وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Subject
Year Month Day

ریاضی ۲ 11, 14

بردار یکه $u_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

$|AB| = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

$A=(x_0,y_0,z_0)$

$B=(x_1,y_1,z_1)$

ضرب داخلی:
$\vec{A}.\vec{B} = |A||B|\cos\theta$
$\vec{A}.\vec{B} = x.x_1 + y.y_1 + z.z_1$

اگر بردار A با محورهای x و y و z به ترتیب زوایای α و β و γ را بسازد، آنگاه داریم:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

مثال. زاویه بردار A با جهت ⊕ محور x و y به ترتیب $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{4}$ است. زاویه‌ی بردار $\frac{A}{2}$ با جهت مثبت محور z را بیابید.

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \longrightarrow \cos^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\gamma = 1$

$(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \cos^2\gamma = 1 \longrightarrow \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - 1 = \cos^2\gamma \longrightarrow$

$\cos^2\gamma = 0 \longrightarrow \cos\gamma = 0 \longrightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\pi}{2} \\ \gamma = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

ARAS NOTEBOOK

Subject
Year Month Date

$|2\vec{A}+2\vec{B}|=?$ ، $\vec{A}\cdot\vec{B}=6$ ، بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ با زاویه 60° هستند.

$$|A\pm B|^2=|A|^2+|B|^2\pm 2|A.B|$$

$$k(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\cdot k\vec{B} \longleftarrow \text{مثال} \quad |2\vec{A}.2\vec{B}|=2\times 2|\vec{A}\cdot\vec{B}|=4|\vec{A}.\vec{B}|$$

$$|2\vec{A}+2\vec{B}|^2=9|\vec{A}|^2+4|\vec{B}|^2+12|A.B| \longrightarrow$$

$$9+4+12 \longrightarrow |2\vec{A}+2\vec{B}|^2=144 \Rightarrow |2\vec{A}+2\vec{B}|=12$$

$$\vec{A}=(a_1,b_1,c_1)$$

$$\vec{B}=(a_2,b_2,c_2)$$

هندسی:
$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

دو بردار عمود بر هستند $\longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B}=0$

دو بردار موازی هستند:
$$\vec{A}\times\vec{B}=0$$
$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

$\vec{A}\times\vec{B}=?$ ، $\vec{B}=(0,2,-4)$ ، $\vec{A}=(-2,3,1)$: مثال

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}=(-12-2)i-(8)j+(-4)k=-14i-8j-4k$$

Subject
Year Month Date

مثال: مقدار m و n را طوری بیابید که ۲ بردار زیر هم‌خطی باشند.

$$\vec{A} = (m, 2n-1, 4n)$$

$$\vec{B} = (2, -3, 2n)$$

$$\frac{m}{2} = \frac{2n-1}{-3} = \frac{4n}{2n} \longrightarrow \begin{cases} \frac{m}{2} = 2 \longrightarrow m = 4 \\ 2n-1 = -6 \longrightarrow n = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

نکته: مساحت متوازی الاضلاعی که توسط ۲ بردار A و B ساخته می‌شود برابر با اندازه

$$S = |\vec{A} \times \vec{B}|$$

ضرب خارجی ۲ بردار است.

نکته: مساحت مثلثی که توسط ۲ بردار A و B ساخته می‌شود برابر است با نصف

$$S = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2}$$

اندازه ضرب خارجی ۲ بردار.

مثال: مساحت مثلثی را بیابید که از ۳ نقطه $a = (2, 4, 1)$ و $b = (2, -1, 3)$ و $C = (-1, -1, 2)$ ساخته شده‌اند.

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = (0, -4, 2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = (-3, -4, 1)$$

$$(AB \times AC) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4i - 6j - 12k = (-4+8)i - (0+6)j + (0-12)k$$

$$|AB \times AC| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + (-12)^2} = \sqrt{16 + 36 + 144} = 14 \qquad S = \frac{|AB \times AC|}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Subject:
Year Month Date

حجم متوازی السطوحی که از سه بردار $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ حاصل می‌شود از فرمول زیر بدست می‌آید:

$A=(a_1, a_2, a_3)$ $B=(b_1, b_2, b_3)$ $C=(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=(a_1, a_2, a_3).\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال: حجم متوازی السطوحی را بیابید که از بردارهای $\vec{A}=(2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$،

$\vec{C}=(-2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k})$، $\vec{B}=(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})$

$$V=\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-22-7+9=-20 \hookrightarrow |-20|=20$$

ASANG Notebook

Subject
Year Month Date

بردار مماس: اگر $R(t)$ بردار مکان منحنی C در نقطه P باشد آنگاه

$$T(t) = \frac{dR(t)}{|dR(t)|}$$

بردار مماس واحد بر C را با $T(t)$ نشان می‌دهیم.

بردار قائم: اگر T بردار مماس واحد بر منحنی C باشد آنگاه بردار قائم واحد بر C را با $N(t)$ نمایش داده و با فرمول زیر بدست می‌آوریم.

$$N(t) = \frac{dT(t)}{|dT(t)|}$$

مثال. معادلات پارامتری زیر مفروض است. T و N را در نقطه $t=2$ بیابید.

$$\begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 4t^2 \end{cases} \qquad R(t) = (t^3 - 3t)\vec{i} + (3t^2)\vec{j}$$

$$R'(t) = (3t^2 - 3, 6t) \qquad T(t) = \frac{(3t^2 - 3, 6t)}{\sqrt{9t^4 - 18t^2 + 9 + 36t^2}}$$

$$= \frac{(4t^2 - 3, 6t)}{\sqrt{(4t^2 + 3)^2}} = \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)\vec{i} + \left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)\vec{j}$$

AVANG

Subject:
Year: Month: Date:

$$N = \frac{\left(\frac{2t(t^2+1) - 2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2} , \frac{2(t^2-1) - 2t(2t)}{(t^2+1)^2} \right)}{\sqrt{\frac{16t^2}{(t^2+1)^4} + \frac{4t^4 - 8t^2 + 4}{(t^2+1)^4}}} =$$

$$\frac{\left(\frac{4t}{(t^2+1)^2} , \frac{-2t^2+2}{(t^2+1)^2} \right)}{\frac{2t^2+2}{(t^2+1)^2}} = \frac{4t}{2t^2+2}\vec{i} + \frac{-2t^2+2}{2t^2+2}\vec{j} \xrightarrow{t=2} \frac{8}{10}\vec{i} - \frac{6}{10}\vec{j}$$

انحنای منحنی: برای پیدا کردن انحنای منحنی تغییرات بردار T را وقتی به نقطه P روی منحنی جابجا می‌شود بدست می‌آوریم که بعد از محاسبات، فرمول زیر را داریم.

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}}$$

مثال. انحنای خط راست $y = ax + b$ را بیابید.

$y = ax + b$

$y' = a$

$y'' = 0$

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}} = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{0}{(1+a^2)^{3/2}} = 0$$

مثال: انحنای منحنی $y = e^{2x}$ را در نقطه $(0,1)$ بیابید.

ARASG Kutabaca

Subject:
Year Month Date

$y = e^{2x} \longrightarrow y' = 2e^{2x} \longrightarrow y'' = 4e^{2x}$ $\quad x' = 1,\ x'' = 0$

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|4e^{2x}|}{[1 + (2e^{2x})^2]^{3/2}} \overset{(0,1)}{=\!=} \frac{4}{5^{3/2}}$$

$x = y^3$ در نقطه $(1,1)$

اگر y برحسب x تعریف شود، در نقطه مفروض $x' = 1$, $x'' = 0$ است.

اگر x برحسب y تعریف شود، در نقطه مفروض $y' = 1$, $y'' = 0$ است.

$x = y^3 \longrightarrow x' = 3y^2 \longrightarrow x'' = 6y$ $\quad y' = 1,\ y'' = 0$

$$k = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{|-6y|}{(9y^4 + 1)^{3/2}} = \frac{6y}{(9y^4+1)^{3/2}} = \frac{6}{(10)^{3/2}}$$

$x^2 + y^2 = 25$ این معادله‌ی دایره است $(x^2 + y^2 = r^2)$ ، باید این را به صورت پارامتری در بیاوریم که شکل پارامتری آن چه خواهد بود با:

پس $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 5\sin\theta \end{cases}$

خط هم راست:

AVANG Notebook

Subject
Year Month Date

$\begin{cases} x = 5\cos t \longrightarrow x' = -5\sin t \longrightarrow x'' = -5\cos t \\ y = 5\sin t \longrightarrow y' = 5\cos t \longrightarrow y'' = -5\sin t \end{cases}$

$$k = \frac{|-5\sin t(-5\sin t) - (-5\cos t)(5\cos t)|}{((-5\sin t)^2 + (5\cos t)^2)^{3/2}} = \frac{25}{(25)^{3/2}} = \frac{1}{5}$$

انحنای هر دایره‌ای برابر است با عکس شعاع. $(\frac{1}{r})$

مانند عدم و میزان مقدار انحنای بیضی $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ را بیابید.

$y = 4\sin t$ ⟵ cos و sin
$x = 5\cos t$ ⟵ است که باید بدانیم بجای t چه نوشته‌ایم تا مانند عدم و میزان بدست آید. برای مثال $\frac{x^2}{2}$ + مانند عدم را به جای دهد....

انحنا در مختصات قطبی

$$k = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$$

انحنای منحنی قطبی زیر را بدست آورید.

$r = 4\sin 2\theta$

$A = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{8})$

$r = 4\sin 2\theta \longrightarrow r' = 8\cos 2\theta \longrightarrow r'' = -16\sin 2\theta$

Subject
Year Month Date

$$k = \frac{|(4\sin 2\theta)^2 + 2(8\cos 2\theta)^2 + 4\sin 2\theta \cdot 16\sin 2\theta|}{((4\sin 2\theta)^2 + (8\cos 2\theta)^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{80\sin^2 2\theta + 128\cos^2 2\theta}{[16\sin^2 2\theta + 64\cos^2 2\theta]^{3/2}} \xrightarrow{\theta=\pi/4} \frac{40+64}{[80]^{3/2}} = \frac{104}{(40)^{3/2}}$$

محاسبه انحنای منحنی‌های فضایی

$$k = \frac{|R'(t) \times R''(t)|}{|R'(t)|^3}$$

انحنای منحنی $R(t) = (\sin t)i + (\sin t)j + (\sqrt{2}\cos t)k$ را بیابید.

$$R(t) = (\sin t)\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + (\sqrt{2}\cos t)\vec{k}$$

$$R'(t) = (\cos t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + (-\sqrt{2}\sin t)\vec{k}$$

$$R''(t) = (-\sin t)\vec{i} + (-\sin t)\vec{j} + (-\sqrt{2}\cos t)\vec{k}$$

$$k = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \cos t & -\sqrt{2}\sin t \\ \sin t & \sin t & -\sqrt{2}\cos t \end{vmatrix}}{(\sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t + 2\sin^2 t})^3}$$

AVANG Notebook

Subject
Year Month Date



$$\frac{|(-\sqrt{2}\cos^2 t - \sqrt{2}\sin^2 t)i - (-\sqrt{2}\cos^2 t - \sqrt{2}\sin^2 t)j + (-\sin t\cos t + \sin t\cos t)k|}{(\sqrt{2})^3}$$

$$= \frac{|(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)|}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{2+2}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{2}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

بردار قائم دوم

$B = T \times N$

حرب خارجی بردار مماس و قائم را می‌گویند

(به همین سبب ۲ بردار T, N، صفحه‌ی بوسان می‌گویند.)

