وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveotamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Subject:
Year Month Date

توضیح تابعی از یک متغیر تصادفی گسسته:

$Y=m^2$	$P(X=m)$	m
① $(-1)^2$	$\frac{1}{3}$	-1
⓪ $(0)^2$		0
① $(1)^2$	$\frac{1}{3}$	1
	$\frac{1}{3}$	

$P(Y=1)=\frac{2}{3}$ $\quad P(Y=0)=\frac{1}{3}$ $\quad$ $Y=0,1$

اگر X یک متغیر تصادفی باشد آنگاه هر تابعی از آن هم یک متغیر تصادفی می‌باشد و دارای توضیع مشخص.

توضیع Y = { Y چه مقادیری می‌تواند بگیرد: 0, 1
احتمال هرکدام از مقادیر: $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

امید ریاضی X را به دست آورید.

$E(X)=\sum X.P(X=m)$

$E(X)=(-1)(\frac{1}{3})+(0)(\frac{1}{3})+\frac{1}{3}(1) \Rightarrow (0)$ ✓

امید ریاضی تابعی از یک متغیر تصادفی: اگر X یک متغیر تصادفی با تابع احتمال مشخص باشد و $g(X)$ تابعی از X باشد آنگاه امید ریاضی $g(X)$ به صورت مرتبه زیر محاسبه می‌گردد.

$E[g(X)]=\sum_m g(Y).(P(X=m))$

Repeto

Year. Month. Date. ( )

در شکل قبل محاسبه امید X^2 چگونه است؟

$E(X)^2 = \sum X^2 \cdot P(X=x)$

$E X^2 = (-1)^2 P(X=-1) + (0)^2 P(X=0) + (1)^2 P(X=1)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

Second way: $E(X)^2 = E(Y) = \sum y \cdot P(Y=y)$

$(0) P(Y=0) + (1)(P)(Y=1)$

$0(\frac{1}{3}) + (1)(\frac{2}{3}) = \boxed{\frac{2}{3}}$ ✱ Not recommended ✱

✱ $E(aX+b) = a E(X) + b$ hint: a و b عددانه.

$E(2X+3) = 2E(X) + 3 \rightarrow 2(0) + 3 \rightarrow \boxed{3}$ ✓

✱ hint 2:

$E[g(X) + h(X)] = E(g(X)) + E[h(X)]$

$E(X + X^2) = E(X) + E(X^2) = 0 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ ✓

مساله‌های با کرنل متغیرهای تصادفی: همان طور که 2 متغیر تصادفی X و Y داده می‌شود علی رغم این که میانگین این 2 متغیر یک

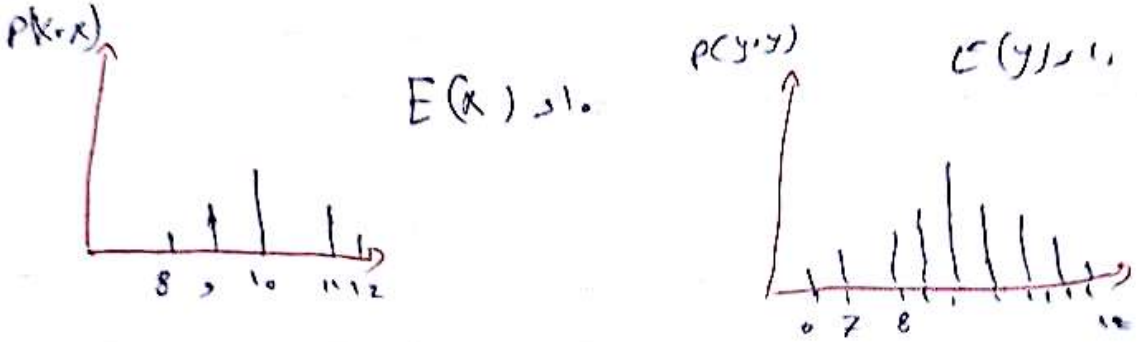
Subject:
Year Month Date

است توضیح های که دقیقا متفاوتی دارند. و پراکندگی V بیشتر از X است.

بنابراین امید ریاضی شاخص کاملی برای شناخت یک متغیر تصادفی نیست.

به دنبال شاخصی هستیم که نشان دهد میزان پراکندگی یک متغیر تصادفی چقدر است.

و برای این منظور از دو شاخص واریانس و انحراف معیار استفاده می شود.



واریانس σ_X^2 یا $Var(X)$

انحراف معیار σ_X

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$Var(X) = \sum_{x} (x-\mu)^2 \cdot P(X=x) \quad (I)$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (II)$$

مثال: اگر X نشان دهنده ی بیت یک تاس سالم باشد واریانس X را حساب کنید.

Subject:
Year Month Date ( )

x	P(x)
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$

$Var(X) = \sum (x-\mu)^2 P(x,m)$

$Var(X) = (1-3,5)^2 (\frac{1}{6}) + (2-3,5)^2 \frac{1}{6} \dots$

final result $\Rightarrow \Rightarrow \boxed{\frac{35}{12}}$

$E(X) = \sum x \cdot P(x,m)$

$\Rightarrow 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} \dots = \boxed{3,5}$

$E(2x+3) = 2E(X) + 3 = 2(3,5) + 3$

$Var(\overset{a}{2}X + \overset{b}{3}) = 2^2 var(X) = \boxed{4 \times \frac{35}{12}}$

$\boxed{Var(aX+b) = a^2 var(X)}$

$E(aX+b) = aE(X) + b$ قبلاً این را خواندیم !!

انحراف معیار:

$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} = \sqrt{Var(X)}$

$E[(X-a)^n]$ ... a ... نقطه ... حول ... n ... گشتاور

Year Month Date

متغیر تصادفی خاص است:

① متغیر تصادفی برنولی: $X \sim Ber(p)$

آزمایشی را در نظر بگیرید که با احتمال p به نتیجه‌ی موفقیت و با احتمال $1-p$ به نتیجه‌ی شکست منجر گردد. اگر موفقیت حاصل شود آن شکست حاصل گردد عدد ۱ را می‌گیرد. اما اگر پیروز گردد ۰ می‌گیرد. در این صورت X یک متغیر برنولی با پارامتر p خواهد بود.

X : ۱ ← $P(X=1) = p$ ، ۰ ← $P(X=0) = 1-p$

$P(X=x) = p^x (1-p)^{1-x}$; $x = 0, 1$

۲۰٪

hint: با ۲ حرف فضا ۲ حرف می‌توان یک متغیر تصادفی برنولی روی آن تعریف کرد. $P(0) = \frac{5}{6}$ ، $x=0$ ← ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ آزمایش تاس.

② پیروزی ← $x=1$ ← ۶

$P(1) = \frac{1}{6}$

Year Month Date

اگر $X \sim Ber(P)$

1) $E(X) = P$

2) $E(X^n) = P$

3) $Var(X) = P(1-P)$

اگر X دارای توزیع برنولی با پارامتر P باشد حاصل عبارت زیر چیست؟

$E(X + X^2 + \dots + X^n)$ $\boxed{nP}$

h توزیع Z جدایی "

$E[g(X) \cdot h(X)] = E[g(X)] \cdot E[h(X)]$

$E(X^n) = P \Longleftarrow X \sim Ber(P)$

اگر $X_1, \dots, X_n \sim Ber(P)$

اگر X_1 تا X_n برنولی باشند

حاصل عبارت تقسیم توزیع

$Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$:1

$Y = \max[X_1, \dots, X_n]$:2

(A) $\Rightarrow P \cdot P \cdot P \dots \rightarrow \boxed{P^n}$

(B) $\Rightarrow \boxed{1 - P^n}$

سوال (1)

Year Month Date

(2) A $Y = \max\{X_1, X_2\}$

$Y = 0, 1$

$P(Y=0) = (1-p)\cdot(1-p)\cdot(1-p)\cdots$

$\Rightarrow P(Y=0) = (1-p)^n$

$P(Y=1) = 1 - (1-p)^n$

متغیر دوجمله‌ای $X \sim Bin(n,p)$:

متغیر 2 جمله‌ای برابر است با تعداد پیروزی‌ها در n آزمایش برنولی که احتمال پیروزی در هر یک از n آزمایش برنولی برابر با p می‌باشد.

