases} \quad 0\le t\le 3$$



PqPCO

Subject.

Date.

$$I_1 = \int_{C_1} (t+1)\,dt = \int_0^3 t\,dt = \tfrac{1}{2}t^2\Big|_0^3 = \tfrac{9}{2}$$

$$C_3 = \begin{cases} x = 0 \to dx = 0 \\ y = t \to dy = dt \end{cases} \qquad 3 \geq t \geq 0$$

$$I_1 = \int_{C_2} 0 + 0 = 0$$

$$C_2 = \begin{cases} x = 3\cos t \to dx = -3\sin t\,.\,dt \\ y = 3\sin t \to dy = 3\cos t\,dt \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \tfrac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_{C_2} (3\cos t + 9\sin t)(-3\sin t\,dt) + 9\sin t\cos t\,(3\cos t\,.\,dt)$$

$$= -9\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t - 18\int_0^{\pi/2} \sin^2 t + 27\int_0^{\pi/2} \sin t\cos^2 t$$

(1) (2)

(1) $-9\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\,dt = -\tfrac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t = -\tfrac{9}{2}\times -\tfrac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2}$

($\tfrac{1}{2}\sin 2t$)

$$= \tfrac{9}{4}(-1-1) = -\tfrac{9}{2}$$

Subject.
Date.

(۲) $-۱۸\int_{۰}^{\pi/۲} \underbrace{\sin^۲t}_{\frac{۱-\cos ۲t}{۲}} = -۹\int_{۰}^{\pi/۲} ۱-\cos ۲t = -۹\left(t-\frac{۱}{۲}\sin ۲t\right)\Big|_{۰}^{\pi/۲}$

$= ۹\left(\frac{\pi}{۲}\right) = \frac{-۹\pi}{۲}$

(۳) $-۲۷\int_{۰}^{\pi/۲} \underbrace{[-\sin t]\cos^۲t\,dt}_{du} = -۲۷\int_{۱}^{۰} u^۲\,du = ۲۷\int_{۰}^{۱} u^۲\,du$

$u=\cos t \rightarrow du = -\sin t$ $\Big\}$ $= ۹$ $\qquad \frac{۱}{۳}u^۳\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۳}$

$I_۱ = \int_{C_۲} = -۹/۲ + ۰ - ۹\pi/۲ = ۹/۲ - ۹\pi/۲$

$I_۱ = -۹/۲ + ۰ + ۹/۲ - ۹\pi/۲ = -۹ - ۹\pi/۲$

پ لاد حیه (نکته بالا رو ننویس! حتماش باید مساوی هم باشه!)

$\frac{\partial N}{\partial x} = y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = ۲$ $\Big\}$ $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = y - ۲$

(۹۸)

Subject.
Date.

$$I_y = \iint_D (y-2)\,dA \xrightarrow{y=r\sin\theta,\ dA=r\,dr\,d\theta} \int_0^{\pi} \int_2^{4} (r^2\sin\theta - 2r)\,dr\,d\theta$$

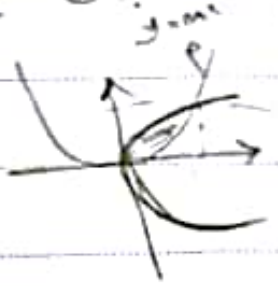
$$\int_2^4 (r^2\sin\theta - 2r)\,dr = \frac{r^3}{3}\sin\theta - r^2\Big|_2^4$$

$$= \int_0^{\pi} 8\sin\theta - 4\,d\theta = -8\cos\theta - 4\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$= (0 - 4\pi) - (-8 - 0) = 8 - 4\pi$$

عدد: دستی تقریبی از این میدان برداری $\vec{F} = (2xy - x^2, x + y^2)$

و ناحیه‌ی محدود به سهمی‌های $y = x^2$ , $x = y^2$ را بدست آورید.




$x = x^2 \rightarrow x - x^2 = 0$

$x(1 - x) = 0$

$x = 0, 1$

ج آخر $\frac{1}{30}$

انتگرال خط: ۱) میدان کامل است. ← تابع تپانسیل $f$

جواب = $f(\text{انتها}) - f(\text{ابتدا})$



PapCo

Subject
Date

۲) میدان کامل نسبت به $m$ یک بردار $F$ و دیگر باشد ... نامیده می‌شود

۵) انتگرال سطحی کلاً عددی است که می‌خواهیم معنی مسیر را پاک کرده و ...