مثال. منحنی C با معادلات پارامتری زیر داده شده است. T, N, B را حساب کنید.

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4}z^2 + 1 \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{4}z^2 + 1 \longrightarrow z^2 - 4z + 4 = 0 \longrightarrow (z-2)^2 = 0 \longrightarrow \boxed{z = 2}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \longrightarrow x' = -\sqrt{2}\sin t \\ y = \sqrt{2}\sin t \longrightarrow y' = \sqrt{2}\cos t \\ z = 2 \longrightarrow z' = 0 \end{cases}$$

Subject
Year Month Date

$R(t) = \sqrt{2}\cos t\, i + \sqrt{2}\sin t\, j + 2k$

$R'(t) = -\sqrt{2}\sin t\, \vec{i} + \sqrt{2}\cos t\, \vec{j} + 0 \quad \Rightarrow R'(t) = (-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t)$

$R''(t) = -\sqrt{2}\cos t\, \vec{i} - \sqrt{2}\sin t\, \vec{j}$

$$T(t) = \frac{(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t)}{\sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t}} \Rightarrow \left(\frac{-\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}\cos t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$2(\sin^2 t + \cos^2 t) = 1 \qquad = (-\sin t, \cos t)$$

$$N(t) = \frac{-\cos t, -\sin t}{\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}} = (-\cos t, -\sin t)$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = 1k$$

تاب: اگر C با افزایش صفحه‌ی بوسان باشد وقتی که P روی خم حرکت می‌کند، شاخص است از مقدار بیشینه خم در آن نقطه زیر به دست می‌آید.

$$\tau = \pm \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{|R' \times R''|^2}$$

Subject

مثال: معادله صفحه بوسان بردار مماس منحنی زیر را در نقطه $t=\frac{\pi}{4}$ بیابید.

$$R(t)=(\sin t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+(\sqrt{2}\cos t)\vec{k}$$

$$R'(t)=(\cos t)\vec{i}+(\cos t)\vec{j}+(-\sqrt{2}\sin t)\vec{k}$$

$$R''(t)=(-\sin t)\vec{i}+(-\sin t)\vec{j}+(-\sqrt{2}\cos t)\vec{k}$$

$$R'''(t)=(-\cos t)\vec{i}+(-\cos t)\vec{j}+(\sqrt{2}\sin t)\vec{k}$$

$$T=\frac{(\cos t,\cos t,-\sqrt{2}\sin t)}{\sqrt{\cos^2 t+\cos^2 t+2\sin^2 t}}=\frac{(\cos t,\cos t,-\sqrt{2}\sin t)}{\sqrt{2}}$$

$$N=\frac{\left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}},\frac{-\sin t}{\sqrt{2}},-\cos t\right)}{\sqrt{\frac{\sin^2 t}{2}+\frac{\sin^2 t}{2}+\cos^2 t}}=\left(\frac{-\sin t}{\sqrt{2}},\frac{-\sin t}{\sqrt{2}},\cos t\right)$$

$$B=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & \frac{\cos t}{\sqrt{2}} & -\sin t \\ \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} & \frac{-\sin t}{\sqrt{2}} & -\cos t \end{vmatrix}=\left(\frac{-\cos^2 t}{\sqrt{2}}-\frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}\right)i-$$

$$\left(\frac{-\cos^2 t}{\sqrt{2}}-\frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}\right)j+\left(\frac{-\sin t\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{2}}\right)k$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

نرمال (a,b,c)

$A(x_0,y_0,z_0) \rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

Subject:
Year Month Date

نرمال $B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$t=\frac{\pi}{2} \longrightarrow (1,1,0)$ ($\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2}$)

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{2}}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(y-1)=0$

حال باید تاب را حل کنیم

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \cos(t) & \cos(t) & -\sqrt{2}\sin(t) \\ -\sin(t) & -\sin(t) & -\sqrt{2}\cos(t) \\ -\cos(t) & -\cos(t) & \sqrt{2}\sin(t) \end{vmatrix}}{|R' \times R''|^2} =$$

$$\frac{\cos(t)(-\sqrt{2}\sin^2(t)+\sqrt{2}\cos^2(t)) - \cos(t)(-\sqrt{2}\sin^2(t)-\sqrt{2}\cos^2(t)) - \sqrt{2}\sin(t)(\sin(t)\cos(t)-\sin(t)\cos(t))}{[1-\sqrt{2}\cos^2(t)-(\sqrt{2}\sin t)]i-[-\sqrt{2}\cos^2 t-\sqrt{2}\sin^2 t]j+[-\cos t\sin t+\cos t\sin t]k}$$

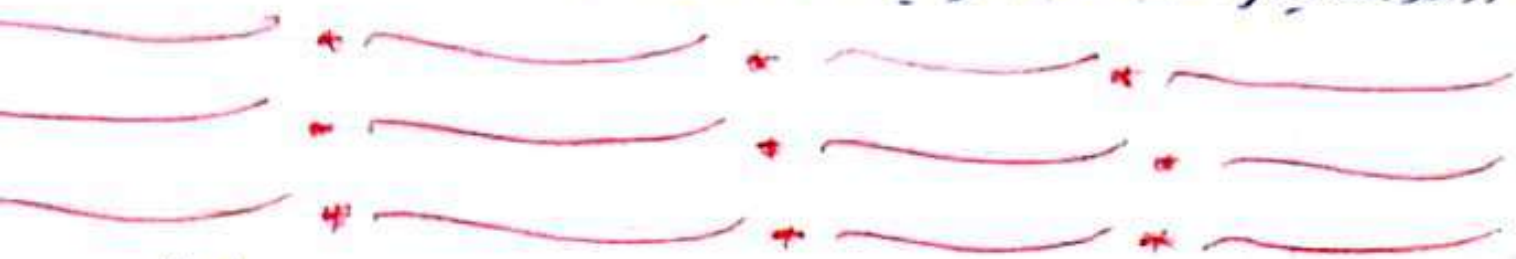
$-\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{2}$

$$= \frac{0}{|-\sqrt{2}i+\sqrt{2}j|^2} = \frac{0}{4} = 0$$

حبر خطی. ۱۱,۲۴

جهت
نقشه:

در صورت نیاز، جهت جغرافیایی را می‌توان روی نقشه به صورت N ↑ نشان داد



۱۱,۴۰

ریاضی ۲

سطوح درجه دوم

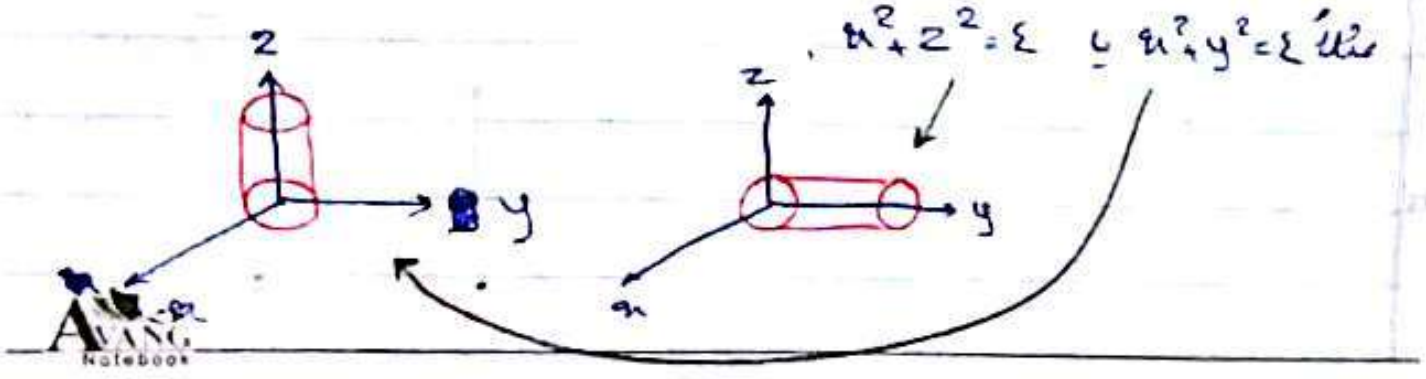
رویه یا سطح در فضای سه بعدی نقاطی مانند (x,y,z) می‌باشند بطوری که

$F(x,y,z)=0$ است. ساده‌ترین رویه صفحات و بعد از آن استوانه می‌باشد

استوانه: رویه‌ای است که از یک خم و از دو جهت صفحه می‌گذرد و با خط صافی موازی است

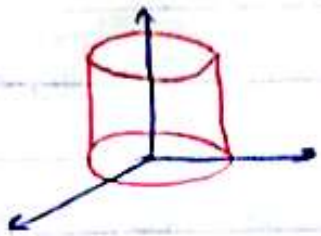
همه حفره‌ای که از

مثلاً $x^2+y^2=4$ یا $x^2+z^2=4$

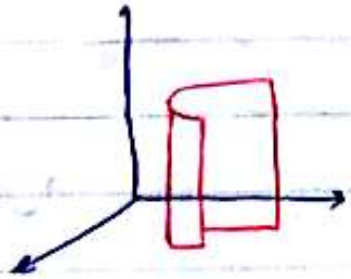


Subject
Year Month Date

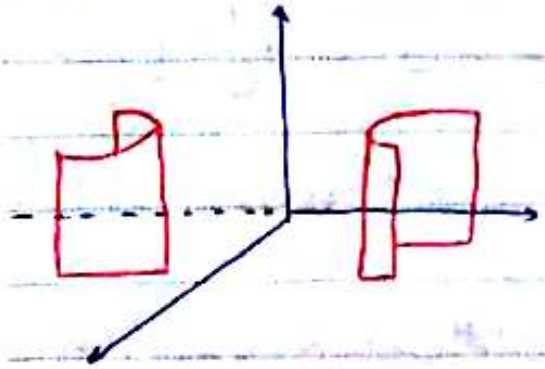
چون این رویه به z بستگی ندارد در نتیجه صفحات مختلف $z = c$ بیضی به مرکز $(0,0)$ و نقطه‌های A, B خواهیم داشت. حال اندازه این صفحه‌ها را به هم متقل نمایید نمودار یک استوانه بیضوی حاصل شد.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$y = x^2 + 1$$



$$y^2 - x^2 = 2$$

بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



ARANG Notebook

Subject
Year Month Date

سطح درجه دوم زیر چه نام دارد $9x^2+14y^2+24z^2-18x-24y-24z+24=0$

$9(x^2-2x)+14(y^2-2y)+24(z^2-z)+24=0$

$9(x-1)^2+14(y-2)^2+24(z-\frac{1}{2})^2=12 \quad \div 12$

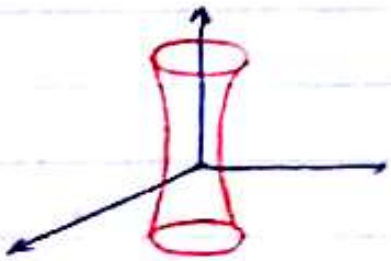
$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}}=1$

شکل بیضی گون است که قدر ۱ و ۲ و ۳ و شعاع های ۲، ۳، ۴.