به عبارتی دیگر اگر Y_1 تا Y_n ، n متغیر برنولی با پارامتر p باشند، X به صورت زیر تعریف شود به گونه‌ای که متغیر X در واقع برابر است با تعداد موفقیت‌ها در این n آزمایش. و احتمال هریک از مقادیر آن به صورت زیر می‌باشد:

$Y_1, \dots, X_n \sim Ber(p)$

$X = Y_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $\quad X = 0, 1, 2, \dots$

$P(X=a) = \binom{n}{a} p^a (1-p)^{n-a}$

Year Month Date

تعداد افراد وارد شده به بانک $X \sim P(\lambda = 5)$

متغیر پواسون

$X \sim P(\lambda)$

$E(X) = \lambda$ امید ریاضی

$Var(X) = \lambda$ واریانس

مثال: اگر تعداد تصادفات یک منطقه در هر روز از توزیع پواسون با متوسط 2 تصادف در روز پیروی کند، مطلوب است:

الف = احتمال اینکه در یک روز تصادفی نداشته باشیم.

ب = " " در روز یک، یک تصادف و در روز 2 تصادف داشته باشیم.

ج - احتمال اینکه مجموع تصادفات 2 روز پشت سر هم حداکثر دو تا گردد.

$P(X=0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = e^{-\lambda} = \boxed{e^{-2}}$

$P(X=a) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{a}}{a!}$

Subject:
Year Month Date

X_1, X_2 مستقل از $P(\lambda)$ ... $P(\lambda)$

ب و $P(X_1=1 \cap X_2=2)$

$\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} \times \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \xrightarrow{\lambda=2} [2e^{-2}] \times \left[\frac{4e^{-\lambda}}{2!}\right]$

2. $\Rightarrow P(X_1+X_2=3)$

X_1	X_2
0	3
1	2
2	1
3	0

$P(X_1=0, X_2=3) +$
$P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1)$
$+ P(X_1=3, X_2=0)$

$[P[X=0)_X \; P(X=3)] + P[((X_1=1) \times X_2=2)]$

قضیه پواسون: اگر تعداد اتفاق‌ها در واحد زمان دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد تعداد اتفاق‌ها در t واحد زمانی هم دارای توزیع پواسون با پارامتر $t\lambda$ است.

تعداد اتفاقات در یک واحد زمانی $X \sim P(\lambda)$

$\sim$ در t واحد زمانی $X \sim P(t\lambda)$

Subject :
Year Month Date

مطلوب است حداقل احتمال از دست دادن یک سوال

$P(X_1 + X_2 \geq 3)$

$P(Y \geq 3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}$ ، $\frac{e^{-4}4^3}{3!}$

چون ⇐ یک روز $X \sim P(\lambda, 2)$

دو روز $Y \sim P(\lambda, 4)$

hint: اگر دفعات وقوع یک اتفاق در واحد زمان از توزیع پوآسون با پارامتر λ پیروی کند و احتمال‌های p_1 تا p_m به ترتیب از نوع یک تا m باشند به‌طوری که تعداد اتفاق‌های نوع I در این توزیع پوآسون با پارامتر λp_i می‌باشد.

$X \sim P(\lambda, 0.3)$ ⇐ آبی ، $Y \sim P(\lambda, 0.7)$ ⇐ قرمز

Subject :
Year Month Date

فرض کنید تعداد سفارشات یک رستوران در ساعت 12 تا 13 دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 20$ است. 30٪ سفارشات برای سفارش پیتزا و 70٪ برای سفارش ساندویچ باشد. مطلوب است

الف: احتمال اینکه در ساعت 12 تا 13 5 درخواست دریافتی برای

پیتزا صورت گیرد ب: احتمال اینکه در بازه‌ی زمانی 12/30 تا 12/5 4 درخواست برای سفارش ساندویچ صورت گیرد.

تعداد کل سفارشات در هر ساعت $X \sim P(\lambda = 20)$

تعداد سفارشات پیتزا در هر ساعت $Y \sim P(\lambda = 20 \times \frac{3}{10} = 6)$

تعداد ساندویچ $Z \sim P(\lambda = 14)$

$$P(Y=5) = \frac{e^{-6} 6^5}{5!}$$

ب.

$$Z_1 \sim P(\lambda = \frac{14}{4}) = 3.5$$

$$P(Z=4) = \frac{e^{-3.5} (3.5)^4}{4!}$$

... احتمال داریم که در یک روز تصادف و صدمه تولید شود.

متغیر هندسی: تعداد آزمایش های مستقل برنولی با پارامتر p تا اولین موفقیت را متغیر تصادفی هندسی می نامند.

صفر ندارد.

$X \sim G(p)$ $\quad X = 1, 2, \ldots$

p: احتمال همواره

q: احتمال آن صفر.

$P(X = a) = (1-p)^{a-1} p$

$P(3) = (1-p)^2 p$

$P(1) = p$

$P(4) = (1-p)^3 \cdot p$

$E(X) = \frac{1}{p}$

$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

مثال: شخصی تا قدرک تاکسی کم را پیدا می کند تصادف اولین بار که تصادف شود. آند ۸ تا تاکسی را هندی کرد پیدا کند چقدر احتمال دارد این اتفاق برای او بیفتد؟

$X \sim G(\frac{1}{8})$ $\quad X = 1, 2, \ldots$

الف) احتمال $X > 5$ $\quad P(X > 5) = (\frac{7}{8})^5$

Year Month Date

$P(X=4) = (1-p)^3 p^{\blacksquare} = \left(1-\frac{1}{6}\right)^3 \frac{1}{6}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{6}$: احتمال آمدن ۶ در هر پرتاب

ب) $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

$\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6}$

hint:

$X \sim G(p)$

$E(X) = \boxed{\frac{1}{p}}$

$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \boxed{\frac{1-p}{p^2}}$

$P(X>a) = (1-p)^a$ ☆☆

آنگاه

$P(X<5) = 1 - P(X \geq 5) = 1 - P(X>4) = 1-(1-p)^4$

خاصیت بی حافظگی هندسی: توضیح هندسی بی حافظگی یعنی اگر A آزمایش

انجام شده باشد و هیچ موفقیتی حاصل نشده باشد (قبل از آنکه آزمایش A انجام شود)

Subject :
Year Month Date

لازم به ذکر است که این دو رخ برابر با حالتی است که هنوز هیچ آزمایشی انجام نشده و ما خواهیم احتمال اینکه اولین پیروزی در آزمایش سوم حاصل شود، چه قدر است.

$$P(X=3) = (1-p)^2 p$$

$$P(X=7 \mid X>4) = \frac{P(X=7)}{P(X>4)} = \frac{(1-p)^6 p}{(1-p)^4}$$

$$= (1-p)^2 p$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

احتمال یکنواخت گسسته: اگر متغیر تصادفی X مقادیر x_1 تا x_n را با احتمال یکسان $\frac{1}{n}$ اختیار کند، به آن متغیر یکنواخت گسسته می‌گویند.

$$P(X=x_i) = \frac{1}{n}$$

حالت خاص: اگر $x_1, \dots, x_n$ مقادیر یک تا n باشد

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var = \frac{n^2-1}{12}$$

اختلاط میانگین آنها داریم: ←

Subject :

Year Month Date

دیسکریت یکنواخت گسسته: $X \sim DU(n)$

$E(X) = \frac{6+1}{2} = 3.5$ $\quad Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$, $\frac{35}{12}$

دیسکریت 2 جمله‌ای منفی: حد آزمایش‌های مستقل به نوعی که احتمال پیروزی p و هر یک از آنها $1-p$ است. تکرار آزمایش‌ها تا رسیدن به r امین موفقیت را متغیر تصادفی 2 جمله‌ای منفی با پارامترهای r و p می‌گوییم.

