Subject:

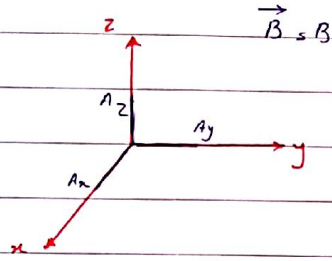
اسکالر: دما، جرم، زمان، حجم، ...

بردار: طول، سرعت، نیرو، ...

$\vec{A} \equiv A \equiv \underset{\sim}{A}$

$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$

$\vec{B} = B_x i + B_y j + B_z k$



استاندارد بردار: $|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

$\vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x)\hat{i} + (A_y \pm B_y)\hat{j} + (A_z \pm B_z)\hat{k}$

ضرب برداری‌ها

ضرب داخلی (نقطه‌ای): $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = (A_x B_x) + (A_y B_y) + (A_z B_z)$



ضرب خارجی: بردار $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\, \hat{n}$ بردار عمود

$$(\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = i(A_y B_y - A_z B_z) + j(A_z B_x - A_x B_z) + k(A_x B_y - A_y B_x)$$

مثال: حاصل ضرب $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ را بدست آورید. $q = 2$، $\vec{F} = 4i - 20j + 12k$، $\vec{V} = i + 2j + 4k$ بردار $\vec{B}$ را پیدا کنید.

$q\vec{V} = 4i + 8j + 16k$

$$q\vec{V} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 8 & 16 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (8B_z - 16B_y)i + (16B_x - 16B_z)j + (4B_y - 8B_x)k$$

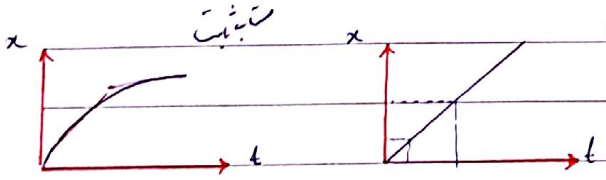
$B_x = -2$، $B_y = -1$، $B_z = 2$

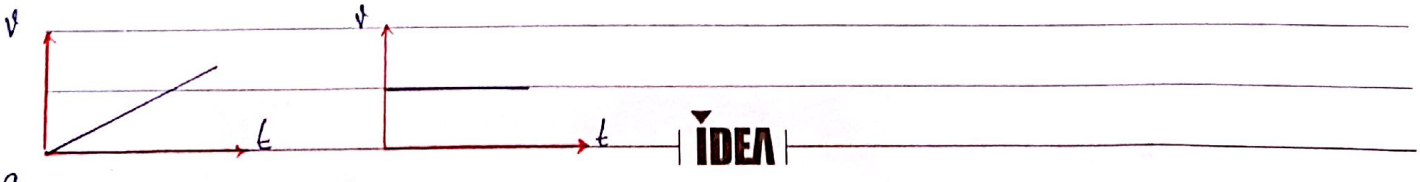
سرعت متوسط: $\vec{V} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \rightarrow \vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow \int_0^t dt = \int_{x_0}^{x} dx$

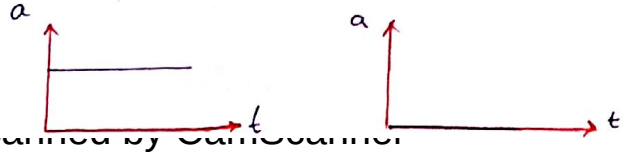
$\vec{r} = xi + yj$

$\vec{r} = xi$ ← حرکت یک بعدی

حرکت با سرعت ثابت: $x - x_0 = Vt$







IDEA

Scanned by CamScanner

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$ تعریف شتاب لحظه‌ای

$x - x_0 = vt$ حرکت یکنواخت

$a = \frac{dv}{dt} \longrightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \longrightarrow \boxed{v - v_0 = at}$ شتاب ثابت

$x - x_0 = \int_0^t v\,dt \longrightarrow x - x_0 = \int_0^x (v_0 + at)\,dt = v_0 t + a\frac{t^2}{2}$ $\boxed{x - x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$

قطار در لحظه‌ای به صورت سربالایی شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت $0.2\ m/s^2$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. پس از طی مسافت $9.5\ m$ با سرعت ثابت v به حرکت خود ادامه می‌دهد. از لحظه شروع حرکت تا لحظه‌ای که قطار با سرعت ثابت حرکت می‌کند چقدر طول می‌کشد؟

الف) در چه مدت زمانی پس از شروع حرکت قطار با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد؟

ب) سرعت قطار در آن لحظه چقدر است؟

$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$
$\Delta x = 9.5t$

$\frac{1}{2}at^2 = 9.5t$

$t = \frac{19}{a} = \frac{2(9.5)}{2.2} = 8.64(s)$

الف) $\Delta x = 9.5 \times 8.64 = 82m$

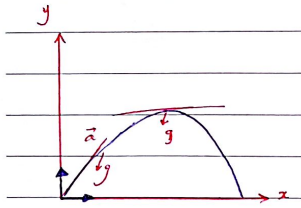
ب) $v = at + v_0$

$v = at$

$v = 2.2 \times 8.64 = 19m/s$

Scanned by CamScanner

حرکت در دو بعد



$\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}$ $\quad \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

$x = V_0 \cos\theta t +$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2}gt^2 + V_{0x}t + x_0 \rightarrow x = V_{0x}t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t + y_0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 x + y_0 \end{cases}$

$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$

$\begin{cases} V_x = V_0 \cos\theta \\ V_y = -gt + V_{0y} = -gt + V_0 \sin\theta \end{cases}$

$V^2 - (V_0 \sin\theta)^2 = -2gy$

معادله مسیر پرتابی: $y = -\frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\theta} + x\tan\theta$

برد پرتابه: $R = x_{max} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta}{g}$

نکته: بیشترین برد در زمانی است که حساب با زاویه ۴۵° پرتاب می‌شود.