هذلولی گون تک پارچه:

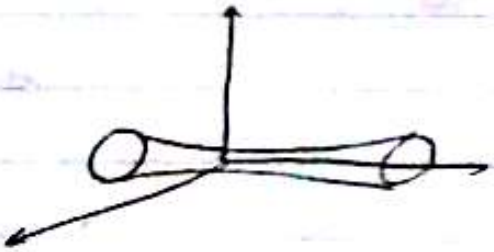
تک پارچه می گوییم. چون از رفتن حول تک ⊖ داریم، هذلولی را

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



$12x^2-9y^2+24z^2=12$

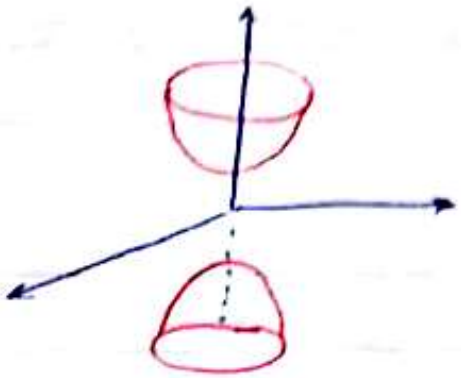
$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{2}=1$



Subject
Year Month Day

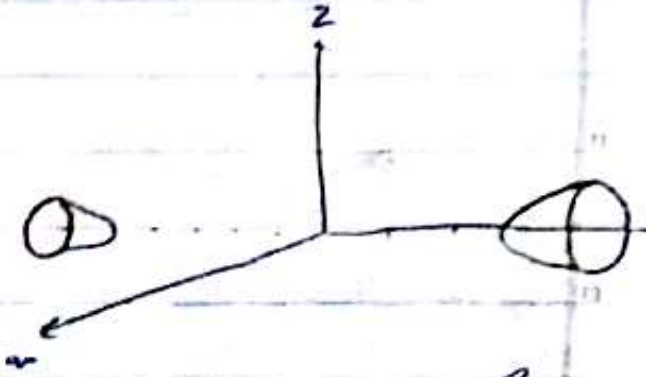
دوپارچه یا دوتایی بودن ؟

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



$$-۲۴x^2 + ۱۰۰y^2 - ۲۲۵z^2 = ۹۰۰$$

$$-\frac{x^2}{۲۵} + \frac{y^2}{۹} - \frac{z^2}{۴} = 1$$



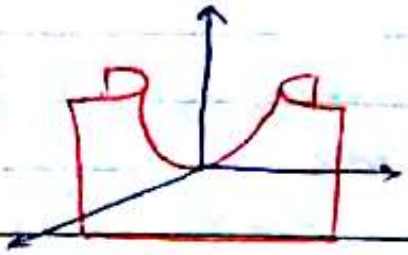
سهمی گون بیضوی :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$



سهمی گون هذلولی :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

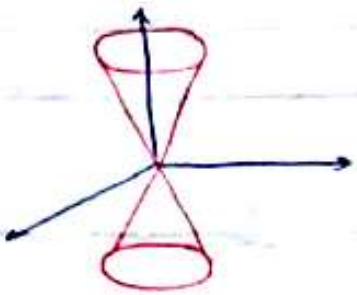


AVASG Notebook

Subject
Year Month Date

مخروط بیضوی :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$



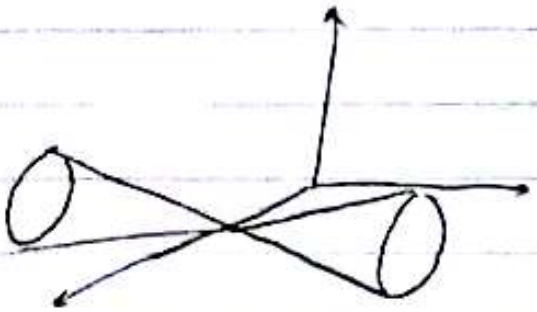
سطح درجه ۲ زیر چه نام دارد ؟

$$4x^2 - 8x - 4y^2 + 4z^2 + 4 = 0$$

$$4x^2 - 8x + 4z^2 + 4 = 4y^2$$

$$4(x^2 - 2x + z^2 + 1) = 4y^2$$

$$(x-1)^2 + z^2 = y^2$$



فصل دوم

حد

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \longrightarrow |f_{(x,y)} - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{(0,0)} e^{2x-6y} = e^{2\ln 4 - 6(0)} = e^{\ln 16} = 16$$

$(x,y) \longrightarrow (\ln 4, 0)$

Subject:
Year Month Date

قضیه

اگر تابع $f_{(x,y)}$ وقتی که x و y از طریق ۲ مجموعه متمایز از نقاط به سمت x_0 و y_0 میل کند، حدهای متفاوتی داشته باشند، آنگاه گوییم $\lim f_{(x,y)}$ وجود ندارد.

در مورد حد داشتن یا نداشتن حد دوبدو در مبدأ بحث کنید.

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

روی محور xها $\lim \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$ $\quad (x,0) \to (0,0)$

روی محور yها $\lim \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1$ $\quad (0,y) \to (0,0)$

$1 \neq -1 \hookrightarrow$ حد ندارد.

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

روی محور xها $\lim \frac{0}{x^2+0} = 0$ $\quad (x,0) \to (0,0)$

روی $y=x$ها $\lim \frac{2x^2}{x^2+x^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$

$0 \neq 1 \hookrightarrow$ حد ندارد.

ARANG Notebook

مجموعه توابع چند جمله‌ای مخرج کسر از صورت است، حد وجود ندارد.

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{x^2y}{x^{12}+3x^6y^2+y^4}$$

حد ندارد $\Leftarrow$ روی محور xها $\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{0}{(x^2+0)^2}=0$

روی $y=x^3$ $\lim \frac{x^{12}}{(x^6+x^6)^2}=\frac{x^{12}}{(2x^6)^2}=\frac{1}{4}$

$(x,x^3)\to(0,0)$

آیا تابع $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته است؟ خیر، $\frac{1}{2}$

آیا $f(x,y)=\begin{cases}\frac{cx^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ در نقطه $(0,0)$ پیوسته است؟

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \quad 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \longrightarrow \left|\frac{cx^2y}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$

$\left|\frac{cx^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{c(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = c\sqrt{x^2+y^2} < c\delta < \varepsilon$

کافیست $\varepsilon = c\delta$ فرض کنیم. یعنی: $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$.

$|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$
$x^2\le x^2+y^2$

۱۲,۷

ریاضی ۲

مشتق جزئی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f(x,y,z) = 3x^2y - 5e^{x^2+z^2}$$

AVANG Notebook

Subject
Year Month Date

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 10xy - 8xe^{x^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 10y - 12x^2 e^{x^2+z^2}$$

$$f_{yx} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} \Rightarrow$$ اول نسبت به y مشتق بگیرید بعد نسبت به x $= 10x$

مثال:

$$f(x,y,z) = \ln(x^2 - 4y^2) - 4ze^{x+4z}$$

$$\ln u = \frac{u'}{u}$$

$$e^u = u'e^u$$

$f_{xy} = ?$

$f_{yz} = ?$

$$f_x = \frac{2x}{x^2 - 4y^2} \qquad f_{xy} = \frac{0 - (-12y)2x}{(x^2-4y^2)^2} = \frac{24xy}{(x^2-4y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{-12y}{x^2 - 4y^2} \qquad f_{yz} = 0$$

مثال:

$$f_{(x,y,z)} = x^2 \tan z + zy \sin(2xy)$$

$f_{xxx} = ?$ $\qquad f_{yz} = ?$

Subject
Year Month Date

$y^2 z \cos(xyz)$

$f_x = yz\tan z + yz\cos(xyz)(zy)$

$f_{xx} = 2\tan z - 4y^3 z \sin(xyz)$

$f_y = z\sin(xyz) + xz^2 y\cos(xyz)$

$f_{yz} = \sin(xyz) + xyz\cos(xyz)$

$f(x,y,z) = \frac{4x}{y} - 5z\tan(xy) + 3\sec x$: Je

$f_{zx} = ?$

$f_{yz} = ?$

$f_z = -\frac{1}{2\sqrt{z}}\tan(xy)$ $\quad f_{zx} = \frac{-1}{2\sqrt{z}} y(1+\tan^2(xy))$

$f_y = \frac{-4x}{y^2} - \sqrt{z}\, x(1+\tan^2(xy))$ $\quad f_{yz} = \frac{-1}{2\sqrt{z}} x(1+\tan^2(xy))$

مشتق زنجیره‌ای :

$z = u^3 - 4v$

$u = \sqrt{x} + 4y$

$v = e^{xy+4}$

$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\times\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\times\frac{dv}{dx}$ ($3u^2$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, -4, ye^{xy+4})

$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du}\times\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv}\times\frac{dv}{dy}$ ($3u^2$, 4, -4, xe^{xy+4})

$w = \ln(x^2+y^2) + z$

$x = t\sqrt{t+1}$

$y = t^2 \sin t$

$z = te^{t^2}$

$\frac{dw}{dt} = ?$

$\frac{dw}{dt} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$

$\frac{2x}{x^2+y^2} \cdot 2\left(\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\right) + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot (2t\cos t) + 1(2te^{t^2})$

$w = x + xy + z^2$

$x = \frac{r}{s}$

$y = r^2 + \ln s$

$z = 2r$

$\frac{dw}{ds} = ?$

$\frac{dw}{ds} \cdot \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{ds}$

$1 \times \frac{-r}{s^2} + y \cdot \frac{1}{s} + 2z \cdot 0$

$\frac{dw}{dr} = ?$

$\frac{dw}{dx} \cdot \frac{dx}{dr} + \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dr} + \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dr}$

$1 \times \frac{s}{s^2} + y \times 2r + 2z \times 2$

$\frac{dw}{dr} = ?$

Subject
Year Month Date

$x^2+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$ در نقطه $(0,0,0)$ را در نظر $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ بدست آورید.