مثال: تکنیکی که احتمال ایمن آن p را آنقدر به تاب می‌گیرد تا برای سومین بار شکست بخورد. اگر X تعداد تاب‌های لازم تا سومین شکست باشد

X دارای توزیع دیسکریت 2 جمله‌ای منفی با R حد می‌باشد، مطلوب است محاسبه

$X \sim NB(r, p)$

$X=5$

$P(X=5) = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 p$

ask

$e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = ?$

$X \sim NB(r, p)$

$E(X) = \frac{r}{p}$

$Var(X) \rightarrow \frac{r(1-p)}{p^2}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

فصل (5)

امید ریاضی

امید ریاضی متغیر تصادفی پیوسته

اگر X گسسته: $E(X) = \sum x \cdot p(X=x)$

پیوسته: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ ✓ ✱

مثال: اگر X متغیری باشد که چگالی احتمال مقابل را دارد امید ریاضی X را بیابید:

$$f_X(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(2x - 3x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-1}^{1} x f(x) dx = \int_{-1}^{1} x \left(-\frac{1}{2}\right)(2x - 3x^2)$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + \frac{3}{2}x^3\right) dx = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

امید ریاضی توابعی از متغیر پیوسته X

اگر X گسسته: $E[g(X)] = \sum g(x) \cdot p(X=x)$

پیوسته: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx$

شرط x یک به یک بودن تابع.

اگر X یک متغیر پیوسته با تابع چگالی احتمال معلوم باشد و $Y = X^n$

مطلوب است محاسبه امید Y

Subject:
Year Month Date

$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ $y = x^n$

$E(Y) = \int y \cdot f(y)\, dy$:Y

$E[Y] = E(X^n) = \int x^n \cdot f(x) \cdot dx$

$\int_0^1 x^n \cdot dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{n+1}}$

واریانس متغیر پیوسته $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)\, dx$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$

hint: اگر X یک متغیر پیوسته با تابع چگالی مشخص باشد برای پیدا کردن واریانس این متغیر

همیشه کافیست که دو انتگرال $E(X)$ و $E(X^2)$ را بدست آوریم

a و b اعداد ثابت دلخواه

$E(aX+b) = a\,E(X)+b$

$Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$

PAPCO

Subject:
Year Month Date ( )

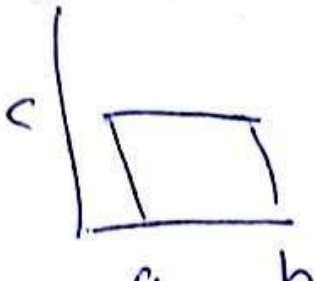
متغیرهای خاص پیوسته:

$X \sim U(a,b)$

~~$X \sim N$~~

① متغیر یکنواخت پیوسته:

X داری توزیع یکنواخت پیوسته در بازه‌ی (a,b) می‌باشد اگر احتمالیه مختلف موجود در این بازه را با شانس یکسان اختیار کند.



$c(b-a) = 1$

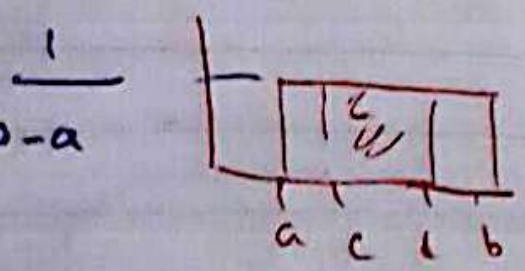
$c = \frac{1}{b-a}$

تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$P(c < X < d) = \frac{1}{b-a} \cdot (d-c) = \frac{d-c}{b-a}$$

مثال: احتمال اینکه متغیر یکنواخت پیوسته X در بازه‌ی c تا d قرار گیرد.



Subject:
Year Month Date

مثال: زمانی که اتوبوس شهری به محل کار فرد یک متغیر تصادفی می باشد.
که دارای توزیع یکنواخت پیوسته در فاصله ی ۶ دقیقه است
می خواهیم محاسبه کنیم احتمال اینکه شخص بیش از ۴ دقیقه در این ساعات
(۶ تا ۶:۱۰) منتظر اتوبوس بماند.؟

$X \sim U(0, 6)$

$P(2 < X < 4) \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

امید ریاضی
و واریانس
متغیر یکنواخت پیوسته

$X \sim U(a,b)$:
$E(X) = \frac{a+b}{2}$
$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$X \sim U \quad E = \frac{a+b}{2}$

$Var = \frac{a-b}{12}$

$X \sim U$:
$E(X) = \frac{a+b}{2}$
$Var = \frac{a-b}{12}$

PaPCO

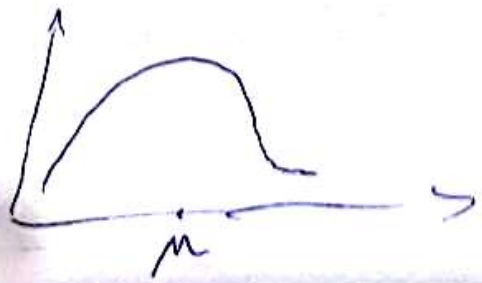
Subject :
Year Month Date

(۱) متغیر تصادفی نرمال : توزیع نرمال پرکاربردترین توزیع در مدل سازی
از پدیده‌های تصادفی می‌باشد. این توزیع به این دلیل نرمال نامیده می‌شود که بسیاری
از پدیده‌های تصادفی متعارف مدعو در طبیعت سازگار است.

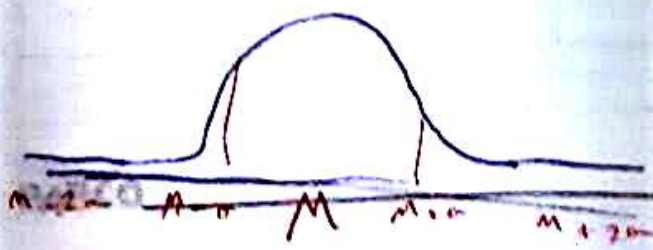
نمودار چگالی توزیع نرمال بصورت زنگوله‌ای شکل می‌باشد و محور تقارن
مماس بر این منحنی است.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

متغیر تصادفی نرمال $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ✓



اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 (یکسان)
روابط زیر همواره برقرار است:



Subject :
Year Month Date ( )

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = \frac{68}{100}$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = \frac{95}{100}$

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = \frac{99}{100}$

امید ریاضی و واریانس:

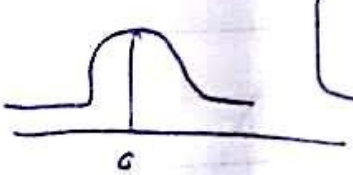
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$= \mu$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx = \sigma^2$$

hint: متغیر نرمال استاندارد: $Z \sim N(\mu=0, \sigma^2=1)$

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} \qquad -\infty < z < +\infty$$



تقارن حول 0

PAPCO

Subject:
Year Month Date

اگر متغیر نرمال با توزیع برابر با صفر و واریانس برابر با یک داشته باشد
آن متغیر را متغیر نرمال استاندارد می‌نامیم. که با حرف Z نشان می‌دهیم.