مثال: پرتابه‌ای با سرعت اولیه V_0 و در ارتفاع ۱۷۵cm از سطح زمین و با زاویه ۳۷° نسبت به محور عمودی پرتاب می‌شود. پرتابه ۰٫۵s پس از پرتاب به زمین برخورد می‌کند. الف) سرعت اولیه پرتابه؟ ب) پرتابه به چه فاصله افقی به زمین برخورد می‌کند؟

$\sin 37 = 0.6$

$\cos 37 = 0.8$

$y_0 = 175$

$\theta = 37$

ج) مولفه‌های افقی و عمودی سرعت پرتابه را در لحظه‌ی برخورد با زمین بدست آورید.

الف) $y = \frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin\theta t + y_0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 25 + V_0 \sin(37) \times 5 + 175$

$\Rightarrow V_0 = 20\frac{m}{s}$

ب) $R = \frac{(20)^2 (\sin 74)}{10}$

ج) $V_x = V_0 \cos\theta = 20 \times \frac{4}{5} = 16\frac{m}{s}$

$V_y = -gt + V_0 \sin\theta = -10 \times 5 + 20 \times \sin 37 = -12\frac{m}{s}$

مثال: پرتابه‌ای ۲s پس از پرتاب از زمین ۴۰m افقی و ۱۵m عمودی جابجا می‌شود: الف) مولفه‌ی افقی سرعت اولیه پرتابه چقدر است؟

ب) مولفه‌ی عمودی سرعت اولیه پرتابه چقدر است؟ ج) در لحظه‌ای که پرتابه به نقطه‌ی اوج خود می‌رسد چه مقدار جابجایی افقی داشته است؟

IDEA

Scanned by CamScanner

$\Delta x = V_{0x} t \rightarrow 40 = V_{0x} \times 2 \rightarrow V_{0x} = 20\ m/s$

$\Delta y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0y} t \rightarrow -40 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 + V_{0y} \times 2 \rightarrow V_{0y} = 24\ m/s$

$\Delta x = \frac{1}{2} t' \rightarrow \Delta x = 3.7 \times 34 = 78\ cm$

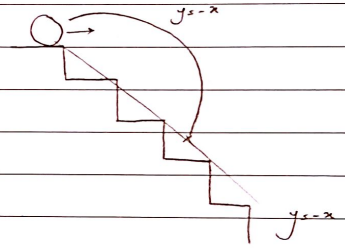
$0 = -gt' + V_{0y} \rightarrow 0 = -10t' + 34 \rightarrow t' = 3.7\ s$

زمان اوج

مثال: توپی با سرعت افقی $2\sqrt{3}\ m/s$ از روی پله‌ای پایین می‌آید. اگر طول و عرض هر پله $30\ cm$ باشد توپ اولین بار روی کدام پله فرود می‌آید؟

$y = \frac{-gx^2}{2V_0^2 \cos^2\theta} + x \tan\theta \Rightarrow y = \frac{-10x^2}{2(2\sqrt{3})^2} = -1.12x^2$

$y = x \rightarrow -x = -1.12x^2 \rightarrow x = \frac{1}{1.12} = 0.89\ m$



مثال: یک طیاره‌ی بمب‌افگن که ارتفاع آن از سطح آب $490\ m$ است بر روی دایره‌ای می‌افتد. دایره با سرعت ثابت حرکت می‌کند و در هنگام سقوط طیاره $120\ m$ با آن فاصله دارد. سرعت دایره چقدر است؟

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_0 t^0 \Rightarrow -490 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \rightarrow 490 = 5t^2 \rightarrow t^2 = 98 \rightarrow t = 9.9\ s$

$x = V_0 t + x_0 \rightarrow V_0 = \frac{x}{t} = \frac{40}{9.9} = 4\ m/s$ سرعت دایره

Scanned by CamScanner

Scanned by CamScanner

* قوانین نیوتن:

* قانون اول نیوتن: اگر برجسم نیرو وارد نشود ی توان دستگاه مختصات بانی به جسم آن نشست گیرد. (معنوی دستگاه لخت)

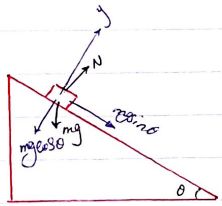
* قانون دوم نیوتن: نیرو با جرم جسم نسبت مستقیم و با شتاب جسم نیز نسبت مستقیم دارد.

* قانون سوم نیوتن: هر عمل را عکس العمل است، برابر و در خلاف جهت آن.

مراحل حل مسائل:

۱) رسم دیاگرام آزاد نیرو

۲) انتخاب دستگاه مختصات مناسب



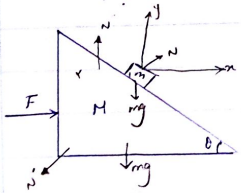
۳) استفاده از قانون دوم نیوتن در راستاهای مختلف

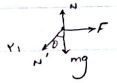
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} mg\sin\theta = ma_x \\ N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \end{cases}$$

۴) حل دستگاه معادلات چند مجهولی

$a = g\sin\theta$

مثال: بر سطح شیبداری با زاویه شیب θ درجه و جرم M به جرم m نیروی آن قرارداد نیروی F را وارد می کنیم F چقدر باشد تا دو جسم M و m نسبت به هم ساکن بمانند؟





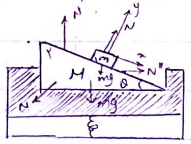
$$1: x \begin{cases} N\sin\theta = ma \\ y \end{cases} \quad N\cos\theta - mg = 0 \rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$mg\tan\theta = a$$

$$2: x \begin{cases} F - N\sin\theta = Ma \\ y \end{cases} \quad N' - N\cos\theta - mg = 0$$

$$F = mg\tan\theta + Mg\tan\theta = g\tan\theta(M+m)$$

مثال: جسمی به جرم m روی سطح شیبداری به جرم M و زاویه θ است را روی ترازوی فنری قرار می‌دهیم، ترازو چه نیروی را نشان می‌دهد؟



* ترازو نیروی عمود بر سطح را نشان می‌دهد.