$F(x,y,z)=x^2+z^2+ye^{xz}+z\cos y=0$ را بنامید.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_x}{f_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_y}{f_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x+zye^{xz}}{2z+xye^{xz}-\cos y}=-\frac{2(0)+(0)(0)e^{(0)(0)}}{2(0)+(0)(0)e^{(0)(0)}-\cos(0)}=\frac{0}{1}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{e^{xz}-\sin yz}{2z+xye^{xz}-\cos y}=-\frac{e^{(0)(0)}-\sin(0)(0)}{2(0)+(0)(0)e^{(0)(0)}-\cos(0)}=\frac{-1}{-1}=1$$

اگر: $z=f\left(\frac{bx^2}{2},\frac{ay^3}{3}\right)$ آنگاه: $ay^2\times\frac{\partial z}{\partial x}+bx\times\frac{\partial z}{\partial y}$ معادل است با

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

($\frac{\partial u}{\partial x}=bx$)

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}$$

($\frac{\partial v}{\partial y}=ay^2$)

$$ay^2\times\frac{\partial z}{\partial u}+bx\times bx\times\frac{\partial z}{\partial v}\times ay^2=ay^2bx\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Subject
Year Month Date

معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$

مثال: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 2x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$

$\frac{\partial f}{\partial z} = -4z$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -4$

$\Rightarrow 2 + 2 - 4 = 0$

$f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ $\quad \tan^{-1} u \rightsquigarrow \frac{u'}{1+u^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{-x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}$

$\stackrel{+}{=} \Rightarrow 0$

$\frac{u_x + u_y}{u_z} = ?$ $\quad u = f\left(\underbrace{y-z}_{v}, \underbrace{z-x}_{w}, \underbrace{x-y}_{u}\right)$ حل: اگر تمرین

ANSG Notebook

Subject

حل سوال مثل جلسه قبل

$u = f(\underbrace{y-z}_{II}, \underbrace{z-x}_{I}, \underbrace{x-y}_{J})$

$\frac{u_x - u_y}{u_z} = ?$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial H}\times\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial I}\times\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial J}\times\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial I} + \frac{\partial u}{\partial J}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial H}\times\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial I}\times\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial J}\times\frac{\partial J}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial H} - \frac{\partial u}{\partial J}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial H}\times\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial I}\times\frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial J}\times\frac{\partial J}{\partial z} = -\frac{\partial u}{\partial H} - \frac{\partial u}{\partial I}$$

$$\frac{u_x + u_y}{u_z} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial I} + \frac{\partial u}{\partial J} - \frac{\partial u}{\partial H} - \frac{\partial u}{\partial J}}{-\frac{\partial u}{\partial H} + \frac{\partial u}{\partial I}} = -1$$

بردار شیب یا گرادیان:

$$\nabla f = f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}$$

مشتق سویی (جهتی):

$$D_u f = \nabla f \cdot \vec{u}$$ (باید $\vec{u}$ بردار یکه باشد)

مشتق جهتی تابع f در نقطه (x_1, y_1) در جهت بردار یکه $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ شیب

خط مماس بر منحنی c در نقطه $(x_1, y_1, f_{(x_1,y_1)})$

AVASG Notebook

Subject
Year Month Date

مثال: اگر $f_{(x,y)}=x^3y^2$ آنگاه مشتق سویی f در نقطه $P_{(-1,2)}$ در جهت بردار $Q=4i-3j$ بیابید.

$$\nabla f=(3x^2y^2,2x^3y)\overset{(-1,2)}{=\!=}(12,-4)$$

$$u_a=\frac{(4,-3)}{\sqrt{16+9}}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

$$D_uf=\nabla f.u=(12,-4).\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=\frac{48}{5}-\frac{12}{5}=\frac{60}{5}=12$$

مثال: فرض کنید $f_{(x,y)}=x^2-4xy$ مشتق سوی f را در نقطه $P(1,2)$ در جهت بردار PQ که از $P(1,2)$ به $Q(2,5)$ بدست آمده بیابید.

$$PQ.Q-P=>(1,3)$$

$$\nabla f=(2x-4y,-4x)\overset{(1,2)}{=\!=}(-6,-4)$$

$$u_a=\frac{(1,3)}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{(1,3)}{\sqrt{10}}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

$$D_uf=\nabla f.u=(-6,-4).\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\left(\frac{-6}{\sqrt{10}},\frac{-12}{\sqrt{10}}\right)=$$

$$\frac{-6}{\sqrt{10}}-\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{-18}{\sqrt{10}}\sim\frac{-18\sqrt{10}}{10}=\frac{-9\sqrt{10}}{5}$$

ARANG Notebook

Subject
Year Month Date

قضیه: فرض کنید f تابعی باشد که در نقطه P مشتق پذیر است.

الف) بیشترین مقدار مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان و برابر با $|\nabla f|$ است.

ب) کمترین مقدار مشتق سوئی در جهت بردار عکس گرادیان و برابر با $-|\nabla f|$ است.

مثال: جهت هایی را بیابید که تابع f در نقطه $(0,2,4)$ سریع ترین افزایش را داشته باشد.

$$f(x,y) = e^{xy} - z^2$$

$$\nabla f = (ye^{xy}, xe^{xy}, -2z) \xrightarrow{(0,2,4)} (2, 0, -8)$$

$$|\nabla f| = \sqrt{4 + 0 + 64} = \sqrt{68}$$

مثال: مشتق f در نقطه $(1,2)$ در جهت بردار $A = i + j$ برابر $D_u f = 2\sqrt{2}$ و در جهت $B = -2j$ برابر $D_u f = -4$ باشد. مشتق f را در جهت $C = -i - 2j$ بیابید.

$$\begin{cases} A = i + j \longrightarrow D_u f = 2\sqrt{2} \longrightarrow 2\sqrt{2} = (x,y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y = 2\sqrt{2} \\ B = -2j \longrightarrow D_u f = -4 \longrightarrow -4 = (x,y) \cdot (0,-1) \Rightarrow -4 = -y \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$$C = -i - 2j \rightsquigarrow u_C = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = (4,4) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-4}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{-12}{\sqrt{5}}$$

ANG Notebook

Subject
Year Month Date

مثال: اگر $f(x,y) = e^{4x^2y}$ هدف را در نقطه $(1,1)$ بیابید به ازای جهت مشتق

جهتی بردار $u = (x,y)$ بردار باشد.

$$\nabla f = (8xye^{4x^2y}, 4x^2e^{4x^2y}) \xrightarrow{(1,1)} (12e^{16}, 12e^{16}) = (1,1)$$

$$D_u f = \nabla f \cdot u = 0$$

$$(1,1)(x,y) = 0 \longrightarrow x + y = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ x + y = 0 \longrightarrow x = -y \end{cases}$$

$$u = -\frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2}j \qquad u = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

اگر بردارها یکه باشند، همیشه $x^2 + y^2 = 1$ است. به عبارت دیگر:

در تمام بردارهای یکه با مختصات (x,y) داریم $x^2 + y^2 = 1$.

مثال: اگر $f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 - 4y^3 + 4y^2 - x$ باشد. ماکزیمم مقدار مشتق جهتی f چقدر است؟

در نقطه A واقع بر محور xها برابر 4 است. نقطه A را بیابید.

ARANG Notebook

Subject
Year Month Date

$f_{(x,y)} = \frac{1}{2}x^4 - 4y^3 + 5y^2 - x - 4y$

$\nabla f = (2x^3 - 1, -12y^2 + 10y - 4) \xrightarrow{(x,0)} (2x^3 - 1, 0, -4)$

$|\nabla f| = \sqrt{x^6 - 2x^3 + 1 + 16} = \sqrt{x^6 - 2x^3 + 17}$

$\sqrt{x^6 - 2x^3 + 17} = 4 \longrightarrow x^6 - 2x^3 + 17 = 16 \longrightarrow x^6 - 2x^3 + 1 = 0$

$(x^3 - 1)^2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 1}$ $\quad A = (1, 0)$

صفحه مماس و خط قائم بدرویه:

هرگاه $f_{(x,y,z)} = 0$ بوده، f_x, f_y, f_z در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ پیوسته باشند، آنگاه بردار قائم بر سطح در نقطه P برابر با $\nabla f_{(x_0,y_0,z_0)}$ است که:

معادله صفحه مماس $f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) + f_z(z - z_0)$

معادله خط قائم: $\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{f_z}$

مثال:

$f_{(x,y,z)} = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8 = 0$, $A(2, 2, 1)$

معادله صفحه مماس و خط قائم بدرویه را بیابید.

AVANG Notebook

Subject
Year Month Day

مشتق $\Rightarrow a^u = u' a^u \ln a$

$\nabla f = \left(\frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} \ln x \,,\ \frac{1}{2} x^{\frac{y}{2}} \ln x \,,\ \frac{-x}{z^2} x^{\frac{x}{2}} \ln x + \frac{-y}{z^2} x^{\frac{y}{2}} \ln x\right)$

$\xrightarrow{(2,1,1)} (4\ln 2,\ 4\ln 2,\ -12\ln 2) \to (4,4,-12) \to (1,1,-4)$

صفحه مماس: $(x-2)+(y-2)-4(z-1)$

خط قائم: $(x-2)=(y-2)=\frac{z-1}{-4}$

نکته: برای نوشتن معادله خط مماس بر خم که حاصل مشترک ۲ رویه است، ابتدا باید گرادیان هر یک از رویه ها را محاسبه کرده و ضرب خارجی آنها را بیابیم.

مثال: حاصل مشترک رویه های $f = x^2 + y^2 - 2 = 0$, $g = x + 2 - 4 = 0$ خمی چون C است. معادلات پارامتری خط مماس بر C در نقطه $P(1,1,2)$ را بیابید.

$\nabla f = (2x, 2y, 0) \xrightarrow{(1,1,2)} (2,2,0)$

$\nabla g = (1,0,1) \xrightarrow{(1,1,2)} (1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-2,-2)$$

Subject:
Year: Month: Date

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-2} \longrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{2} = t \longrightarrow x = 2t+1 \\ \frac{y-1}{-2} = t \longrightarrow y = -2t+1 \\ \frac{z-3}{-2} = t \longrightarrow z = -2t+3 \end{cases}$$

مثال: معادله صفحه‌ای شامل خط قائم بر رویه $f(x,y,z) = y + \ln\left(\frac{x}{z}\right) - z = 0$ در نقطه $(1,1,1)$ را بیابید.

تمرین: بردار $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ را به صورت ترکیب خطی از $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بنویسید

99,1,19

ریاضی ۲

اکسترمم نسبی:

نقطه بحرانی $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$

$\Delta_1 = f_{xx}$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$

مینیمم نسبی $\Delta_1 > 0 \ , \ \Delta_2 > 0$

ماکزیمم نسبی $\Delta_1 < 0 \ , \ \Delta_2 > 0$

نقطه زینی $\Delta_2 < 0$

مثال:

$f_{(x,y)} = y^2 - x^2$

$f_x \Rightarrow -2x = 0 \longrightarrow x = 0$

$f_y \Rightarrow 2y = 0 \longrightarrow y = 0$

$\Delta_1 = f_{xx} = -2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$ زینی

Subject:
Year Month Date

$f(x,y) = 2xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$: حل

$f_x = y - x - 1 = 0$ $\quad \times 2 \rightarrow 2y - 2x - 2 = 0$

$f_y = x - y - 1 = 0$ $\quad x - y - 1 = 0$

$\rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$

$y = -2$

$\Delta_1 = f_{xx} = -2 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$ نقطه ماکزیمم نسبی $(-1,-2)$

$f_{(x,y)} = 2y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$: حل

$f_x = -6x + 6y = 0 \rightarrow -6x = -6y \rightarrow x = y$ *

$f_y = 6y - 6y^2 + 6x = 0 \xrightarrow{*} -6y^2 + 12y = 0 \rightarrow \Delta = 144 < 0$ $\begin{matrix} y=0 \\ y=2 \end{matrix}$

$\Delta_1 = f_{xx} = -6 < 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -12y+6 \end{vmatrix} = 72y - 36 - 36 = 72y - 72$

$(0,0) \rightarrow -72 < 0$ زینی

$(2,2) \rightarrow 72 > 0$ ماکزیمم نسبی

Subject
Year Month Date

تعیین اکسترمم مطلق:

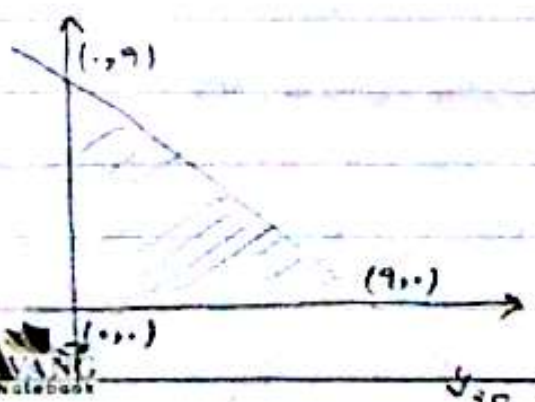
مرحله اول: دسته نقاط روی که ماکزیمم و مینیمم موضعی آن را بسی اید تعیین شده، f معادلی آنها حساب می کنیم.