اگر X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد
آنگاه متغیر تصادفی Z دارای توزیع نرمال استاندارد می‌شود.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

← تبدیل خطی

برای حل مسائلی که متغیر تصادفی نرمال از آنجایی که کدامیک از انواع احتمال نرمال سخت است از تبدیل متغیر به متغیر نرمال استاندارد و استفاده از جدول نرمال استاندارد برای محاسبه احتمال مورد نظر مسئله به شکل زیر استفاده می‌شود.

$$P(X<a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$Z \qquad = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

جدول

RaPCO

Year Month Date

۴۱: ارتفاع کلیه مردان ۲۵ ساله یک منطقه توزیع نرمال با میانگین ۷۱ اینچ و واریانس $\sigma^2 = 6.25$ می باشد. الف: هر یک نفر به تصادف ب شود احتمال اینکه قد آن کمتر از ۷۴ inch باشد چقدر است.

ب: چند درصد افراد بیشتر از ۷۲ اینچ قد دارند.

الف

$$P(X < 74) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{74-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{74-71}{\sqrt{6.25}}\right) = P(Z < 1.21) = \Phi(1.21)$$

جدول

0.88868

ب

$$P(X > 72) = P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > \frac{72-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P\left(|Z| > \frac{72-71}{\sqrt{6.25}}\right) = P(Z > 0.4) = 1 - P(Z < 0.4)$$

$$1 - \Phi(0.4) = 1 - 0.6554$$

درصد قد کمتر از نوزده سانتی متر برابر ۳۴.۴۶ درصد می شود.

اگر Z یک متغیر استاندارد باشد هر یک از موارد زیر با احتمال از جدول نرمال استاندارد محاسبه می شود.

P4PCO

Subject:
Year Month Date

$P(z < 2,23) = \Phi(2,23) = 0,9871$

$P(1,2 < z < 2,12)$

$P(z < 2,2) - P(z < 1,2)$

$= \Phi(2,2) - \Phi(1,2)$

3) $P(-2,2 < z < -1,2)$ ، $P(1,2 < z < 2,2)$

4) $P(z > -2,23) = 1 - P(z < -2,23)$

$\Phi(-2,23)$



$-2,23$



$2,23$

$P(z < 2,23)$

5) $P(z < -2,23) = P(z > 2,23)$

$= 1 - P(z < 2,23) = 1 - \Phi(2,23)$

$\Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$

Subject:
Year Month Date

6) $P(-2,23 < Z < 2,23) = P(Z < 2,23) - P(Z < -2,23) = \Phi(2,23) - [1 - \Phi(2,23)]$

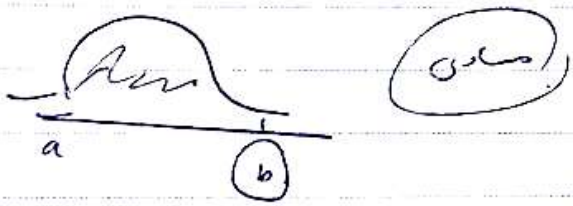
$= 2\Phi(2,23) - 1$

$P(Z < a) = 95$



$a = ?$ $a = 1,65$ حدول

$P(Z > a) = \frac{95}{100}$



$P(Z < b) = \frac{95}{100}$ $b = 1,65$ $a = -b = -1,65$

مثال: یکی‌های قالب‌های تولید شده توسط خط تولید دارای توزیع نرمال با میانگین $\frac{9}{10}$ و انحراف معیار $\frac{3}{1000}$ است. اگر حد مجاز تعیین شده برای یکی‌های قالب‌ها به صورت زیر باشد چند درصد از قالب‌های تولیدی سالم هستند.

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

$P(0,895 < X < 0,905) = P\left(\frac{0,895 - \mu}{\sigma} < Z < \frac{0,905 - \mu}{\sigma}\right)$

$X \sim N(\mu = \frac{9}{10}, \sigma = 0,003)$

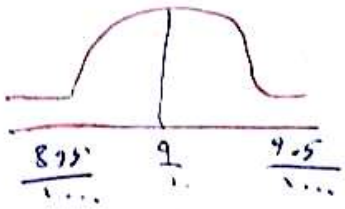
Subject:
Year: Month: Date:

$P(Z<1,67) - P(Z>-1,67)$ $\quad \Phi(1,67) - [1 - P(Z<1,67)]$

$P(Z<1,67) - P(Z<2,76)$ $\quad \Phi(1,67) - [1 - \Phi(1,67)]$

$P(-1,67 < Z < 1,67) = 2\Phi(1,67) - 1$

$= \dots$



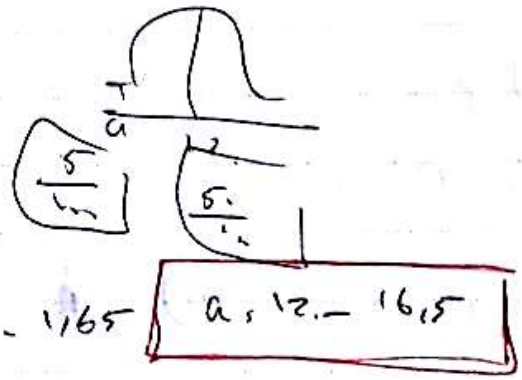
حریف مسابقه‌ی 2 دیگری مدت زمانی که مسیر توسط افراد از توزیع نرمال با میانگین 120 دقیقه و انحراف معیار 10 دقیقه پیروی می‌کند. اگر شما به عنوان یکی از دونده‌ها بخواهید جزو 5 درصد اول باشید حداکثر در چه مدت زمانی باید مسیر را طی کنید.

$X \sim N(\mu = 120, \sigma = 10)$

$P(X < a) = \frac{5}{100}$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \frac{5}{100}$

$P(Z < \frac{a-120}{10}) = \frac{5}{100}$ $\quad \frac{a-120}{10} = -1,65$ $\quad a = 120 - 16,5$



3) متغیر تصادفی نمایی

$X \sim exp(\lambda)$

اگر متغیر X نشان دهنده‌ی تعداد اتفاق‌ها در واحد زمان باشد و توزیع آن پواسون با پارامتر λ باشد به نحوی که اگر فاصله‌ی زمانی بین 2 اتفاق متوالی را

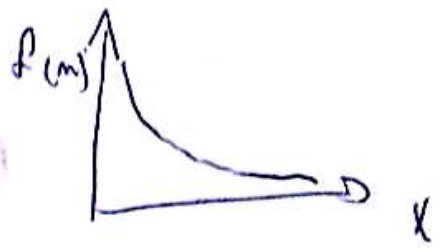
Year Month Date

$\lambda e^{-\lambda m}$ / $\lambda e^{-\lambda m}$

با χ نشان دهیم χ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ است که تابع چگالی آن

$f(x) = \lambda e^{-\lambda m}$ $\quad m \geq 0$

می باشد.



$p(x<a) = 1 - e^{-\lambda a}$

$\chi \sim p(\lambda, 5)$ توزیع افراد

$\chi \sim exp(\lambda, 5)$ توزیع نمایی

hint: اگر χ دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد روابط زیر همواره برقرار است:

1) $p(\chi<a) = 1 - e^{-\lambda a}$ $\quad \Leftarrow 1 - e^{-\lambda m} \not\Rightarrow e^{-\lambda b}$

2) $p(\chi>a) = e^{-\lambda a}$

3) $p(a<\chi<b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

$E(\chi^r) = \frac{r!}{\lambda^r}$

$E(\chi) = \frac{1}{\lambda}$

$E(\chi^2) = \frac{2}{\lambda^2}$

$\lambda e^{-\lambda m}$

$Var(\chi) = \frac{1}{\lambda^2}$

مثال ۱: عمر یک لامپ LED از توزیع نمایی با پارامتر $\lambda = \frac{1}{2}$ سال پیروی می‌کند. اگر دستگاه هم‌اکنون روشن شود، احتمال اینکه بیش از ۴ سال کار کند چقدر است؟

الف) اگر دستگاه هم‌اکنون روشن شود، به طور متوسط چند سال کار می‌کند؟

$$P(X>4) = \int_4^{\infty} f(x)\,dx = \int_4^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$= e^{-2} \approx 0.13$$