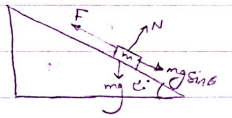
$$\text{۱: } \begin{cases} x: mg\sin\theta = ma \\ y: N = mg\cos\theta \end{cases} \qquad \text{۲: } \begin{cases} x: N'' - N\sin\theta = 0 \\ y: N' - Mg - N\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{N' = Mg + mg\cos\theta}$$

مثال: جسمی با سرعت اولیه $v_0 = 5\ m/s$ بر روی سطح شیبداری با زاویه‌ی شیب $\theta = 30°$ به بالا پرتاب می‌شود (از اصطکاک صرف نظر شود)

الف) جسم تا چه مسافتی بر روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ ب) چقدر زمان طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟

ج) سرعت آن هنگام بازگشت به نقطه‌ی پرتاب چقدر است؟



ب) $v = at + v_0 \Rightarrow 0 = -5t + 5 \Rightarrow t = 1\ s$

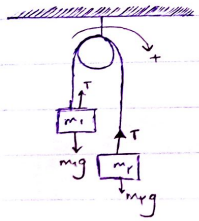
الف) $a = g\sin\theta = 10 \times \sin 30° = -5\ m/s^2$

$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 = \frac{1}{2}(-5)(1)^2 + 5(1) = 2.5\ m$

ج) $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 2.5 = \frac{1}{2}(-5)t^2 + 0 \Rightarrow t = 1\ s$

$v = at + v_0 = (-5)(1) + 5 = 0 \longrightarrow v = 5\ m/s$

مثال: شتاب ماشین آتوود زیر را حساب کنید (از جرم و اصطکاک نخ و قرقره صرف نظر شود).



$$\text{۱: } T - m_1 g = m_1 a$$

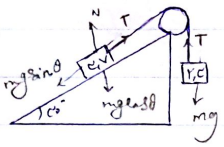
$$\text{۲: } m_2 g - T = m_2 a$$

$$m_2 g - m_1 g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}$$

Scanned by CamScanner

مثال: الف) نیروی کشش تکرو جسم را بدست آورید.
ب) جهت شتاب وزنه ویران را تعیین کنید.
ج) کشش طناب را حساب کنید.



۱: $\begin{cases} T - m_1 g \sin\theta = m_1 a \\ m_1 g \cos\theta - N = 0 \end{cases}$

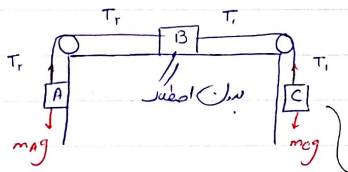
۲: $m_2 g - T = m_2 a$

$$m_2 g - T + T - m_1 g \sin\theta = (m_2 + m_1) a \longrightarrow a = \frac{g(m_2 - m_1 \sin\theta)}{m_2 + m_1} = \frac{9{,}8(2{,}2 - 1{,}7(\frac{1}{2}))}{2{,}2 + 1{,}7} = \frac{7{,}35}{3.9} \ m/s^2$$

ج) $m_1 g - m_1 a = T \longrightarrow T = m_1(g - a) \longrightarrow T = 2{,}2(9{,}8 - 0{,}25) = 20{,}8$

مثال: جسم از حالت سکون رهای شده نیروی کشش طناب را در لحظه ای که جسم C به سطح افقی برخورد می کند بدست آورید.

$m_C = 4kg$, $m_B = 1kg$, $m_A = 1kg$



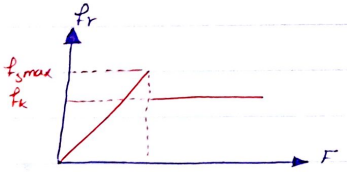
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$m_C g - m_A g = (m_A + m_B + m_C) a$$

$$a = \frac{(m_C - m_A) g}{(m_A + m_B + m_C)} = \frac{20}{8} = 2.5 \ m/s^2$$

$$m_C g - T_1 = m_C a \longrightarrow T_1 = m_C(g - a) = 4(10 - 2.5) = 18N$$

نکته: همواره نیروی اصطکاک جنبشی در خلاف جهت حرکت می باشد.



$f_s \leq \mu_s N$

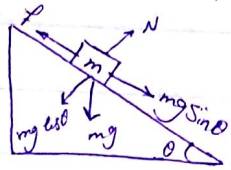
$f_{s\,max} = \mu_s N$

$f_k = \mu_k N$

$\mu_s > \mu_k$

Scanned by CamScanner

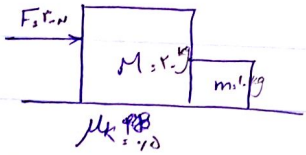
مثال: جسمی به جرم m بر روی سطح شیب‌داری با زاویه شیب θ و ضریب اصطکاک μ_k شروع به حرکت به سمت پایین می‌کند. شتاب جسم را بدست آورید.

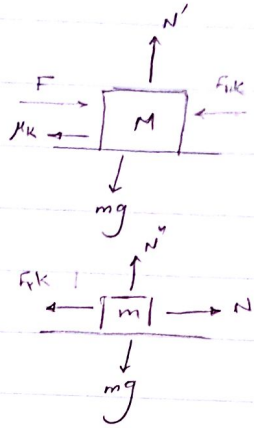


$$\begin{cases} y: N - mg\cos\theta = 0 \\ x: mg\sin\theta - f_k = ma \end{cases} \rightarrow mg\sin\theta - \mu_k(mg\cos\theta) = ma$$

$$\rightarrow a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

مثال: جرم M چه بزرگی باید جرم m داشته باشد تا ...؟





$$M: \begin{cases} y: mg - N' = 0 \Rightarrow Mg = N' \\ x: F - (N + f_k) = Ma \end{cases}$$

$$F - (ma + f_{rk} + f_{ik}) = Ma \rightarrow F - f_{rk} - f_{ik} = a(M+m) \Rightarrow a = \frac{F - f_{ik} - f_{rk}}{M+m}$$