مرحله دوم: دسته نقاط مرزی که تابع در آن ماکزیمم و مینیمم موضعی دارد را محاسبه کرده و f آنها بیابید.

حال نقاط بدست آمده را با هم مقایسه می کنیم. f ای که بزرگترین است ماکزیمم و کوچکترین f مینیمم خواهد بود.

مثال:

مقدار ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f_{(x,y)} = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ روی ناحیه مثلثی شکل در ربع اول که به خطوط $x=0$ ، $y=9-x$ محصور شده است را بیابید



Subject:
Year Month Date

$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$

$f_x = 2 - 2x = 0 \longrightarrow x = 1$

$f_y = 2 - 2y = 0 \longrightarrow y = 1$ $\Big\}$ $f_{(1,1)} = 4$

۱ ضلعی $(x,0)$ ها $\longrightarrow f_{(x,0)} = 2 + 2x - x^2$

$f_{(0,0)} = 2$ $\quad f_{(9,0)} = -41$

$f'_{(x,0)} = 2 - 2x = 0 \longrightarrow x = 1$ $\quad f_{(1,0)} = 3$

۲ ضلعی $(0,y)$ ها $\longrightarrow f_{(0,y)} = 2 + 2y - y^2$

$f_{(0,9)} = -41$ $\quad f'_{(0,y)} = 2 - 2y = 0 \longrightarrow y = 1$ $\quad f_{(0,1)} = 2$

۳ ضلعی $y = 9 - x$

$f(x, 9-x) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - 1(9-x)^2 =$

$2 + 2x + 18 - 2x - x^2 - 81 - 18x - x^2 = -2x^2 + 18x - 61$

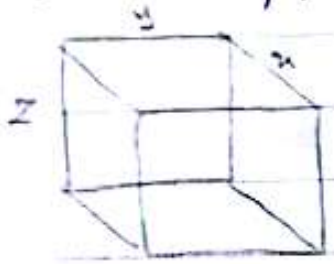
$f'_{(x,9-x)} = -4x + 18 = 0 \longrightarrow x = \frac{18}{4} \rightsquigarrow y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$

$f_{(\frac{9}{2}, \frac{9}{2})} = -2(\frac{81}{4}) + 18(\frac{9}{2}) - 41 = \frac{-41}{2}$

$(1,1)$ ماکزیمم مطلق و $(0,9)$ ، $(9,0)$ مینیمم مطلق

Subject:
Year Month Date

مثال: یک شرکت حمل و نقل فقط جعبه هایی مکعب مستطیلی به مجموع طول و ابعاد آن از ۱۰۸ اینچ تجاوز نکند را می پذیرد. ابعاد بزرگترین حجم جعبه را بیابید.



حجم جعبه = $V = xyz$

$x + 2(y+z) = 108$

$x + 2y + 2z = 108$

$x = 108 - 2y - 2z$

$V = xyz \longrightarrow V = (108 - 2y - 2z)yz = 108yz - 2zy^2 - 2yz^2$

$V_y = 108z - 4zy - 2z^2 = 0 \longrightarrow z(108 - 4y - 2z) = 0$ (۰،۰)

$V_z = 108y - 2y^2 - 4zy = 0 \longrightarrow y(108 - 2y - 4z) = 0$

$z = 0 \longrightarrow y = \frac{108}{2} = 54$ (۵۴،۰)

$y = 0 \longrightarrow z = \frac{108}{2} = 54$ (۰،۵۴)

$\begin{cases} 108 = 4y + 2z \\ 108 = 2y + 4z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 108 = 4y + 2z \\ -216 = -4y - 8z \end{cases}$

$\rightarrow -108 = -6z \rightarrow z = 18$

$y = 18$

(۱۸،۱۸)

Subject
Year Month Date

RIAZI 2

$f_{yy} = -\varepsilon z \longrightarrow \Delta_1 < 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\varepsilon z & 1.\lambda - \varepsilon y - \varepsilon z \\ 1.\lambda - \varepsilon y - \varepsilon z & -\varepsilon y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\forall\forall & -\forall\varepsilon \\ -\forall\varepsilon & -\forall\forall \end{vmatrix} = \square > 0$$

مانده‌ی (۱۸،۱۸)

تعیین اکستریم مشروط به روش لاگرانژ:

اکستریم تابع f را روی g

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$F = f - \lambda g \qquad F_x = 0 \qquad F_y = 0 \qquad F_\lambda = 0$

مثال:

بیشترین و کمترین مقدار تابع $f_{(x,y)} = xy$ را روی بیضی $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\forall} = 1$ بیابید.

$$F = xy - \lambda\left(\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\forall} - 1\right)$$

$$F_x = y - \frac{\forall\lambda x}{\lambda} = 0 \longrightarrow y = \frac{\lambda x}{\varepsilon} \gg y \cdot \frac{\lambda(\lambda y)}{\varepsilon} \longrightarrow \lambda^2 = \varepsilon \rightarrow \lambda = \pm\forall$$

$F_y = x - \lambda y = 0 \longrightarrow x = \lambda y$

$\lambda = \forall \rightarrow x = \forall y$

Subject
Year Month Date

$F_\lambda = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$

$\hookrightarrow \frac{(2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \longrightarrow \frac{4y^2 + 4y^2}{8} = 1 \longrightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$

$(2, \pm 1)$

$*, * \longrightarrow$

$(-2, \pm 1)$

حل:

$f_{(x,y)} = 3x + 4y$ را روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ بیابید.

$F = 3x + 4y - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$F_x = 3 - 2\lambda x = 0 \longrightarrow x = \frac{3}{2\lambda}$

$F_y = 4 - 2\lambda y = 0 \longrightarrow y = \frac{4}{2\lambda}$

$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{4}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{25}{4\lambda^2} = 1 \rightarrow \lambda = \pm \frac{5}{2}$

$\lambda = \frac{5}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{cases}$

$\lambda = -\frac{5}{2} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$

AVASC Notebook

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7}\sqrt{(\frac{9}{7}-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{7}-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{\frac{9}{7}}} + C$$

96,1,26

ریاضی ۲

انتگرال

انتگرال دوگانه: هرگاه $f_{(x,y)}$ یک تابع مثبت از ناحیه‌ی مستطیل شکل R واقع در صفحه xy باشد، می‌توانیم انتگرال دوگانه را به عنوان حجم سه بعدی ناحیه محصور شده بین ناحیه R در صفحه xy از پایین رویه $z = f_{(x,y)}$ از بالا در نظر بگیریم.

حجم: $\iint_R f_{(x,y)}\, dA$

مثال. حجم زیر (پایین) $z = 4 - x - y^2$ و بالای ناحیه مستطیل شکل $0 \le y \le 1$ و $0 \le x \le 2$

در صفحه xy $\int_0^1 \int_0^2 4 - x - y \, dx\, dy = \int_0^1 4x - \frac{x^2}{2} - xy \Big|_0^2 dy$

$= \int_0^1 8 - 2 - 2y - 0 \, dy = 6y - y^2 \Big|_0^1 = 6 - 1 - 0 = 5$

Subject:
Year Month Date

مثال: حاصل $\iint_R f_{(x,y)}\,dA$ به ازای $f_{(x,y)} = 100 - 6x^2y$ در ناحیه

$R: 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} 100 - 6x^2y\,dx\,dy =$$

$$100x - \frac{6x^3}{3}y\Big|_0^2 = \int_{-1}^{1} 200 - 12y\,dy = 200y - 8y^2\Big|_{-1}^{1} = 400$$

حجم ناحیه محصور شده از بالا به سهمی گون بیضوی $z = 10 + x^2 + 3y^2$ و از پایین به ناحیه

$R: 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

$$\int_0^2\int_0^1 10 + x^2 + 3y^2\,dx\,dy = \int_0^2 10x + \frac{x^3}{3} + 3y^2x\Big|_0^1 = \int_0^2 10 + \frac{1}{3} + 3y^2\,dy$$

$$= 10y + \frac{1}{3}y + y^3\Big|_0^2 = 20 + \frac{2}{3} + 8 = 28 - \frac{2}{3} = \frac{84-2}{3} = \frac{82}{3}$$

حجم منشوری را که قاعده آن مثلثی در صفحه xy محصور شده توسط محور x خطوط

$y = x$ و $x = 1$ بوده و از بالا به صفحه $z = 3 - x - y$ می باشد را بیابید.



$$\text{روش اول}: \int_0^1\int_{y=0}^{y=x} 3 - x - y\,dy\,dx$$

$$\text{روش دوم}: \int_0^1\int_{x=y}^{x=1} 3 - x - y\,dx\,dy$$

AVANG Notebook

Subject
Year Month Date

$* \longrightarrow \int_0^1 x^2y - xy - \frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx = \int_0^1 x^3 - x^2 - \frac{x^2}{2} dx = \int_0^1 x^3 - \frac{3x^2}{2} dx = 1$

$\star \longrightarrow \int_0^1 x^3 - \frac{x^2}{2} - xy\Big|_y^1 dy = \int_0^1 (x - \frac{1}{2} - y) - (xy - \frac{y^2}{2} - y^2) dy =$

$\int_0^1 \frac{3}{2} - y - x^2 + \frac{3y^2}{2} dy = \frac{3}{2}y - xy^2 + \frac{y^3}{2}\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2} = 1$

$\int_0^1 \int_{x=y}^{x=1} \frac{\sin x}{x} dy\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{y=0}^{y=x} \frac{\sin x}{x} dy\, dx =$

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} xy\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \times x\, dx = -\cos x\Big|_0^1 = -\cos 1 + 1$

$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2) dy\, dx = \int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\sqrt{y}} 4x + 2\, dx\, dy$



حجم جسم زیر خط $z = 12 - x^2 - y^2$ در بالای ناحیه R، محصور شده توسط منحنی $y = 2\sqrt{x}$



و خط $y = 4x - 2$ و محور x قرار دارد را بیابید.

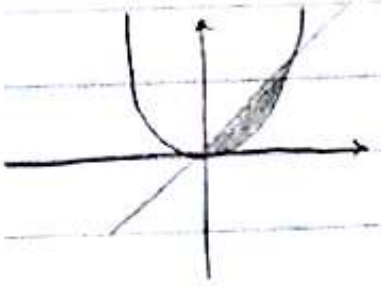
$\int_0^2 \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y+2}{4}} 12 - x^2 - y^2\, dx\, dy = \frac{2.8.3}{12.8.0}$

AVASG NoteBook

Subject
Year Month Date

نکته: مساحت یک ناحیه بسته و کراندار R در صفحه برابر است با: $A=\iint_R dA$

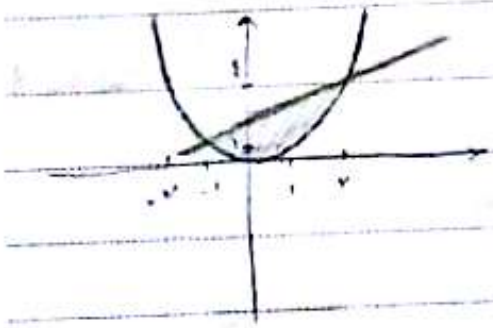
مثال: مساحت محصور بین خط $y=x$ و سهمی $y=x^2$ را در ربع اول بیابید.



$$A=\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx=\int_0^1 y\Big|_{x^2}^{x}\,dx=\int_0^1 x-x^2\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{6}$$

مثال: مساحت ناحیه R محصور شده توسط سهمی $y=x^2$ و $y=x+2$ را بیابید.