فصل پنجم : انتگرال سطح : انتگرال گیری از یک تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ بر روی جسمی از سطح یک رویه خاص

$\int_S f(x,y,z)\,dS$ این انتگرال را به صورت $G(x,y,z) = 0$ نشان می‌دهیم

مثال می‌خواهیم که درک کنیم :

$$dS = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot P|}\,dA$$

از روی تصویر

بردار نرمال

برای محاسبه‌ی این انتگرال سطح $S$ را به قطعه‌ای با بردار نرمال $P$ تصویر می‌کنیم.



PAPCO

Subject
Date

اگر در صفحه xoy تصویر کنیم ←

$P_1 = (y_0, 1)$

← " xoz " "

$P = (\frac{1}{2}, 1, y_0)$

← " yoz " "

$P_2 = (1, 0, 0)$

مثال) انتگرال رویه ای زیر را بر سطح S، معادله $z = 4 - x^2 - y^2$ در حالت S صفحه xoy باشد.

$$\int \frac{x^2 + 2y + z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \, d\sigma$$

حل:

$$G = z + x^2 + y^2 - 4$$

$$\nabla G = (2x, 2y, 1) \rightarrow |\vec{\nabla} G| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$$

$$\nabla G \cdot P = (2x, 2y, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$$

$$d\sigma = \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}{1} \, dA = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \, dA$$

Subject

Date

$$\int \frac{2x^2+2y^2+2}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\, dA$$

$$= \int_S (2x^2+2y^2+2)\, dA = \iint_D \frac{x^2+y^2+1}{2}\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2+2)\, r\, dr\, d\theta$$

$D: x^2+y^2=2$



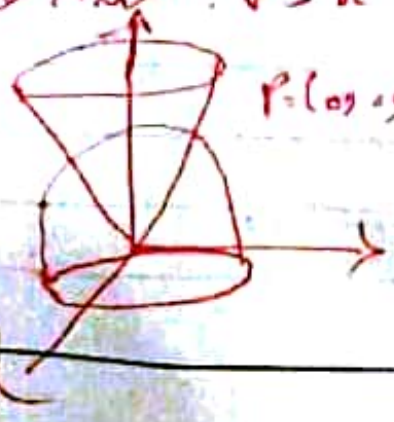
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3+2r\, dr = 2\pi \cdot \frac{11}{4} = \frac{11\pi}{2}$$

$$\text{مساحت } D = \iint_D dA$$

$$\text{حجم } R = \iiint_R dv$$

$$\text{مساحت سطح } S = \int_S d\sigma$$

حجم محصور بین مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و صفحه $z=2$ محاسبه کنید.




$z = \sqrt{x^2+y^2}$ حداکثر شود.

$$G = x^2 + y^2 + z^2 - 2$$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z)$$

$$|\nabla G| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}$$

$$= \sqrt{4(x^2+y^2+z^2)} = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$\nabla G \cdot P = (2x, 2y, 2z)(0,0,1) = 2z$$

$$d\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{2z}\, dA = \frac{\sqrt{2}}{z}\, dA$$

$$S = \int\int \frac{\sqrt{2}}{z}\, dA = \int\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}\, dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\, dr\, d\theta}{\sqrt{2-r^2}}$$

$$= \sqrt{2}\,(2\pi)(\sqrt{2}-1)$$

$$z^2 = x^2 + y^2$$

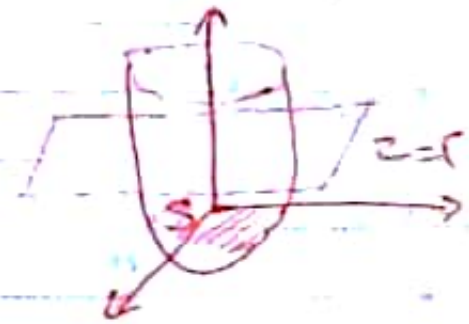
$$z^2 + x^2 + y^2 = 2 \rightarrow 2(x^2+y^2) = 2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$



Subject
Date

تمرین: مساحت سطح بخش از سهمیون $z=x^2+y^2$ واقع بین $z=0$ و $z=2$ را بیابید.