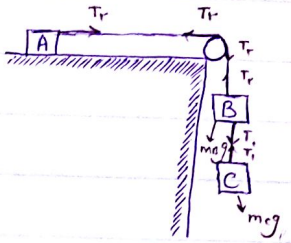
$$m: \begin{cases} y: mg - N'' = 0 \Rightarrow mg = N'' \\ x: N' - f_{rk} = ma \Rightarrow N = ma + f_{rk} \end{cases}$$

$$f_{ik} = 20 \times 10 \times \frac{5}{10} = 100$$

$$f_{rk} = 10 \times \frac{5}{10} = 50$$

$$N = m\cdot\frac{F - f_{ik} - f_{rk}}{M+m} + f_{rk} = 10\,\frac{300 - 50}{20} = 50 = 0.1a \Rightarrow a = 500\ m/s^2$$

مثال: با صرف نظر از اصطکاک قرقره و سطح و با فرض $m_A = 30\,kg$ ، $m_B = 40\,kg$ ، $m_C = 10\,kg$ اندازه بیشترین شتابی که می‌توان به جسم A داد بدون آنکه B و C جدا شوند چقدر است؟ (بر حسب m/s^2)



$$m_C g + m_B g = (m_A + m_B + m_C)\,a$$

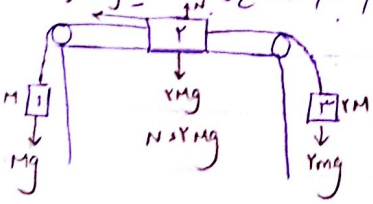
$$10\times10 + 40\times10 = (30+40+10)\,a \Rightarrow a = 4.143\ m/s^2$$

$$m_C g - T_1 = m_C a \rightarrow m_C g - m_C a = T_1$$

$$10\times10 - 10\times4.143 = T_1 \rightarrow T_1 = 241.8\ N$$

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t \rightarrow \Delta x = \tfrac{1}{2}\times4.143\times\left(\tfrac{75}{100}\right)^2 = 0.194\ m$$

مثال: جرم‌های $m_1 = M$ ، $m_2 = m_C = 2M$ و شتاب $a = 0.5\ m/s^2$ ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم 2 و سطح را بدست آورید. $2M = 2\,kg$



$$\Sigma F = \Sigma ma$$

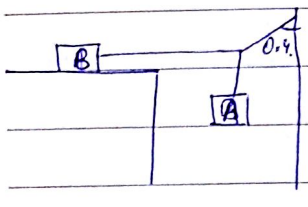
$$2Mg - Mg = 2\mu_k Mg = 3Ma$$

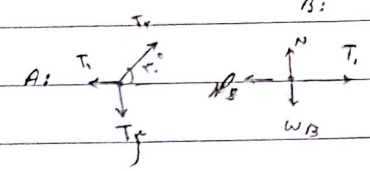
$$T - 2\mu_k g = 3a \rightarrow -3a + g = 2\mu_k g$$

$$\mu_k = \frac{T - 3a}{2g} = 0.37$$

Scanned by CamScanner

مثال: وزن جسم B برابر ۱۱۷ نیوتن و $\mu_s = 0.15$ می باشد بیشترین وزن A چقدر باشد تا سیستم در حال تعادل بماند.





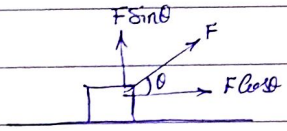
$$B: \begin{cases} x: T_1 - f_s = 0 \rightarrow f_s = W_A \cot\theta \\ y: N - W_B = 0 \end{cases}$$

$$W_A = f_s \tan\theta = \mu_s N \tan\theta$$

$$= \mu_s W_B \tan\theta = 0.15 \times 117 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 10 \text{ N}$$

$$A: \begin{cases} T_2 \sin\theta = T_1 \rightarrow T_1 = W_A \cot\theta \\ T_2 \sin\theta = T_3 = W_A \rightarrow T_2 = \dfrac{W_A}{\sin\theta} \end{cases}$$

نکته: هر کار که نیرو در راستای جابجایی عمود باشد کار آن نیرو صفر است.



$$W = \vec{F}\cdot\vec{r} = Fr\cos\theta$$

$$W_t = \sum_i W_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{i} + F_z\hat{k} \qquad \text{توان لحظه‌ای} \quad P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$F = -kx \rightarrow W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$ / نیروی کشسانی فنر

$F = rt + qt^2$

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

$$W = \int_{x_0}^{x} -kx\,dx = -k\int x\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$ / انرژی پتانسیل فنر

$\vec{F} = m\vec{g}(-\hat{j})$

$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$

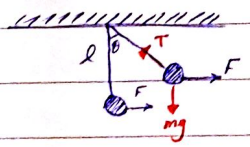
$$W = \int F\cdot dr = \int mg(-\hat{j})\cdot dx(\hat{i}) + \int_{y_i}^{y_f} mg(-\hat{j})\cdot dy(\hat{j})$$

$$+ \int mg(-\hat{j})\,dz\hat{k} = -mg(y_f - y_i) = -mgh$$

مثال: نیروی $\vec{F} = 2x\hat{i} + 3\hat{j}$ بر حسب N از نقطه P_0 به $\vec{r}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ جابجا می‌شود. $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ جابجایی برایند را بیابید.