$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx$$

$$\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy+\int_1^4\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$$

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx=\int_{-1}^{2} y\Big|_{x^2}^{x+2}\,dx=\int_{-1}^{2}(x+2)-(x^2)\,dx=$$

$$\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=\left(\frac{4}{2}+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{10}{3}+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$$

نکته: مقدار متوسط f روی ناحیه R

$$\bar{f}=\frac{1}{\text{مساحت } R}\iint_R f\,dA$$

مثال: مقدار متوسط تابع $f(x,y)=x\cos(xy)$ روی مستطیل $0\le y\le 1$ ، $0\le x\le \pi$ را بیابید.

Subject:
Year: Month: Date:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{1} x\cos(xy)\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \sin(xy)\Big|_0^1 dx \cdot \int_0^{\pi} \sin x\,dx =$$

$$-\cos x\Big|_0^{\pi} = 1+1 = 2$$

$$\bar{f} = \frac{1}{R}\iint_R f\,dA = \frac{1}{\pi} \times 2 = \frac{2}{\pi}$$

۲,۹

ریاضی ۲

انتگرال در مختصات قطبی:

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1=g_1(\theta)}^{r_2=g_2(\theta)} r\,f(r,\theta)\,drd\theta$$

مثال: حدود انتگرال‌گیری $f(r,\theta)$ روی ناحیه R بطوریکه در داخل دل نمای $r=1+\cos\theta$ و خارج دایره $r=1$ قرار دارد را بیابید.

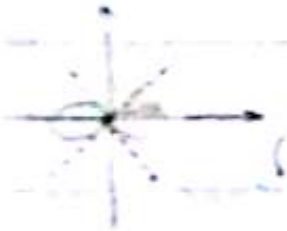
AVANG Notebook



$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{1+\cos\theta} r f(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

شکل زیر

مساحت محدود شده توسط شکل چپ دانه را بیابید. dA



$r^2 = 2\cos 2\theta$

$r = \pm\sqrt{2\cos 2\theta}$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\int_{0}^{\sqrt{2\cos 2\theta}} r\,dr\,d\theta =$$

$$\frac{r^2}{2}\Big|_{0}^{\sqrt{2\cos 2\theta}} = \frac{(\sqrt{2\cos 2\theta})^2}{2} = \frac{2\cos 2\theta}{2}$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos 2\theta}{2}\,d\theta = 2\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}\right) = 2(1) = 2$$

مثال: حاصل انتگرال $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dy\,dx$ که در آن ناحیه R نیم دایره به محدوده‌ها

و معنی $y=\sqrt{1-x^2}$ است، را بیابید.

$$\int_{R}\int e^{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{1} e^{r^2}\,r\,dr\,d\theta$$



$$\int r e^{r^2}\,dr = \left(e^u\cdot\frac{du}{2r}\right) = \frac{1}{2}e^u = \frac{1}{2}e^{r^2}$$

$u = r^2$

$du = 2r\,dr \Rightarrow dr = \frac{du}{2r}$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}e^{r^2}\Big|_{0}^{1}\,d\theta$$

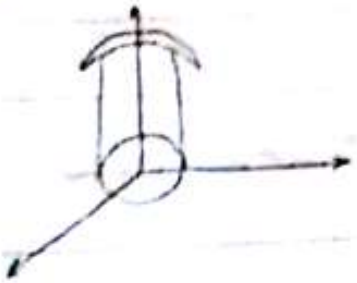
$$= \int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(e-1)\,d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)$$

$$\int_{0}^{1}\int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2\,dy\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{1} r\cdot r^2\,dr\,d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{8} :$$ حل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\,d\theta = \frac{\pi}{8}$$

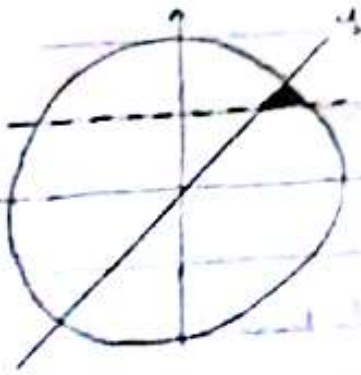


مثال. حجم ناحیه محصور شده از بالا توسط سهمی‌گون $z=9-x^2-y^2$ و از پایین توسط ناحیه واقع در صفحه xy را بیابید.



$$\iint (9-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} r(9-r^2)\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \left|\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right|_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{81}{4}\,d\theta = \frac{81}{4}\pi$$

مثال: مساحت ناحیه R درون حلقه محصور شده توسط دایره $x^2+y^2=4$ بالای خط $y=1$ و پایین خط $y=\sqrt{3}x$ را بدست آورید.



$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow x^2+1=4 \Rightarrow x=\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\sqrt{3}x \Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_{\csc\theta}^{2} r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left|\frac{r^2}{2}\right|_{\csc\theta}^{2} d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3} 2-\frac{\csc^2\theta}{2}\,d\theta = 2\theta-\frac{\cot\theta}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$$

$$= \left(2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(2\cdot\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

انتگرال‌گیری به روش تغییر متغیر (ژاکوبی):

ژاکوبی تبدیل مختصات $x=g(u,v)$ $y=h(u,v)$ به صورت $J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint J\,f(u,v)\,du\,dv$$

Subject
Year Month Date

مثال: ژاکوبی تبدیل مختصات قطبی $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ است را بدست آورید

$$J=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta-(-r\sin^2\theta)=r$$

مثال: حاصل انتگرال $\int_0^2\int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1}\frac{2x-y}{2}\,dx\,dy$ را بدست آورید.



$$\begin{cases}u=\frac{2x-y}{2}\longrightarrow u=\frac{2x-2v}{2}\longrightarrow x=u+v\ \star\\ v=\frac{y}{2}\longrightarrow y=2v\ \star\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2$$

$$\star\rightarrow\begin{cases}x=\frac{y}{2}\longrightarrow v=u+v\Rightarrow u=0\\ x=\frac{y}{2}+1\longrightarrow v+1=u+v\Rightarrow u=1\end{cases}$$

$$\star\rightarrow\begin{cases}y=0\longrightarrow 0=2v\longrightarrow v=0\\ y=4\longrightarrow 4=2v\longrightarrow v=2\end{cases}$$

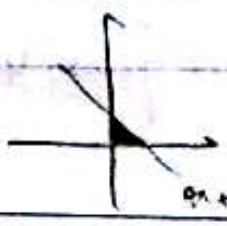
$$\int_0^2\int_0^1 2u\,du\,dv=\int_0^2 1\,dv=2$$

مثال: حاصل $\int_0^1\int_0^{1-x}\sqrt{x-y}\,(y-2x)^2\,dy\,dx$

$$\begin{cases}u=x+y\longrightarrow x=u-y\longrightarrow x=u-\frac{v+2u}{3}=\frac{3u-v-2u}{3}=\frac{u-v}{3}\\ v=y-2x\longrightarrow v=y-2u+2y\longrightarrow v=-2u+3y\longrightarrow y=\frac{v+2u}{3}\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$\iint\frac{1}{3}\sqrt{u}\,(v)^2\,du\,dv$$



AVANG Notebook

Subject:
Year Month Date

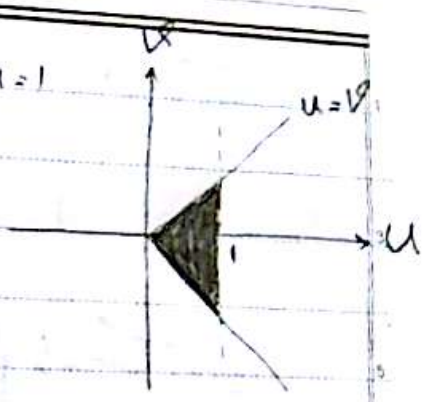
$x+y=1 \Rightarrow \frac{u-v+v+2u}{2}=1 \longrightarrow \frac{3u}{2}=1 \longrightarrow u=1$

$y=0 \Rightarrow 0=\frac{v+2u}{2} \Rightarrow v=-2u$

$x=0 \Rightarrow 0=\frac{u-v}{2} \Rightarrow v=u$

$x=\frac{u-v}{2}$

$y=\frac{v+2u}{2}$



$$\int_0^1 \int_{-2u}^{u} \frac{1}{2}\sqrt{u}\,(v)^2\,dv\,du$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\sqrt{u}\left(\frac{v^3}{2}\right)\Big|_{-2u}^{u} \longrightarrow \frac{1}{4}\int_0^1 \sqrt{u}\,(u^3+8u^3) \quad (9u^3)$$

$$\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\cdot u^3 \longrightarrow \int_0^1 u^{\frac{7}{2}} \longrightarrow \frac{u^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 \longrightarrow 2/9$$

جلسه نهم

پنج شنبه ۲۵ اردیبهشت

به نام خدا

انتگرال سه گانه

$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=h_1(x)}^{y=h_2(x)}\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

مثال / مطلوبست حجم ناحیه‌ی D که توسط رویه‌های $z = x^2 + 3y^2$ و $z = 8 - x^2 - y^2$ محدود شده است.

$$x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2 \Rightarrow 2x^2 + 4y^2 = 8$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{4 - x^2}{2}}$$

برای $y=0$ داریم $x = \pm 2$

وفات حضرت زینب (س) (۶۲ ه ق)- تغییر قبله مسلمین از بیت المقدس به مکه معظمه (۲ ه ق)- روز بزرگداشت فردوسی

جمعه ۲۶ اردیبهشت

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,dz\,dy\,dx$$

برای محاسبه حجم به جای f یک می‌گذاریم حالا توان سوال محدوده z مطلوب بس

برای محدوده y باید دو عبارت رو برابر هم قرار دهیم.

$$= \iint z\Big|_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}\,dy\,dx = \iint \underbrace{8 - x^2 - y^2 - x^2 - 3y^2}_{8 - 2x^2 - 4y^2}\,dy\,dx$$

$$= \int y(8 - 2x^2) - \frac{4y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}$$

$$= 2\left(2 \times 2\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\left(\frac{4-x^2}{2}\right) - \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\right)^3\right)$$

$$= 2\left(4\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \int 2\left(\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{16}{3} \times \frac{1}{2\sqrt{2}} \int (4-x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

چون مدل $a^2 - x^2$ یعنی عدد منهای x^2 باید از تغییر متغیر استفاده کنیم.

$x = 2\sin u$

$dx = 2\cos u.du$

$$= \int (4 - 4\sin^2 u)^{\frac{3}{2}} 2\cos u.du$$

$$= 16\int (1 - \sin^2 u)^{\frac{3}{2}} \cos u.du$$

$$= 16\int \underbrace{(1-\sin^2 u)}_{\cos^2 u}{}^{\frac{3}{2}} \cos u.du$$

$$= 16\int \cos^4 u.du \longrightarrow 16\int \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2.du$$

$$= 4\int 1 + 2\cos 2u + \cos^2 2u.du$$

$$\frac{1+\cos 4u}{2}$$

$$= \varepsilon\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\sin 4u\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\pi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 3\left(\pi/2 - 3(-\pi/2)\right) = 3\pi$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} \times 3\pi = \underline{8\sqrt{2}\pi}$$

مثال/ حجم جسمی را که محدود شده است به استوانه‌ی $y = x^2$ و صفحات



$y + z = 4$ و $z = 0$ بدست آورید.