* شار: شار حاصل از میدان برداری $\vec{F}$ که از سطح S عبور می‌کند برابر است با:

$$\text{شار} = \int (F \cdot n)\, d\sigma$$

$$n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|}$$

مثال: شار حاصل از میدان برداری $\vec{F}=(2x, 2y, 2z)$ که از سطح $x^2+y^2+z^2=9$ در یک هشتم اول فضا عبور می‌کند را بیابید.

ناحیه اول

$G = x^2+y^2+z^2-9$ $\quad \nabla G = (2x, 2y, 2z)$

$$|\nabla G| = \sqrt{4x^2+4y^2+4z^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$n = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{(2x, 2y, 2z)}{6} = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right)$$

Subject
Date

$$F.n = (z_x, z_y, z^2) \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

$$\frac{1}{r} x^2 z + \frac{1}{r} y^2 z + \frac{1}{r} z^3$$

$$= \frac{1}{r} z (\underbrace{x^2 + y^2 + z^2}_{r^2}) = \frac{1}{r} z \times r^2 = rz$$

$$\Rightarrow \iiint_V = \int rz \, dV$$

$$dV = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G \cdot P|} = \frac{r}{rz} = \frac{r}{z} \, dA$$

$$\nabla G \cdot P = (2x, 2y, 2z) \cdot (0, 0, 1) = 2z$$

$$\Rightarrow \iiint_V = \int_S rz \times \frac{r}{z} \, dA = r \int_S dA$$

$$= r \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r \, dr \, d\theta$$




$$\frac{18\pi}{5}$$

عبارتی که $F = (a, b, 1)$ که $z = r - \sqrt{x^2 + y^2}$ بالای صفحه $z = r$ حرکت می‌کند؟

Subject
Date

* قضیه دیورژانس: اگر S یک سطح بسته و G(x,y,z) و R ناحیه درون آن باشد داریم:

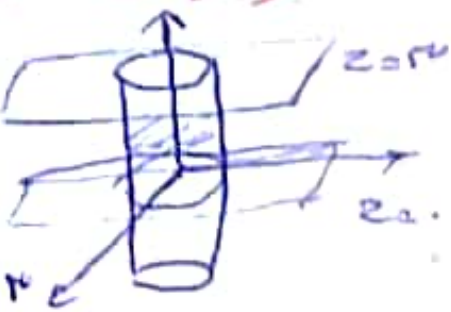
$$\iint_S (F.n)\,d\sigma = \iiint_R div\vec{F}\,dv$$

$$div\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(M,N,P) =$$

$$\Rightarrow div\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

مثال: شار حاصل از میدان برداری $F(x,y,z) = (x^2, -y^2, z^2)$ که از رویه بسته استوانه $x^2+y^2=1$ در بین صفحات $z=0$ و $z=2$ عبور می‌کند را حساب کنید.

$$div\vec{F} = 2x - 2y + 2z$$




$$\Phi = \iiint_0^2 (2x - 2y + 2z)\,dz\,dA$$

$$2xz - 2yz + z^2\Big|_0^2$$

$$4x - 4y + 4$$

$$\Phi = \iint 4x - 4y\,dA$$




$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r\cos\theta - 4r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

Subject
Date

$$= \iiint_{0}^{1} (11r - 12r^2 \sin\theta)\, dr\, dr\, d\theta$$

$$\frac{12}{2} r^2 - 4 r^3 \sin\theta \Big|_0^1$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{12}{2} - 4\sin\theta \, d\theta$$

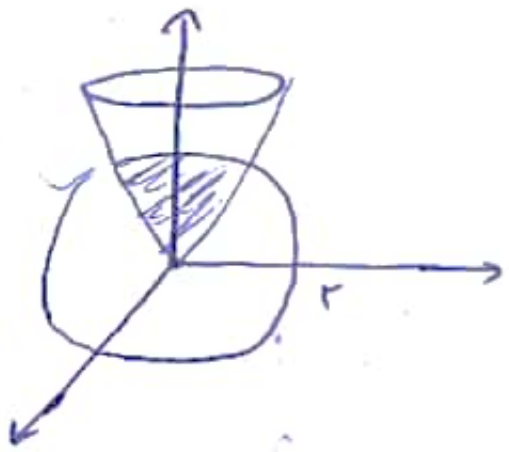
$$= 6\theta + 4\cos\theta \Big|_0^{2\pi} = 12\pi$$