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy = \int_{1}^{-2} 2x\,dx + \int_{3}^{-1} 3\,dy = \frac{2x^2}{2}\Big|_{1}^{-2} - 3x\Big|_{3}^{-1} = 4 - 1 - 9 + 3 = -3\,\text{J}$$

مثال: نوسان‌ساز ساده‌ای با نیروی افقی F جهت کشیدن طناب نیروهای وارد بر جرم m را بدست آورید به ازای یعنی در هر زاویه‌ای در حال تعادل هستند.



$$W_T = W_{mg} + W_T + W_F$$

Scanned by CamScanner

$W_T = \Delta K$

قضیه کار و انرژی جنبشی:

$$W_T = \int F dx = \int ma\, dx = \int m \frac{dv}{dt} dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv = m\frac{v^2}{2}\Big|_{v_i}^{v_f} = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) = k_f - k_i = \Delta K$$

مثال: نیروی $F = 3t^2 - 4t + 2$ (بر حسب نیوتون) به جسمی به جرم 2 کیلوگرم که در $t=0$ از مبدأ با سرعت $v_0 = -4$ m/s در حرکت است وارد می‌شود. کار این نیرو در فاصله زمانی $t=0$ تا $t=3$ ثانیه چقدر است؟

$$x = t^3 - 2t^2 + 4t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 4t + 4 \qquad v_1 = 4 \text{ m/s} \quad v_2 = 19 \text{ m/s}$$

$$W_T = \Delta K = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 2 (19^2 - 4^2) = 345 \text{ J}$$

مثال: بر ذره‌ای به جرم 2 کیلوگرم که در مبدأ مختصات ساکن است نیروی ثابت $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (بر حسب نیوتون) به مدت 3 ثانیه اثر می‌کند. تغییرات انرژی جنبشی ذره در این مدت چقدر است؟

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{3\vec{i} + 4\vec{j}}{2} = 1.5\vec{i} + 2\vec{j} \qquad \vec{v} = \vec{a}t = 4.5\vec{i} + 6\vec{j}$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (4.5^2 + 6^2) = 56.25 \text{ J}$$

مثال: بر ذره‌ای به جرم 2 کیلوگرم که در مبدأ مختصات ساکن است نیروی ثابت $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ (بر حسب نیوتون) به مدت 3 ثانیه اثر می‌کند. تغییرات انرژی جنبشی ذره در این مدت چقدر است؟

الف) $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ و $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ بر حسب نیوتون. زاویه‌ی بین این دو بردار چقدر است؟

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{25}{15 \times 5.83}\right) = 42.3^\circ \qquad \vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

ب) $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ و $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ بر حسب نیوتون. زاویه‌ی بین این دو بردار چقدر است؟

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-25}{15 \times 7.07}\right) = 118^\circ \qquad |r| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (-5)^2} = 7.07 \text{ m}$$

$F = 15$ N

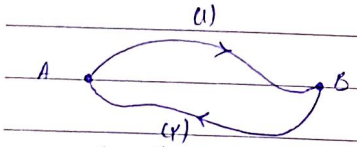
$$\Delta K = F|r|\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{\Delta K}{F|r|} \rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\Delta K}{F|r|}\right)$$

نیروی پایستار:

۱) نیرو بر ذره‌ای که در مسیر حرکت، بسته است

۲) نیرو بر ذره‌ای که در مسیر بسته صفر است

۳) نیرو بر ذره‌ای که ... ندارد



$$W_1 = \int_A^B \vec{F}.\vec{dr} \qquad W_1 = W_2$$

$$W_2 = \int_B^A \vec{F}.\vec{dr}$$

- $W_T = \Delta U = U_f - U_i$ فقط برای نیروهای پایستار

$W_T = \Delta K$ همواره

$-\Delta K = \Delta U \rightarrow \Delta U + \Delta K = 0 \rightarrow U + K = C$ ثابت $\rightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$

$\Delta U = -\int F.dr = \frac{1}{2} kx^2 \rightarrow F = -kx \qquad -F dr = dU \rightarrow F = -\frac{dU}{dr}$

ΔU وزن $= mg(y_2 - y_1) = mgh$

IDEA

Scanned by CamScanner

قسط و انرژی: $W_f = \Delta K$

نیروی پایستار: $W_f = -\Delta U$

انرژی پتانسیل: $U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \xrightarrow{1D} U = -\int F dx$ ، $F = -\frac{dU}{dx}$

$F = mg \longrightarrow U = mgh$

$F = -kx \longrightarrow U = \frac{1}{2}kx^2$

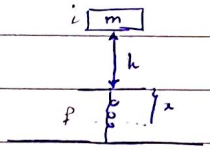
$F = 3x^2 - \cos x \longrightarrow U = 4x^3 + \dots$

$\Delta E_{max} = \Delta K + \Delta U = 0$

$K_f - K_i + U_f - U_i = 0 \longrightarrow K_i + U_i = K_f + U_f$

تبدیل پایستگی انرژی مکانیکی

مثال: جسمی به جرم $2kg$ از ارتفاع $8cm$ بروی فنری با ثابت فنری $k = 196$ رهای شود بیشترین طولی که فنر فشرده می‌شود را پیدا کنید.



$\Delta E_{mu} = 0 \longrightarrow \Delta U + \Delta K = 0$

$U_f - U_i + K_f - K_i = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mg(h+x) = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}kx^2 - mgx - mgh = 0$

$K_i = K_f = 0$

$U_i = mg(h+x)$

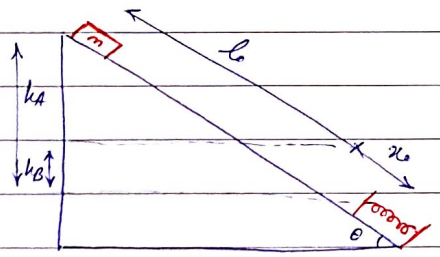
$U_f = \frac{1}{2}kx^2$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2hkmg}}{k} = 0.1\ m$

مثال: جسمی به جرم $12kg$ بروی سطح شیبداری به زاویه شیب 30° از حالت سکون رها می‌شود که در پایین تر فنری وجود دارد که نیروی $270N$ می‌کوانند $2cm$ فشرده شود جسم به اندازه $5.5cm$ فشرده می‌شود. الف: جسم با چه تندی به فنر برخورد می‌کند سرعتش چقدر است؟