$f(x)$

$$\text{ب) } E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \boxed{2 \text{ (سال)}}$$

مثال: فروشگاهی از ساعت 8 صبح فروش خود را پیگیری می‌کند. اگر تعداد مشتریانی که در هر ساعت وارد فروشگاه می‌شوند دارای توزیع پواسون با پارامتر $\lambda = 3$ باشد، الف) احتمال اینکه بین ساعت‌های 9 و 10 صبح دقیقاً 2 نفر وارد شوند $\frac{4}{e^3}$ ب) احتمال اینکه اولین مشتری بعد از ساعت 8:40 وارد شود چقدر است؟ $\left(\frac{2}{3}\right)$

ب) احتمال اینکه اولین مشتری بعد از ساعت 8:40 وارد شود چقدر است؟

$$P(X>0.1) = P\left(X > \frac{2}{3}\right) = \int_{\frac{2}{3}}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_{2/3}^{\infty} 3e^{-3x}\,dx$$

hint: $\int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$

$\int x^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

حل $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} f(x)\,dx = e^{-\frac{1}{2}}$

$X \sim exp(\lambda)$

$P(X > a) = e^{-\lambda a}$ ، $\lambda e^{-\lambda x}$

خاصیت بی حافظگی نمایی: توزیع نمایی بی حافظه است به این معنی که اگر یک توزیع نمایی X داشته باشیم و بدانیم X از s بزرگتر است، احتمال اینکه X از $t+s$ بزرگتر باشد با احتمال اینکه X از t بزرگتر باشد برابر است با احتمال اینکه از لحظه‌ی صفر تا لحظه‌ی t اتفاقی رخ دهد.

$P(X > t) = P(X > t+s \mid X > s)$

مثل: آمده است که طول عمر یک دستگاه تصفیه‌ی هوا از توزیع نمایی با $\lambda = 0.2$ پیروی می‌کند. احتمال اینکه دستگاه حداقل ۵ سال دوام بیاورد چقدر است؟

$P(X > 2) = \int_{2}^{\infty} 0.2 e^{-0.2x}\,dx = 2 e^{-0.2(2)}\,dx$

P4PCO

Subject
Year Month Date

اندازه‌ی که در یک ساعت اول نرسد باید چقدر باشد تا با احتمال بیشتر از ۰.۵ در ساعت دوم برسد.

$X \sim exp(\lambda = 2)$

الف) $P(X > 2) = e^{-\lambda(2)} = e^{-4}$

ب)

$$P(X > 3 \mid X > 1) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)}$$

$$= \frac{e^{-6}}{e^{-2}} = e^{-4}$$

علت این امر خاصیت بی حافظگی است.

$e^{-\lambda a} = e^{-2(2)} = e^{-4}$

در مثال قبل اگر طول عمر دستگاه یکنواخت در بازه‌ی صفر تا پنج سال باشد احتمال خواسته شده را مجدداً حساب کنید.

$P(X > 2) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}$

ب) $\frac{\frac{5-3}{5-0}}{\frac{5-1}{5-0}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ≠ حل مثال قبل / حل نکرد.

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\frac{P(X > 3 \mid X > 1)}{P(X > 1)}$

$= \frac{P(X > 3)}{P(X > 1)}$

Subject:
Year Month Date ( )

متغیر نمایی ارلنگ: اگر X تعداد اتفاق ها در واحد زمان، دارای توزیع پوآسون با پارامتر λ باشد آنگاه زمان بین اتفاق فعلی تا آتی اتفاق بعدی نمایی است. وقتی زمان بین α تا α اتفاق بعدی ارلنگ است.

$X \sim Er(\alpha, \lambda)$



اگر X دارای توزیع ارلنگ با پارامتر (α, λ) یا $Er(\alpha, \lambda)$ تابع چگالی آن

این روی محور اعداد حقیقی مثبت به صورت زیر می‌باشد.

$$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} (\lambda x)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$$ X' it does not come.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

اگر احتمال وقوع یک رخداد پواسن باشد آنگاه احتمال یک تا چند وقوع یابنگ شود به صورت مستقیم محاسبه می‌شود تا چند وقوع یابنگ شود.

$X \sim Er(\alpha=3, \lambda=3)$ $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda} = 1$

P4PCO

Subject:
Year Month Date

مثلاً: متغیر از لحاظ حالت شامل متغیر پیوسته که مقادیر در فضای اعداد حقیقی و متغیر گسسته که مقادیر در فضای اعداد صحیح هستند می‌باشد. اما در زنگ به مقاومت‌هایی که مقادیر صحیح می‌گیرند.

تعیین تعریف تابعی از یک متغیر تصادفی (یا کمیتی) $Y = g(X)$

تعیین " " " " یعنی : در حالتی که تعیین توزیع یک متغیر یعنی تعیین مقادیر آن و تعیین احتمال هر یک از مقادیر می‌باشد در حالتی که تعیین توزیع یک متغیر یعنی تعیین مقادیر مختلف آن و تعیین تابع چگالی آن می‌باشد در این حالت تعیین تابع چگالی جا استفاده از تابع توزیع تجمعی

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = f_Y(y)$$

تابع چگالی

PAPCO

Year Month Date

مثال: اگر X دارای توزیع یکنواخت در فاصله $(-1, 1)$ باشد و $Y = X^2$ هم متغیر تصادفی باشد، تابع چگالی Y را تعیین کنید.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$

$$P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = \frac{2\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$$

طول بازه / کل طول

$$\frac{d F_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = f_Y(y)$$

یادآوری $F_X(a) = P(X \le a)$

مثال ۲: در مثال قبل اگر X دارای توزیع نمایی با پارامتر λ باشد تابع چگالی $Y = X^2$ را تعیین کنید.

$X \sim exp(\lambda)$

$Y = m^2$

تعیین توضیح Y

$m^2 > 0 \rightarrow y > 0$ تعیین مقادیر

$f_Y(y)$ تابع چگالی

Subject :
Year Month Date

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y)$$

$$P(-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}) = P(x < \sqrt{y})$$

$$= 1 - e^{-\lambda\sqrt{y}}$$

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\lambda\sqrt{y}}$$

یادآوری: $X \sim exp(\lambda)$

$$P(X < a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

حمله واکنش در فضای گسسته و پیوسته:

اگر فاصله ی یک نقطه انرژی تا هدف برابر با متغیر m باشد احتمال به هدف زدن به هدف برابر $\frac{1}{m^2}$ می باشد. حال اگر یک شخص یک فرشته گسسته درباره ی اتاق 5 بار شلیک، اگر در لحظه ای کمانش کلیدی به سمت هدف به تاب گردد احتمال به خورد را حساب کنید.

$$P(\text{به خورد} \mid X, m) = \frac{1}{m^2}$$

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{5} \times 1 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{25}$$



$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{25}$$

Subject :

Year . Month Date : / /

قانون احتمال کل $P(\text{عفونت}) = \sum P(\text{عفونت} \mid X=x) \, P(x)$

مثال قبل: (عفونت: X یک متغیر پیوسته در بازه‌ی $[0,4]$)

با این مسئله را پیوسته حل کنید.

$$P(E) = \int P(E \mid X=x) \, f_X(x) \, dx$$

$$P(\text{عفونت} \mid Y=y) = \frac{1}{y^2}$$

$$P(\text{عفونت}) = \int P(\text{عفونت} \mid y, X) \cdot f_X(x) \, dx$$

$$\int_1^5 \frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{4} \, dy = \frac{2}{10}$$

P4PCO

Subject:
Year Month Date

استقلال متغیر تصادفی : تعریف استقلال متغیرها همانند تعریف استقلال پیشامدها می باشد. 2 متغیر X و Y مستقل اند اگر توضیحی X به توضیحی Y نگیری ندارند بیانگر : با استفاده از توابع احتمال تمام و توابع چگالی احتمال استدلال

تمام تکمی

2 متغیر تصادفی به صورت زیر انجام می شود :

1) اگر X و Y گسسته باشند آنگاه X و Y مستقل اند اگر تابع احتمال توام آنها برابر با حاصل ضرب توابع احتمال حاشیه ای آنها باشد

2) : اگر X و Y پیوسته اند " " " اگر " چگالی توام آنها برابر با حاصلضرب توابع چگالی حاشیه ای باشد

X و Y گسسته

آنگاه مستقل

توابع احتمال حاشیه ای.