هر موقع هر کدومو صفر گفته بود تو سوال اونو میگیریم انتگرال تویی

$$\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} 1\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int\int z\Big|_{0}^{4-y} = 4 - y - 0 = \iint 4 - y\, dy\, dx$$

$$= \int_{-2}^{2} 4y - \frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{4} = \int_{-2}^{2} (16 - 8) - \left(4x^2 - \frac{x^4}{2}\right) dx$$

$$= 8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\Big|_{-2}^{2} = \frac{256}{15}$$

بزرگداشت حکیم عمر خیام
سست اراده کسی است که با هر شکستی بینش او نیز تغییر می یابد.

$\iiint r \cdot f(r,\theta,z)\, dz\, dr\, d\theta$ ↓

نکته: جرم $M = \iiint f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$

گشتاور مرتبه اول حول صفحه xy

$$M_{xy} = \iiint z\, dz\, dy\, dx$$

مرکز جرم / مرکز ثقل $\bar{z}$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه به کمک مختصات استوانه‌ای

مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) حاکی از یک نقطه در فضا است

به طوری که:

$x = r\cos\theta$ $\qquad x^2 + y^2 = r^2$

$y = r\sin\theta$ $\qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$

↑

مثال/ مطلوبست حدود انتگرال‌گیری در مختصات استوانه‌ای برای انتگرال‌گیری از $f(r,\theta,z)$ روی ناحیه D که از پائین به صفحه‌ی $z = 0$، از اطراف به استوانه قائم $x^2 + (y-1)^2 = 1$ و از بالا به سهمی گون $z = x^2 + y^2$ محدود است.



$$x^2+y^2-2y+1=1$$

$$r^2=2r\sin\theta \longrightarrow r=2\sin\theta$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_0^{r^2} r\cdot f(r,\theta,z)\,dz\,dr\,d\theta$$

مثال/ مطلوبست مرکز وار جسمی که از اطراف توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ و از بالا به سهمی گون $z=x^2+y^2$ و از پائین به صفحه‌ی xy محدود است.

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} z\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int\int r\cdot\frac{z^2}{2}\Big|_0^{r^2}dr\,d\theta=\int\int\frac{r^5}{2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int\frac{r^6}{12}\Big|_0^{2}d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\,d\theta=\frac{32\pi}{3}$$

$$M_{xy}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int\int rz\Big|_0^{r^2}dr\,d\theta=\int\int r^3\,dr\,d\theta$$

$$=\int\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2}d\theta=\int_0^{2\pi}4\,d\theta=4\theta\Big|_0^{2\pi}=8\pi$$

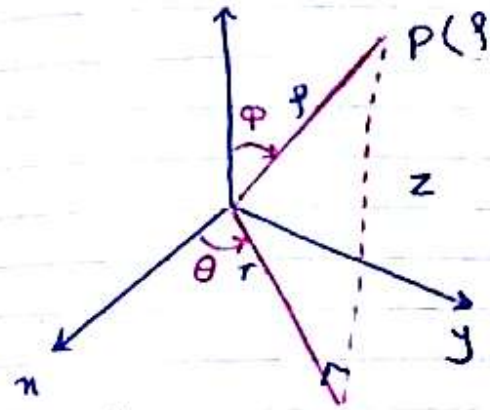
$$\bar{z}=\frac{\frac{32\pi}{3}}{8\pi}=\frac{4}{3}$$

مثال / حجم جسمی را که محدود شده به $z = 3x^2$ ، $z = 4 - x^2$ ، $z + y = 6$ ، $y = 0$

$$\int_{-1}^{1} \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_{0}^{6-z} 1 \; dy \; dz \; dx$$

به نام خدا

مختصات کروی در انتگرال سه‌گانه :



نقطه P در فضا توسط سه‌تایی مرتب (ρ, φ, θ) در مختصات کروی به صورت زیر جانشین است .

ρ : فاصله‌ی P از مبدأ مختصات است .

φ : زاویه‌ایست که بردار OP با جهت مثبت محور z ها میسازد .

θ : زاویه مختصات استوانه ای است .

پنج شنبه
خرداد ۱

$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$x = r\cos\theta = \rho \sin\varphi \cos\theta$

$r = \rho \sin\varphi$

$y = r\sin\theta = \rho \sin\varphi \sin\theta$

$z = \rho\cos\varphi$

$$\iiint f(\rho,\varphi,\theta)\, \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

مثال / معادله‌ی کره‌ای به صورت $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ است را در مختصات کروی بنویسید.

روز بهره وری و بهینه سازی مصرف- روز بزرگداشت ملاصدرا (صدر المتالهین)

جمعه ۲

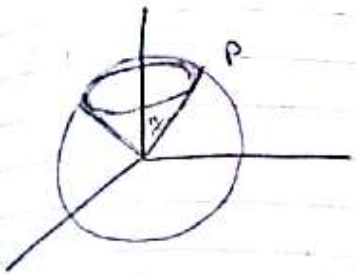
$\rho^2 \sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin\theta + (\rho\cos\varphi - 1)^2 = 1$

$\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi - 2\rho\cos\varphi + 1 = 1$

$\rho^2 - 2\rho\cos\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 2\cos\varphi$

نگران کننده ترین چیز در دنیا آن است که مغز آدمی پر از اندیشه و احساس باشد، اما نتواند آنها را با هم تنظیم کند

مثال/ حجم ناحیه‌ی بالای سهمی D که توسط $\varphi = \pi/3$ محدود است از کره‌ی $\rho \leq 1$ بریده شده است را بیابید.



$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int\int \frac{\rho^3}{3}\sin\varphi \Big|_0^1 d\varphi \, d\theta$$

$$= \int -\frac{1}{3}\cos\varphi \Big|_0^{\pi/3} d\theta = \int -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\, d\theta = \frac{1}{6} \times 2\pi = \pi/3$$

مثال/ حل کنید.

$$\int_{x_1=-2}^{2}\int_{y_1=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{z_1=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$

$$\rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/4$$

$$z = \sqrt{8-x^2-y^2} \qquad \rho^2\cos^2\varphi = 8 - \rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta$$

$$\rho^2\cos^2\varphi = 8 - \rho^2\sin^2\varphi$$

$$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 8 \longrightarrow \rho^2 = 8 \to \rho = 2\sqrt{2}$$

یکشنبه ۴ خرداد

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sqrt{2}} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int\int \frac{\rho^5}{5}\sin\varphi \Big|_0^{2\sqrt{2}} d\varphi \, d\theta = \int\int \frac{128\sqrt{2}}{5}\sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int -\frac{128\sqrt{2}}{5}\cos\varphi \Big|_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \int -\frac{128}{5} + \frac{128\sqrt{2}}{5} \, d\theta = 2\pi\left(\frac{128\sqrt{2}-128}{5}\right)$$

مثال / انتگرال $\iiint_R \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\,dy\,dx$ ناحیه محصور بین صفحه $z=3$ و مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ را بیابید.

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi\cos\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin\theta$$

$$\rho^2\cos^2\varphi = \rho^2\sin^2\varphi \Rightarrow \varphi = \pi/4$$

$$z=3 \Rightarrow \rho\cos\varphi = 3 \rightarrow \rho = \frac{3}{\cos\varphi}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\frac{3}{\cos\varphi}} \rho^3 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int\int \frac{\rho^4}{4}\sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \Big|_0^{\frac{3}{\cos\varphi}}$$

$$= \int\int \frac{81}{4}\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} \, d\varphi \, d\theta = \int \frac{81}{4} \times \frac{1}{3\cos^3\varphi} \, d\theta \Big|_0^{\pi/4}$$

*

$$= \int \frac{\Lambda I}{۴} \times \frac{۲}{۳\sqrt{۲}} - \frac{\Lambda I}{۴} \times \frac{۱}{۳}\, d\theta = \int \frac{۲۷}{\sqrt{۲}} - \frac{۲۷}{۴}\, d\theta$$

$$= \frac{۲۷\theta}{\sqrt{۲}} - \frac{۲۷}{۴}\,\theta \Big|_{۰}^{۲\pi} = \frac{۲۷(۲\pi)}{\sqrt{۲}} - \frac{۲۷\pi}{۲۰}$$

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos^{۴}\varphi}\, d\varphi = \int \frac{\sin\varphi}{u^{۴}} \frac{du}{-\sin\varphi}$$

$u = \cos\varphi$

$du = -\sin\varphi\, d\varphi$

$$= \int -u^{-۴} = \frac{u^{-۳}}{۳}$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$x = ۶ \sin\varphi \cos\theta$

$y = ۶ \sin\varphi \sin\theta$

$z = ۶ \cos\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & ۶\cos\varphi\cos\theta & -۶\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & ۶\cos\varphi\sin\theta & ۶\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -۶\sin\varphi & ۰ \end{vmatrix}$$

$$= \sin\varphi\cos\theta\,(۶^{۲}\sin^{۲}\varphi\cos\theta) + ۶\cos\varphi\cos\theta$$

$$(۶\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta) + (-۶\sin\varphi\sin\theta)(-۶\sin^{۲}\varphi\sin\theta$$

$$-۶\cos^{۲}\varphi\sin\theta)$$

$$\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\theta \cos^2\varphi$$

$$+ \rho^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta \sin\varphi \cos^2\varphi$$

$$\rho^2 \sin\varphi + \rho^2 \sin\varphi \cos^2\varphi$$

$$= \rho^2 \sin\varphi$$

مثال / انتگرال زیر را محاسبه کنید .

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=\frac{y}{2}}^{x=\frac{y}{2}+1} \left(\underbrace{\frac{2x-y}{2}}_{u} + \underbrace{\frac{z}{3}}_{v}\right) dx\, dy\, dz$$

$$\begin{cases} u = \frac{2x-y}{2} \longrightarrow 2u = 2x - y \longrightarrow x = u + w \\ v = \frac{z}{3} \longrightarrow z = 3v \\ w = \frac{y}{2} \longrightarrow y = 2w \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{cases} x = \frac{y}{2} \xrightarrow{x=u+w} u + w = w \Rightarrow u = 0 \\ x = \frac{y}{2} + 1 \longrightarrow u + w = w + 1 \Rightarrow u = 1 \\ y = 0 \xrightarrow{y=2w} w = 0 \\ y = 4 \longrightarrow 4 = 2w \longrightarrow w = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=0 \xrightarrow{z=3v} v=0 \\ z=3 \longrightarrow v=1 \end{cases}$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \int_0^1 2(u+v)\, du\, dv\, dw$$

$$= \int\int 3u^2 + 6uv \Big|_0^1 = \int\int 3 + 6v \, dv\, dw$$

$$= \int 3v + 3v^2 \Big|_0^1 \, dw = 12$$

۲۸ رجب ۱۴۳۵ 28 May 2014

پنج‌شنبه
خرداد ۸

بنام خدا

دیورژانس: چگالی شار یا واگرایی میدان برداری $F = Mi + Nj$ در نقطه (x,y) برابر است با:

$$div\, F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$$

مثال / دیورژانس $F(x,y) = (x^2 - y)i + (xy - y^2)j$ را بدست آورید.

$$div\, F = \frac{\partial (x^2 - y)}{\partial x} + \frac{\partial (xy - y^2)}{\partial y}$$

$$= 2x + x - 2y = 3x - 2y$$

مؤلفه‌ی k تاو (کرل)

جمعه ۹ خرداد

مؤلفه‌ی k تاو میدان برداری $F = Mi + Nj$ در نقطه (x,y) برابر است با

$$Curl\, F = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

مثال / کرل میدان مثال قبل را بدست آورید.

$$Curl\, F = \frac{\partial (xy - y^2)}{\partial x} - \frac{\partial (x^2 - y)}{\partial y}$$

$$= y - (-1) = y + 1$$

30 May 2014 | ۱ شعبان ۱۴۳۵

قضیه گرین ۱ :

شار برون سوی میدان $F = Mi + Nj$ گذرنده از منحنی بسته ساده C برابر انتگرال دوگانه دیورژانس F روی ناحیه R محدود شده توسط C است.