ب: نمایید جسم به فنر برخورد می‌کند سرعتش چقدر است؟



الف) $K = \frac{F}{x} = \frac{270N}{0.02m} = 1.35 \times 10^4\ N/m$

$\Delta E_{mu} = 0 \longrightarrow U_i + K_i = U_f + K_f$

$mgh_A = \frac{1}{2}kx_0^2 \longrightarrow h_A = \frac{kx_0^2}{2mg} = 0.14\ m$

$h_A = (l_0 + x_0)\sin\theta \longrightarrow l_0 + x_0 = \frac{h_A}{\sin\theta} = 2h_A$

$l_0 + x_0 = 0.28\ m$

ب) $mgh_A = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_B$

$mg(h_A - h_B) = \frac{1}{2}mv^2$

$2g(h_A - h_B) = v^2 \longrightarrow v = \sqrt{2g(h_A - h_B)} = \sqrt{2 \times 9.8 \times (0.14 - 0.154)} = 1.49\ m/s$

$h_A - h_B = l_0 \times \sin\theta$

$h_A - h_B = 0.28 \times \frac{1}{2} = 0.14\ m$

Scanned by CamScanner

f_{kd}

$\Delta E_{mu} + \Delta E_{th} = 0 \longrightarrow \Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$ با وجود نیروی اصطکاک

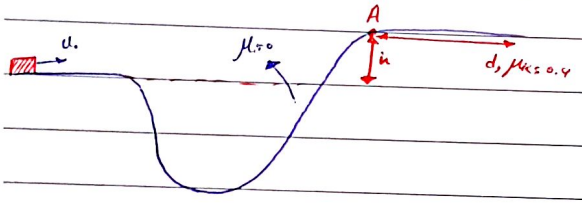
$K_f - K_i + U_f - U_i + f_{kd} = 0$

$W_s f_d = f_{kd} d$

$\Delta E_{mu} + \Delta E_{th} + \Delta E_{int} = 0$ ، انرژی درونی ، اصطکاک

* مثال) جسمی با سرعت اولیه $4 m/s$ روی مسیر شکل داده شده در شکل مرتبه مسیر تا نقطه A روی اصطکاک است

مسیر به ضلعی d از نقطه A توسط نیروی اصطکاک متوقف می‌شود با دانستن $h = 1m$ و $\mu_k = 0.4$ ضلعی d را پیدا کنید.



$\Delta E_{mu} + \Delta E_{th} = 0$

$\Delta K + \Delta U + f_{kd} = 0$

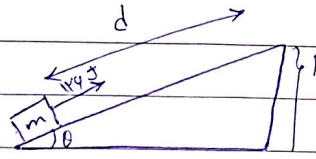
$K_f - K_i + U_f - f_{kd} = 0$

$0 - \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh - 0 + \mu_k mgd = 0$

$mgh - \frac{1}{2} m v_0^2 + mg\mu_k d = 0$

$-g\mu_k d - gh = -\frac{1}{2} v_0^2 \rightarrow d = \frac{\frac{1}{2} v_0^2 - gh}{g\mu_k} = 10^2 m$

مثال، جسمی به جرم $2kg$ و انرژی جنبشی $144J$ روی سطح شیبدار با زاویه شیب $30°$ شروع به بالا رفتن می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح شیبدار $\frac{3}{4}$ است. جسم چقدر بالا می‌رود؟



$\Delta K = W$

$\Delta E_{mu} = 0$

$\Delta E_{mu} + \Delta E_{th} = 0$

$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{th} = 0$

$K_f - K_i + U_f - U_i + f_k d = 0$

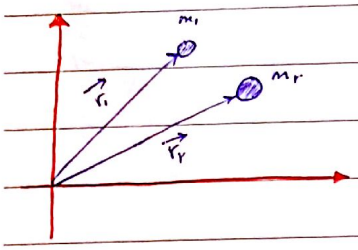
$0 - K_i + mgd\sin\theta - 0 + \mu_k mg\cos\theta d = 0$

$d = \frac{mg\sin\theta + \mu_k mg\cos\theta}{K_i} = 3.1m$

Scanned by CamScanner

مركز كتلة

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}$$



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \quad \vec{v}_{cm} = \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}, \quad \vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2}$$

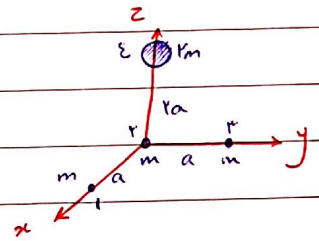
$$\vec{V}_{cm} = \frac{m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$X_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M}$$

$$Y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$Z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

مثال،

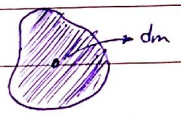


$$X_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{M} = \frac{ma + m\times 0 + m\times 0 + 2m\times 0}{4m} = \frac{a}{4}$$

$$Y_{cm} = \frac{ma}{4m} = \frac{a}{4} \qquad Z = \frac{r_m \times r_a}{4m} = \frac{\varepsilon}{4}a$$

$$\vec{r}_{cm} = \frac{a}{4}\hat{i} + \frac{a}{4}\hat{j} + \frac{\varepsilon}{4}a\hat{k}$$

$$r_{cm} = \frac{\sum m_i r_i}{M}$$



$$r_{cm} = \frac{1}{M}\int_{r_i}^{r_f} r\,dm \rightarrow \begin{cases} X_{cm} = \frac{1}{M}\int x\,dm \\ Y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm \\ Z_{cm} = \frac{1}{M}\int z\,dm \end{cases}$$

جسم خطی $\lambda = \frac{m}{l} \rightarrow dm = \lambda\,dl$

جسم سطحی $\sigma = \frac{m}{s} \rightarrow dm = \sigma\,ds$

جسم $\rho = \frac{m}{V} \rightarrow dm = \rho\,dV$

Scanned by CamScanner

Subject:

مثال: مرکز جرم یک میله‌ی همگن به جرم m و طول l را پیدا کنید.