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x) \times P(Y=y)$$

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y)$$

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y)$$

X و Y پیوسته

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$$

تابع چگالی توام

$$f(x) = \int f(x,y)\, dy$$

$$f(y) = \int f(x,y)\, dx$$

مثال: آیا تابع چگالی توام زیر مستقل هستند یا خیر؟

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad x>0,\ y>0$$

$$f(x) = \int f(x,y)\,dy = \int e^{-x}\cdot e^{-y}\,dy$$

$$f(y) = \int f(x,y)\,dx$$

$$A = \int_0^\infty e^{-x}\cdot e^{-y}\,dx = e^{-y}\int_0^\infty e^{-x}\,dy = e^{-y}$$

$$f(y) = \int e^{-x}\cdot e^{-y}\,dx = e^{-y}\int e^{-x} = e^{-y}$$

$$e^{-y}\cdot e^{-x} = e^{-(x+y)} = f(x)\cdot f(y)$$ مستقل ✓

مثال: آیا متغیرهای تابع چگالی توام با تابع زیر با هم مستقل اند یا خیر؟

$$f(x,y) = 2 \qquad (x<y<1,\ x>0)$$

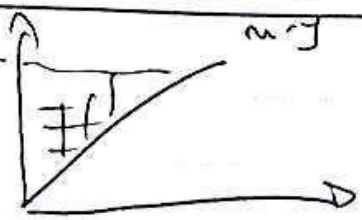
$$f(x) = \int f(x,y)\,dy$$

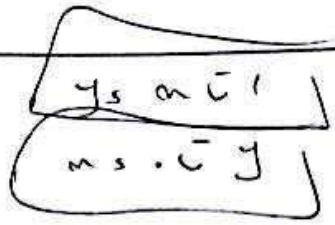
$$\int_x^1 2\,dy = 2(1-x)$$

$$f(y) = \int f(x,y)\,dx$$

$$\int_0^y f(x,y)\,dx = \int_0^y 2\,dx = 2y$$

PAPCO





برای توابع دو متغیره استقلال 2 متغیر تصادفی علاوه بر روش فوق روش ساده تری نیز وجود دارد.

در این روش باید 2 شرط زیر برقرار باشد 1) تابع x و y به یک دیگر مرتبط نباشند

2) تابع چگالی توام یا تابع احتمال توام $f(x,y)$ را بتوان به صورت 2 تابع یکی برحسب x و دیگری برحسب y نوشت

مثال: با استفاده از نکته فوق در هریک از موارد زیر بررسی کنید x و y مستقل اند یا خیر:

$f(x,y) = k+y$ $\quad 0<x<1$ $\quad 1<y<1$ ✓

$f(x,y) = 12xy(1-x)$ $\quad 0<x<1$ $\quad 1<y<1$ ✓

$12x(1-x)$ $\quad f(x)$ $\quad y$

$f(x)$

$f(x,y) = \frac{1}{8}(y^2 - x^2)e^{-y}$ $\quad -y<x<y$ $\quad y>0$

$f(x,y)$ $\quad \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2})$ $\quad 0<x<1$ $\quad 1<y<2$

Subject:
Year Month Date

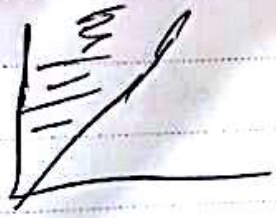
مثال: اگر دو متغیر مستقل نمایی با پارامترهای λ_1 و λ_2 باشند مطلوب است

$$X \sim exp(\lambda_1) \rightarrow f(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \quad x>0$$

$$Y \sim exp(\lambda_2) \quad f(y) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \quad y>0$$

$$P(X<Y) = \iint_{x<y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\infty}\int_0^{y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\,\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\,dx\,dy$$

$$P((X,Y) \in A) = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$



2 نفر قرار است یکدیگر را در جای ملاقات کنند. هیچ‌یک از آن‌ها از قبل نمی‌داند چه زمانی به محل قرار خواهد رسید. فاصله زمانی بین 13 تا 14 می‌باشد. فاصله زمانی که نفر دوم به محل قرار خواهد رسید بین 13:30 تا 14 می‌باشد. احتمال اینکه نفر اول زودتر به محل قرار برسد چقدر است.

$$X \sim U(0,1)$$

P4PCO

Subject :

Year. Month. Date. ( )

تمرین

خطای کاتی $X \sim U(0, 60)$

دوم $Y \sim U(30, 60)$

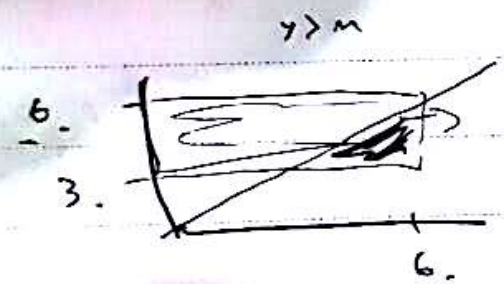
$P(X < Y) \quad \int\int f(x,y)\, dx\, dy$

$f(x) \cdot f(y) = f(x,y) \rightarrow$ جی مستقلانه

چون یکنواخت $\Rightarrow \frac{1}{b-a} \quad f(x) = \frac{1}{60-0} = \boxed{\frac{1}{60}}$

$f(y) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{60-30} = \boxed{\frac{1}{30}} \qquad \frac{1}{30} \times \frac{1}{60} = \boxed{\frac{1}{1800}}$

$$\int_{30}^{60} \int_{y}^{60} \frac{1}{1800}\, dx\, dy$$



$x = y \quad x = 60$

$y = 30 \text{ تا } 60$

$$\int_{30}^{60} \frac{1}{1800} \int_{y}^{60} dx\, dy$$

تابع چگالی احتمال متغیر پیوسته Z که حاصل ضرب دو متغیر پیوسته مستقل با توابع چگالی احتمال معلوم است و Z یکی از این دو متغیر با متغیر Z هم یک متغیر پیوسته خواهد شد و روال توضیح کاملاً مشخص است. جهت تعیین تابع چگالی احتمال Z باید مقادیر مختلف آن و تابع چگالی احتمال آن را مشخص کرد. برای انجام این کار از دو روش توضیح داده شده، مشتق گیری از تابع توزیع تجمعی و مشتق گیری از تابع مولد گشتاور استفاده می‌شود.

$$\frac{d F_Z(z)}{dz} \quad , \quad f_Z(z)$$

مثال: اگر X و Y دو متغیر پیوسته با توابع چگالی احتمال به صورت زیر باشند و $Z = \frac{X}{Y}$ مطلوب است تعیین تابع توزیع Z:

$$f(x,y) = e^{-(x+y)} \qquad x > 0 \quad , \quad y > 0$$

$$z > 0$$

تعیین تابع توزیع یک متغیر پیوسته

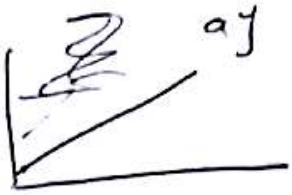
$$\frac{d F_Z(z)}{dz} = f_Z(z)$$

Subject :