نشان دهنده منحنی بسته

$$\oint F.n\,ds = \oint_C M\,dy - N\,dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\,dy$$

قضیه گرین ۲ :

گردش میدان $F = Mi + Nj$ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول منحنی بسته ساده C در صفحه برابر با انتگرال دوگانه $\text{Curl } F$ روی ناحیه R محدود شده توسط C است.

$$\oint F.T\,ds = \oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\,dy$$

مثال / تحقیق گرین را برای میدان زیر در ناحیه‌ی R محدود به دایره‌ی واحد

$$C: r(t) = \underbrace{(\cos t)}_{x} i + \underbrace{(\sin t)}_{y} j \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

تحقیق کنید

$$F(x,y) = \underbrace{(x-y)}_{M} i + \underbrace{x}_{N} j$$

$$\begin{cases} M = \cos t - \sin t \\ N = \cos t \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = d(\cos t) = -\sin t\, dt \\ dy = d(\sin t) = \cos t\, dt \end{cases}$$

$$\oint_C F \cdot n\, ds = \oint_C M\, dy - N\, dx = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy$$

مساحت دایره‌ی واحد

$$\iint_R (1-0)\, dx\, dy = \pi$$

$$\int (\cos t - \sin t) \cos t\, dt + (\cos t) \sin t\, dt$$

$$= \int (\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\pi}{2}\, dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{2\pi} = \pi$$

محاسبه‌ی انتگرال روی خم با استفاده از قضیه گرین

سنفی خود مزبوله

مثال/ انتگرال $\oint_C \frac{xy}{M} dy - \frac{y^2}{N} dx$ را که در آن C یک مربع مسیر بسته است

واقع در ربع اول و محدود به خطوط $x=1$ و $y=1$ است را محاسبه کنید.

$$= \int_0^1 \int_0^1 y + 2y \, dx\, dy = \int 3yx \Big|_0^1 dy$$

$$= \int 3y \, dy = \frac{3y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

مثال/ شار رونی سوی میدان $F(x,y) = \frac{x}{M} i + \frac{y^2}{N} j$ گذرنده از مربع محدود به $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ را محاسبه کنید.

$$= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 + 2y \, dx\, dy = \int x + 2yx \Big|_{-1}^1 = 1 + 2y - (-1 - 2y)$$

$$= \int_{-1}^1 2 + 4y \, dy = 2y + \frac{4y^2}{2} \Big|_{-1}^1 = (2^4 + 2) - (-2^2 + 2) = 4$$

ولادت حضرت ابوالفضل العباس (ع) (۲۶ ه‍ـ ق) و روز جانباز

هرگاه گرفتن تصمیم مهمی را دشوار یافتید بدانید که علتش تنها یک چیز است و آن این که تصور روشنی از ارزشهای خود ندارید

مساحت رویه

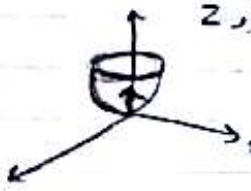
مساحت رویه $f(x,y,z)=C$ روی ناحیه بسته و کراندار R در صفحه برابر است با: $\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|} dA$ که در آن p بردار یکه قائم بر R و $\nabla f \cdot p \neq 0$ است.

مثال / مساحت رویه بریده شده از بیضی‌گون $f = x^2+y^2+2z^2=8$ توسط صفحه $z=2$ را بیابید.

$\nabla f = 2x + 2y - k$

$|\nabla f| = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$

بردار یکه k: $p=(0,0,1)$



$\nabla f \cdot p = 0+0-1 = -1$ $\quad |\nabla f \cdot p| = 1$

$$\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|} dA = \iint \frac{\sqrt{8x^2+8y^2+1}}{1} dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r\sqrt{8r^2+1}\, dr\, d\theta$$

u تغییر متغیر

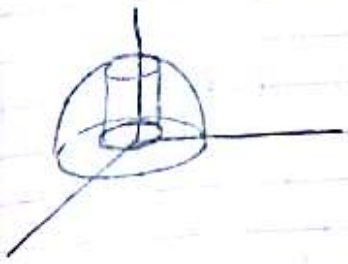
$u^2 = 8r^2+1 \Rightarrow 2u\,du = 8r\,dr$

$dr = \frac{u}{4r}\,du$

$$\int r\sqrt{4r^2+1}\, dr = \int r \cdot u \cdot \frac{u}{4r} du = \frac{1}{4}\frac{u^3}{3} = \frac{u^3}{12} = \frac{(\sqrt{4r^2+1})^3}{12}$$

$$= \int \frac{(\varepsilon r^2+1)^{\frac{3}{2}}}{12}\Big|_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{17^{\frac{3}{2}}}{12} - \frac{1}{12}\, d\theta = \frac{(17^{\frac{3}{2}}-1)}{2}\, 2\pi$$

مثال/ مساحت سطح جسمی را که از نیم کره‌ی $x^2+y^2+z^2=2$ توسط استوانه‌ی $x^2+y^2=1$ بریده شده است را حساب کنید.



$$p=(0,0,1)$$

$$\nabla f = 2xi + 2yj + 2zk \longrightarrow |\nabla f| = \sqrt{\varepsilon x^2+\varepsilon y^2+\varepsilon z^2}$$

$$\nabla f \cdot p = 0+0+2z \longrightarrow |\nabla f \cdot p| = 2z$$

$$\iint \frac{\sqrt{\varepsilon x^2+\varepsilon y^2+\varepsilon z^2}}{2z} = \iint \frac{2\sqrt{2}}{2z} = \sqrt{2}\iint \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$= \sqrt{2}\iint \frac{r}{\sqrt{2-r^2}} = \sqrt{2}\int -\sqrt{2-r^2}\Big|_0^1 d\theta = \sqrt{2}\left(-1+\sqrt{2}\right)2\pi$$

$$= \varepsilon\pi - 2\sqrt{2}\pi$$

$$\begin{cases} 2-r^2 = u^2 \\ -2r\,dr = 2u \end{cases} \longrightarrow dr = \frac{2u}{-2r}\,du \longrightarrow dr = \frac{-u}{r}\,du$$

$$\int \frac{r}{\sqrt{2-r^2}}\,dr = \int \frac{r}{u} \times \frac{-u}{r}\,du = -u$$

پنج شنبه
۱۵ خرداد

قضیه استوکس

$$\text{Curl } F = \nabla \times F$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

مثال / Curl میدان برداری $F = (x^2-y)i + 4zj + x^2k$ را بیابید.

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-y & 4z & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= i(0-4) - j(2x-0) + k(0+1)$$

$$= -4i - 2xj + k$$

مثال /

$$F = 3r\cos\theta\, i + 3\sin\theta\, j$$

$$\text{Curl } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3r\cos\theta & 3\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + k(0 + 3r\sin\theta) = (3r\sin\theta)k$$

جمعه
۱۶

به نام خدا

گردش میدان برداری $F = Mi + Nj + Pk$ حول مرز C در رویه جهت دار S در جهت خلاف عقربه های ساعت نسبت به بردار عمود n بر رویه برابر با $\nabla \times F \cdot n$ روی S است و داریم

$$\oint F \cdot dr = \int \nabla \times F \cdot n \, d\sigma$$

$\frac{r_r \times r_\theta}{|r_r \times r_\theta|}$ ↙ ↘ $|r_r \times r_\theta| \, dr d\theta$

تعریف کار

کار انجام شده توسط میدان نیروی $F = Mi + Nj + Pk$ روی منحنی هموار از $t=a$ تا $t=b$

$$W = \int_a^b F \cdot T ds = \int F \cdot \left(\frac{dr}{dt}\right) dt$$

مثال/ کار انجام شده توسط $F = (y-x^2)i + (z-y^2)j + (x-z^2)k$ را روی خم $r(t) = ti + t^2j + t^3k$ در $0 \le t \le 1$ بدست آورید.

$$F = (t^2 - t^3)i + (t^3 - t^4)j + (t - t^6)k$$

$$\frac{dr}{dt} = i + 2tj + 3t^2k$$

$$w = \int_0^1 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8 \, dt$$

$$= \frac{2t^5}{5} - \frac{2t^6}{6} + \frac{3t^4}{4} - \frac{3t^9}{9} \Big|_0^1 = \frac{29}{60}$$

مثال/ اگر $F = xi + zj + yk$ یک میدان سرعت باشد جریان را در امتداد مارپیچ دوار $r(t) = (\cos t)i + (\sin t)j + tk$، $0 < t < \pi/2$

$$r'(t) = (-\sin t)i + (\cos t)j + k$$

$$F = (\cos t)i + tj + \sin t\, k$$

$$w = \int r'(t) \cdot F = \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2}\sin t \cos t + \cos t \cdot t + \sin t \, dt$$

$$= \frac{\cos^2 t}{2} + t\sin t \Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1/2$$

تابع پتانسیل

فرض کنید میدان F در ناحیه‌ی باز D در فضا تعریف شده و تابع اسکالری مانند f در D موجود باشد به طوری که $F = \nabla f$ آنگاه f تابع پتانسیل F نامیده می‌شود.

$$\int_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A)$$

اگر F برداری که توی سوال اومده با این ویژگی یک تابع برابر باشه تابع پتانسیل است.

مثال / کار انجام شده توسط میدان بایستار $F = yzi + xzj + xyk$ $\overbrace{\qquad}^{d(xyz)}$ را روی منحنی هموار C از نقطه‌ی $(-1,3,9)$ تا نقطه $(1,6,-4)$

$f = xyz$

را بیابید.

$$\int_A^B F \cdot dr = f(B) - f(A) = xyz\Big|_{(1,6,-4)} - xyz\Big|$$

کار انجام شده توسط میدان بایستار روی حلقه‌ی بسته برابر با صفر است

آزمون مولفه‌ها برای میدان پایستار

وقتی $F = Mi + Nj + Pk$ را پایستار نامیم که داشته باشیم:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

مثال/ $F = (e^x \cos y + yz)i + (xz - e^x \sin y)j + (xy + z)k$

نشان دهید F یک میدان پایستار است و سپس تابع پتانسیل آن را بیابید.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x \sin y + z = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz \xrightarrow{\text{انتگرال نسبت به } x} f = \int e^x \cos y + yz\, dx = e^x \cos y + yzx + g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = z$$

$$\rightarrow g = \frac{z^2}{2}$$