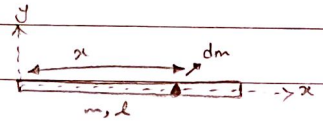
۱) پیدا کردن جزء جرم‌های تقارن شکل داده شده

۲) انتخاب دستگاه مختصات مناسب

۳) نوشتن عنصر دیفرانسیل جرم (dm) بصورت حاصلضرب‌های جزء (حاصلضرب خطی، سطحی یا حجمی)

۴) انتگرال گیری با استفاده از رابطه‌های مرکز جرم روی محدوده‌ی جرم داده شده

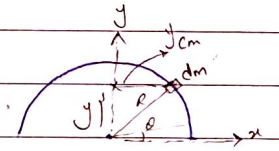
نکته: اگر جسمی دو محور تقارن داشته باشد محل تقاطع آن دو محور تقارن مرکز جرم آن جسم است. اگر جسمی فقط دارای یک محور تقارن باشد مرکز جرم آن جسم حتماً در جایی روی آن محور تقارن قرار دارد.



$$dm = \lambda dl = \lambda dx \quad , \quad \lambda = \frac{m}{l}$$

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int_{x_i}^{x_f} x\,dm = \frac{1}{m}\int_0^l x\,\lambda dx = \frac{1}{m}\int_0^l x\,\frac{m}{l}dx = \frac{1}{l}\int_0^l x\,dx = \frac{1}{l}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^l = \frac{l}{2}$$

مثال: مرکز جرم یک سیم حلقوی همگن به شعاع R و جرم m را پیدا کنید.



$$dm = \lambda dR = \lambda R d\theta = \frac{m}{\pi R} R d\theta$$

$$X_{cm} = 0$$

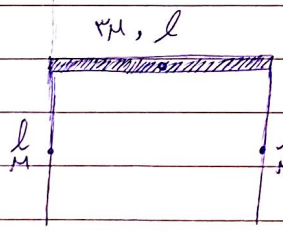
$$Z_{cm} = 0$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{m}\int_0^\pi R\sin\theta\,\frac{m}{\pi R}R\,d\theta$$

$$y = R\sin\theta$$

$$= \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \frac{R}{\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^\pi = \frac{R}{\pi} - \frac{R}{R} = \frac{2R}{\pi}$$

مثال: یک صفحه‌ی نازک همگن به طول l بصورت متقارن قرار گرفته است. فرض کنید جرم صفحه‌ی افقی $3M$ و جرم صفحه‌ی کناری هر کدام M باشد. مختصات x و y مرکز جرم سیستم را بدست آورید.



$$X_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} x_i m_i = \frac{1}{5M}\left(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3\right),$$

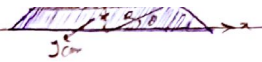
$$X_{cm} = \frac{1}{5M}\left(M\times 0 + 3M\times\frac{l}{2} + M\times l\right) = \frac{1}{5M}\left(\frac{3}{2}Ml + Ml\right)$$

$$= \frac{\frac{5}{2}Ml}{5M} = \frac{l}{2}\,i$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{3} y_i m_i = \frac{1}{5M}\left(-M\frac{l}{2} + 0\times Mx - M\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{5M}(-Ml) = -\frac{1}{5}l\,j$$

IDEA $\vec{r}_{cm} = x_{cm}\,i + y_{cm}\,j + z_{cm}\,k = \frac{l}{2}\,i - \frac{l}{5}\,j$

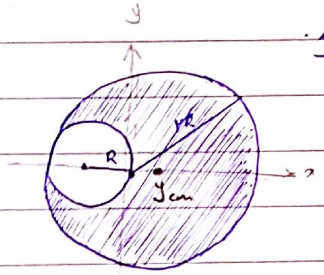
Scanned by CamScanner

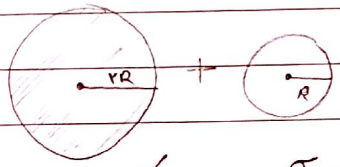


$$\begin{cases} dm = \sigma\, dH = \dfrac{m}{\frac{\pi R^2}{2}}\, dH = \dfrac{m}{\pi R^2}(\pi R\cos\theta)\, dy \\ y = R\sin\theta \longrightarrow dy = R\cos\theta\, d\theta \end{cases}$$

$$y_{cm} = \frac{1}{m}\int R\sin\theta\,\frac{2m}{\pi R^2}(\pi R\cos\theta)R\cos\theta\, d\theta = \frac{2R}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{2R}{\pi}\left(-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2R}{3\pi}$$

مثال: با فرض شعاع دایره توخالی R و شعاع دایره بزرگ $2R$ مرکز جرم قسمت های باقیمانده را بدست آورید.





$$\sigma = \frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}}$$

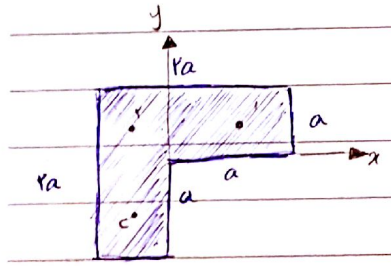
$$r_{cm} = x_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i = \frac{1}{M}(m_1 x_1 + m_2 x_2)$$

$$\sigma = \frac{m_1}{A_1} = \frac{m_1}{\pi(2R)^2} \longrightarrow m_1 = \sigma(4\pi R^2)$$

$$\sigma = \frac{-m_2}{A_2} = \frac{-m_2}{\pi R^2} \longrightarrow m_2 = -\sigma(\pi R^2)$$

$$x_{cm} = \frac{\sigma(4\pi R^2)\times 0 + (-\sigma(\pi R^2))(-R)}{\sigma(4\pi R^2) - \sigma(\pi R^2)} = \frac{\sigma\pi R^2}{\sigma(3\pi R^2)} = \frac{1}{3}R$$