Year Month Date ( )

$$F_Z(a) = P(Z \le a) = P\left(\frac{X}{Y} \le a\right)$$

$$P(X \le aY)$$



$$= \int_0^\infty \int_0^{aY} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{aY} e^{-x} \cdot e^{-y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^\infty e^{-y} \int_0^{aY} e^{-x}\, dx\, dy = 1 - \frac{1}{a+1}$$

$$\frac{d F_Z(a)}{dZ} = \frac{1}{(a+1)^2}$$

(T)

درجہ کی مثل اگر $W = XY$ کا کثافت تقسیم معلوم ہے تو W کی تقسیم معلوم کریں

$f(x,y) = e^{-x} \cdot e^{-y}$ $x > 0$ $y > 0$

Cell Phone

Project: Month Date

فصل ۶: محاسبه امید ریاضی:

اگر X و Y دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توام مشخص باشند

آنگاه امید ریاضی هر تابعی از X و Y به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E(g(X,Y)) = \int_y \int_x g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$$

$$E(g(X,Y)) = \sum_y \sum_x g(x,y) p(x,y)$$

نکته: $E(X) = \sum x \cdot p(x)$ یا $\int x f(x)\, dx$

مثال: اگر X و Y متغیرهای مستقل یکنواخت و یکنواخت در بازه‌ی صفر و یک باشند مطلوب است:

$X \sim U(0,1)$

$Y \sim U(0,1)$

$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot f(x,y)\, dx\, dy$

$f(x) = \frac{1}{1-0} = 1$

$F(y) = \frac{1}{1-0}$

Subject:
Year Month Date

$\int_0^1\int_0^1 xy\,dx\,dy = \int_0^1 x \underbrace{\int_0^1 x\,dx}_{\frac{1}{2}}\,dy$

$\frac{1}{2}\int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4}$

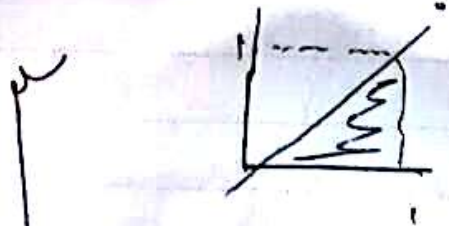
$x \sim U(a,b) \Rightarrow f(x) = \boxed{\frac{1}{b-a}}$

2) $E(X^2Y^2) = \int_0^1\int_0^1 x^2y^2 f(x,y)\,dx\,dy$ ①

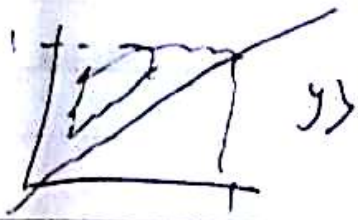
$\int_0^1\int_0^1 x^2y^2\,dx\,dy = \int_0^1 y^2 \underbrace{\int_0^1 x^2\,dx}\,dy$

$\int_0^1 y^2 \frac{1}{3}\,dy = \boxed{\frac{1}{9}}$ ✓

3) $E(|X-Y|) = \int\int |X-Y| f(x,y)\,dx\,dy$



$x > y$ $\boxed{|X-Y| = X-Y}$



$y > x$ $|X-Y| = -(x-y)$

$\boxed{= (y-x)}$

PdFCO

Year Month Date

$$\int_0^1 \int_y^1 (x-y)\,dx\,dy - \int_0^1 \int_0^y (y-x)\,dx\,dy$$

مثال: ا

$E(Y)$ +

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{10}$

$\frac{1}{10}$

$E(\min(X,Y))$

$f(x,y)$ ادا

$\iint \min(x,y)\, f(x,y)\,dx\,dy$

$\int_0^1 \int_y^1 y\,dx\,dy + \int_0^1 \int_x^1 x\,dy\,dx$

$E(X,Y)$

$E(X)+E(Y) = E(X+Y)$

hint:

$E(f(x)+f(y)) = E(f(x))+E(f(y))$

$E(X\cdot Y) = E(X)+E(Y)$

$E(f(X)\cdot f(Y)) = E(f(X)\cdot f(Y))$

اگر X_1 تا X_n متغیرهای تصادفی دلخواه با امید ریاضی متناهی با کنار یکدیگر به قرار است:

$$E(X_1+X_2+X_3+\cdots+X_n) = E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: اگر Y یک متغیر 2 جمله‌ای با پارامتر n و p باشد مطلوب است محاسبه‌ی $E(Y)$ با استفاده از گشتاورها.

$Y \sim Bin(n,p)$

$E(Y) = X_1 + X_2 + \dots X_n$

$\hookrightarrow Ber(p) \rightarrow E(X_i) = p$

$\hookrightarrow Bin(n,p)$

$E(Y) = E(X_1 + X_2 + \dots X_n) =$

$E(X_1) + E(X_2) + \dots E(X_n) = p + p + \dots = np.$

از آنجایی که متغیر 2 جمله‌ای با پارامتر n و p در واقع برابر با مجموع n متغیر برنولی با پارامتر p می‌باشد از روش فوق می‌توان برای محاسبه‌ی امید استفاده کرد.

کوواریانس و همبستگی: استقلال 2 متغیر تصادفی یعنی شناخت هر یک بر دیگری اثری نداشته باشد حال اگر 2 متغیر مستقل نباشند دنبال معیاری هستیم که میزان این وابستگی و نوع آن را مشخص کند کوواریانس یکی از این معیارهاست.

در صورتی که 2 متغیر X و Y در افزایش یکی دیگری مطرح مستقیم یا معکوس را در آنش یا به تغییرات 2 متغیر هم جهت باشند کوواریانس مثبت می‌گردد

Month Date ( )

- ویژگی ۱۰ — اگر X و Y مستقل باشند کواریانس صفر می‌گردد.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$$

مثال: تابع چگالی X, Y به صورت زیر می‌باشد، مطلوب است محاسبه:

$$f(x,y) = \frac{2}{x}e^{-2x} \qquad 0<x<\infty \quad , \quad 0<y<x$$

$Cov(X,Y)$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) \Rightarrow \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$E(XY) = \int_0^\infty \int_y^\infty xy\, f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{4}$$

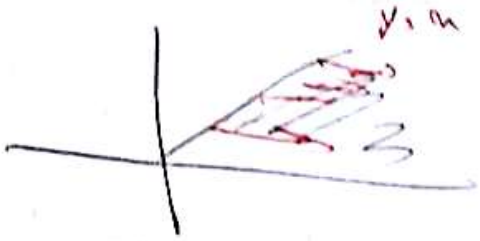
$$E(X) = \int_0^\infty \int_y^\infty x\, f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$\int\int x \cdot \frac{2}{x}e^{-2x}\, dx\, dy = \frac{1}{2}$$

$$E(Y) = \int_0^\infty \int_y^\infty y\, f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{4}$$

Subject:
Year Month Date

یادآوری: $E(g(x,y)) = \iint g(x,y) f(x,y)\, dx\, dy$



آمد تابع چگالی توام دو بعدی به صورت زیر با کدام مطلب است x, y cov

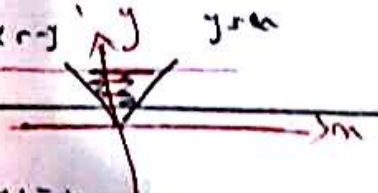
$f(x,y) = 1 \quad -y < x < y \quad , \quad 0 < y < 1$

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y) \quad \dots (\frac{2}{3}) \dots$

$E(XY) = ? \int_0^1 \int_{-y}^{y} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = 0$

$E(X) = \int_0^1 \int_{-y}^{y} x\, f(x,y)\, dx\, dy = 0$

$E(Y) = \int_0^1 \int_{-y}^{y} y\, f(x,y)\, dx\, dy = \frac{2}{3}$



Year Month Date

همیشه وقتی که مستقل می‌شوند با توجه به رابطه فاصله‌ی مدل به یکدیگر ارتباط

می‌یابند که Cov آنها صفر است اما عکس این حالت همیشه صادق نیست. یعنی این 2 متغیر مستقل نیستند اما چون Cov آنها صفر است مستقل نیستند. به طور کلی اگر دو متغیر مستقل باشند Cov آنها صفر است اما عکس این جمله لزوماً برقرار نیست.