مثال: شار میدان $\vec{F} = (x+y, z^2+y^2, 4x)$ گذرنده به سطح کره $x^2+y^2+z^2=4$ محدود کننده مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و کره

$$div F = 1+1+2 = 4$$

$$\Phi = \iiint 4\, dv$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$




$$x^2+y^2+z^2 = 4$$

$$\rho^2 = 4 \to \rho = 2$$

$$\rho \Big|_0^2$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$z^2 = x^2+y^2$$

$$\rho^2 \cos^2\varphi = \rho^2 \sin^2\varphi$$

$$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1 \to \tan^2\varphi = 1$$

$$\tan\varphi = 1 \to \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \qquad \theta \Big|_0^{2\pi}$$

Subject
Date

$$\text{حجم} = 4\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{2} \rho^2 d\rho$$

$2\pi$ — $-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$ — $\frac{1}{3}\rho^3\Big|_0^2$

$(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ — $\frac{8}{3}$

$$\text{حجم} = \frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

مثال: با استفاده از قضیه دیورژانس شار گذرنده توسط میدان برداری

$$\vec{F} = \langle x(y^2+z^2),\ y(x^2+z^2),\ z(x^2+y^2)\rangle$$

واقع بر کره $x^2+y^2+z^2=4$ به صورت خارج محاسبه کنید.

$$div\,F = y^2+z^2+x^2+z^2+x^2+y^2 =$$

$$2(x^2+y^2+z^2) = 8$$

$$\text{شار} = \iiint 8\,dV \quad \text{کره} = 8\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2} \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

مشتق جهتی تابع $f(x,y,z) = \cos(xz) + e^{xy}$ در نقطه $(0,1,0)$ در جهت بردار $4\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$

بردار یکه $\rightarrow \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{4+1+4} = 3 \rightarrow \frac{1}{3}$

$$\vec{u} = \left\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\rangle$$

PAPCO

Subject
Date

$f(x,y,z) = \cos(xz) + e^{xy}$

$\nabla f = \left(-z\sin(xz) + ye^{xy},\ xe^{xy},\ -x\sin(xz)\right)$

$(0,0,1)$ (نقطه)

$(0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2+y^2+z^2=2$ توسط استوانه $x^2+y^2=1$ محاط بخشی از کره، مساحت سطح جانبی استوانه را بیابید.

$$\int d\sigma \qquad d\sigma = \frac{|\nabla G|}{|\nabla G\cdot \hat{\rho}|} \qquad G = x^2+y^2+z^2-2$$

$$\nabla G = (2x, 2y, 2z)$$

$$z = \pm\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

$z \geq 0$ (منفی غیرقابل قبول)

$$\nabla G\cdot\hat{\rho} = (2x,2y,2z)\cdot(0,0,1) = 2z$$

$$|\nabla G| = \sqrt{4(x^2+y^2+z^2)} = 2\sqrt{2}$$

$$d\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,dA = \frac{\sqrt{2}}{z}\,dA$$

$$\int d\sigma = \int \frac{\sqrt{2}}{z}\,dA = \sqrt{2}\int \frac{dA}{z}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{dA}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}$$ قطبی

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\,dr\,d\theta =$$

PAPCO VA

Subject
Date

نقاط بحرانی

$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{4y^3}{3} - x^2 - 4x - 4y - 2$ نزدیک که تقسیم را طول کنم

$f_x = x^2 - 2x - 3 = 0 \longrightarrow x = 3, -1$

$f_y = 4y^3 - 4 = 0 \rightarrow y = \pm 1$

نقاط بحرانی $\begin{cases} (3,1) \\ (3,-1) \\ (-1,1) \\ (-1,-1) \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2x-2 & 0 \\ 0 & 12y \end{vmatrix}$

حساب

$(3,1)$ $D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 48 > 0 + f_{xx} > 0$ نقطه مینیمم

$(3,-1)$ $D = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -48 < 0$ زینی

$(-1,1)$ $D = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -48 < 0$ زینی

$(-1,-1)$ $D = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 48 > 0 + f_{xx} < 0 \rightarrow$ نقطه ماکزیمم