یعنی اگر Cov 2 متغیر صفر شد این 2 متغیر لزوماً مستقل نیستند.

خواص کوواریانس

1) $Cov(X, a) = 0$ ← عدد ثابت

2) $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

3) $Cov(X, X) = Var(X)$

4) $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X, Y)$ ← عدد ثابت

5) $Cov(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = Cov(X_1, Y_1) + Cov(Y_1, Y_2) + Cov(X_2, Y_1) + Cov(Y_2, Y_2)$

6) $Cov(aX + b, cY + d) =$

~~$Cov(aX, cY) + Cov(aX, d) + Cov(b, cY)$~~

$+ Cov(b, d)$

Subject:
Year Month Date

واریانس مجموع متغیر های وابسته:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

اثبات:

$$Var(X+Y) = Cov(X+Y, X+Y)$$

$$= Cov(X,X) + Cov(X,Y) + Cov(Y,X) + Cov(Y,Y)$$

$$= Var(X) + Var(Y) + 2\,Cov(X,Y)$$

اگر X و Y و Z دارای واریانس و Cov های به شکل زیر باشند $5, 10, 8$

به صورت زیر تعریف کرده باشند مطلوب است محاسبه ی Cov بین $4, 5$!

$$\sigma_m^2 = 8$$

$$\sigma_j^2 = 12$$

$$\sigma_z^2 = 18$$

$$\begin{cases} Cov(X,Y) = 1 \\ Cov(X,Z) = -3 \\ Cov(Y,Z) = 2 \end{cases}$$

$U = X + 4Y + 2Z$

$V = 3X - Y - Z$

$$Cov(X+4Y+2Z, 3X-Y-Z)$$

$$Cov(X, 3X) + Cov(X, -Y) + Cov(X, -Z) + Cov(4Y, 3X) + \cdots$$

$$\Rightarrow 3\,Var(X) - Cov(X,Y) - Cov(X,Z) + 12\,Cov(X,Y) + \cdots$$

$$= -76$$

PqPCQ

Subject: Month: Date:

$Var(5) = 0$, $Cov(5, Y) = 0$

$E(5) = 5$, $Cov(X, 5) = 0$

حل مثل مطالب است

$Var(X + 2Y - 2 + 3)$

$Cov(X + 2Y - 2 + 3,\ X + 2Y - 2 + 3)$

اگر X_1 تا X_n متغیرهای مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند، مطلوب است $\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \bar{X}$

$E(\bar{X})$ ، $\sigma^2(\bar{X})$

$E(\bar{X}) = E\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$\frac{1}{n} \times n\mu = \mu$

$Var(\bar{X}) = Var\left[\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} Var(X_1 + \dots + X_n)$

σ^2 σ^2

$\frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$

$E(aX + b) = aE(X) + b$

$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

$\text{cov}(X_1+Y_2, X_1+Y_3)$

$\text{cov}(Y_2, Y_3) + \text{Var}(Y_2)$ ... [1]

$\text{Var}(X_1+Y_2) = \text{Var}(Y_1) + \text{Var}(Y_2) + 2\text{cov}(Y_1, Y_2)$

... [2]

$\text{Var}(Y_2+Y_3) = \text{Var}(Y_2) + \text{Var}(Y_3) + 2\text{cov}(Y_2, Y_3)$

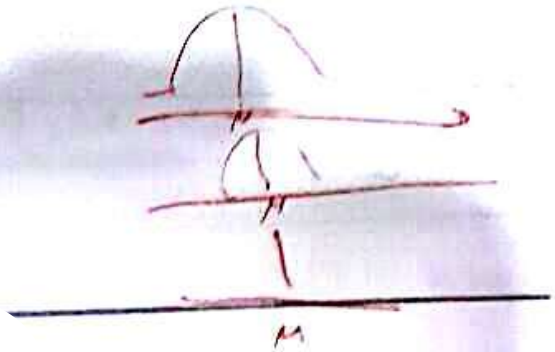
... [2]

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+2}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

مثال ۸ - قضایای حدی (۱۴) قانون اعداد بزرگ

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین μ و واریانس متناهی باشند، قانون اعداد بزرگ بیان می‌کند با افزایش n مقدار $\bar{X}$ به μ میل می‌کند.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{Y}_n - \mu| < \epsilon) = 1$$



PdPCO.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین ۱۰

[illegible] تعریف کنید: اگر X_1 تا X_n دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین μ و واریانس σ^2 باشند آنگاه توزیع $\bar{X}$ به صورت زیر تعریف می‌شود: به صورتی که $\bar{X}$ به صورت $\bar{X}$ تبدیل می‌شود اما به صورتی که مقدار Xها زیاد باشد توزیع $\bar{X}$ به سمت نرمال می‌رود. مقدار n کافی برای اینکه توزیع $\bar{X}$ به توزیع خود Xها بستگی دارد. هر چه توزیع Xها نامتقارن‌تر باشد به n بیشتری نیاز است تا توزیع نرمال شود. معمولا به ازای nهای بیشتر از 30 تقریبا توزیع نرمال می‌شود.

$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n}{n}$

$n \to \infty \quad \bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}} = \mu, \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n})$

$n \to$ زیاد $\quad \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ به توزیع

آلرژی: فرض کنید هر نفر از یک فروشگاه دارای توزیع میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. آلرژی (تصادفی) باشد. آلرژی در یک روز 50 نفر وارد فروشگاه شوند احتمال اینکه مجموع آنها در روز بیشتر از 55 شود چه قدر است:

$P(\bar{X} > 55) \quad \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{50}}{50}$

کلاغ‌ها
آلرژی
اگر 50 نفر
واریانس

Subject :
Year Month Date

$Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$

$\mu_y = \frac{a+b}{2}$ $\quad Var = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\frac{0+2}{2} = 1$ $\quad \sigma^2 = \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{1}{3}$

$Z = \frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} \sim N(0,1)$

$P(Y > 55) = P\left(\frac{Y - \mu_y}{\sigma_y} > \frac{55 - \mu_y}{\sigma_y}\right)$

$P\left(Z > \frac{55 - 50}{\sqrt{\frac{50}{3}}}\right)$ $\quad P(Z > 1.2) = 0.11$

$M_{\bar{y}} = n\mu = 50(1) = 50$ $\quad \sigma^2_{\bar{y}} = n\sigma^2 = \frac{50}{3}$

P4PCG

Subject :
Year Month Date

ضریب همبستگی $\rho(X,Y)$: اغلب می‌توان از Cov به عنوان معیار خطی

برای اندازه‌گیری وابستگی بین 2 متغیر استفاده کرد چرا که Cov علاوه بر اینکه

میزان و نوع وابستگی بین 2 متغیر است وابسته به مقیاس وابستگی آنهاست مثلا

به ازای یک واحد تغییر X ، $\frac{1}{m}$ بار Cov این 2 برابر با یک بار

آن است با تغییر مقیاس از m به cm مقدار Cov ... برابر می‌شود

اما این دلیل بر بیتر بودن هم بستگی نیست برای حل این مشکل به جای

Cov از ضریب هم بستگی استفاده می‌شود که بدون واحد است.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

$-1 \le \rho(X,Y) \le 1$

$Cov = 0$

مثال : اگر X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی 2 به 2 تام بستگی

و هر کدام با احتمال 0.1 با اثر صفر باشند

$$\rho(X_1+X_2, X_2+X_3) = \frac{Cov(X_1+X_2, X_2+X_3)}{\sqrt{Var(X_1+X_2) \cdot Var(X_2+X_3)}}$$

PgPCO