مثال: مرکز جرم شکل روبرو را بدست آورید. ★ پرسش Emt



$$x_{cm} = \frac{\frac{m}{2}(a/2) + \frac{m}{2}(-a/2) + \frac{m}{2}(-a/2)}{m} = \frac{m\,a/2}{3m} = \frac{a}{4}$$

$$y_{cm} = \frac{\frac{m}{2}(a/2) + \frac{m}{2}(a/2) + \frac{m}{2}(a/2)}{m} = \frac{\frac{3ma}{2}}{4m} = \frac{a}{4}$$

m = جرم

Scanned by CamScanner

اندازه حرکت خطی $\vec{p} = m\vec{v} \longrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}$

بقای اندازه حرکت خطی

حرکت خطی

بدنه $\vec{F}_{ext} = 0 \longrightarrow \vec{p} = ثابت \longrightarrow \vec{p}_i = \vec{p}_f$

سیستم‌ها $\begin{cases} \vec{p} = M\vec{v}_{cm} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \end{cases}$

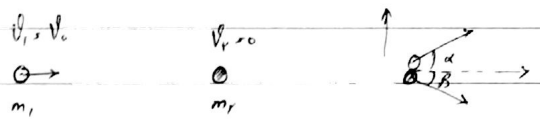
انواع برخورد:

۱) برخورد کشسان: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, $k_i = k_f$

۲) برخورد ناکشسان: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, $k_f < k_i$

۳) برخورد طی ناکشسان: $\vec{p}_i = \vec{p}_f$, $k_f > k_i$

مثال: زاویه‌های بین α و β را بدست آورید.



$x: \; mv_0 + mx_0 = mv_1\cos\alpha + mv_2\cos\beta$ ← بتوان ۲ → $v_0^2 = v_1^2\cos^2\alpha + v_2^2\cos^2\beta + 2v_1v_2\cos\beta\cos\alpha$

$y: \; mx_0 + mx_0 = mv_1\sin\alpha - mv_2\sin\beta$ → $0 = v_1^2\sin^2\alpha + v_2^2\sin^2\beta - 2v_1v_2\sin\alpha\sin\beta$

$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)$

$v_1^2 + v_2^2 = v_1^2 + v_2^2 + \dots$

$2v_1v_2\cos(\alpha+\beta) = 0 \longrightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \longrightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$

مثال: جسمی به جرم M روی میزی با اصطکاک ناچیز قرار دارد. N تیر هم‌اندازه با جرم m با سرعت v_0 به آن برخورد کرده و در آن فرو می‌روند. سرعت جسم پس از برخورد چقدر است؟



$\vec{p}_i = \vec{p}_f$

$Nmv_0 + Mx_0 = (M + Nm)v \longrightarrow v = \frac{Nmv_0}{M + Nm}$

Scanned by CamScanner

Subject:

مدل‌سازی مسائل برخورد و انفجار

مثال: یک جسم ساکن در اثر انفجار به ۳ قسمت تقسیم می‌شود. قطعه‌ی اول با جرم m_1 و سرعت $v_1 = 20\,m/s$ در راستای $\hat{i}$ و با سرعت $v_2 = 30\,m/s$ در راستای $\hat{j}$ حرکت می‌کند. بردار سرعت قطعه‌ی سوم با جرم m_3 را بیابید.

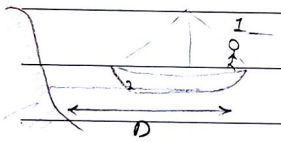
$\vec{P_i} = \vec{P_f}$

$M\vec{V} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} + m_3\vec{V_3}$

$0 = m(-20\hat{i}) + m(-30\hat{j}) + 3m\vec{V}$ $\qquad \vec{V} = \frac{30\hat{i} + 20\hat{j}}{3} = 10\hat{i} + 10\hat{j}$

$|\vec{V}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\ m/s$

مثال: یک مرد ۷۰ کیلوگرمی بیرون یک قایق ۱۸ کیلوگرمی ایستاده است. فاصله‌ی عمودی ساحل $D = 4.1\,m$ است و $2.4\,m$ در داخل قایق به سمت ساحل قدم می‌زند و سپس می‌ایستد. فاصله‌ی او تا ساحل چقدر است؟ (اصطکاک آب و قایق ناچیز)



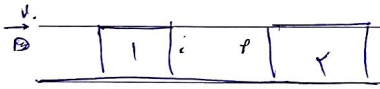
$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = d = 2.4\,m$

$\Delta x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M} \rightarrow m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 = 0 \rightarrow \Delta x_2 = -\frac{m_1\Delta x_1}{m_2}$

$F = 0 \rightarrow a_{cm} = 0 \rightarrow V_{cm} = 0 \rightarrow \Delta x_{cm} = 0 \;/ |\Delta x_1| + \frac{m_1}{m_2}|\Delta x_1| = d \rightarrow |\Delta x_1| = \frac{d}{1 + \frac{m_1}{m_2}}$

$\frac{2.4}{1 + \frac{70}{18}} = 0.69\,m$ $\qquad D - |\Delta x_1| = 4.1 - 0.69 = 3.41\,m$

مثال: یک قایق به طول l و جرم M در حال سکون بر روی یک سطح بدون اصطکاک به سمت افق شناور می‌شود. طول قایق از جرم آب و جرم یک نفر که در ابتدا در حسم اول قایق ایستاده است، صرف‌نظر می‌شود. نفر به حسم دوم قایق می‌رود و با جرم m روی آن متوقف می‌شود. سرعت نهایی در حسم به ترتیب v_1 و v_2 می‌شود. الف) سرعت قایق را نسبت به حسم اول بیابید. ب) سرعت قایق قبل از رسیدن نفر به حسم دوم چقدر است؟



$P_i = P_f$

$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)$

$\frac{10}{100} + 1.5 \times 0 = 10(0.01 + 1.5) \rightarrow v = \frac{10.1}{0.01} = 1010\ m/s$

ب) $P_i = P_f$

$mV_0 + m_1V_1 = mV + m_1V_1$

$v_0 = \frac{mV + m_1V_1}{m} = \frac{0.01 \times 1810 + 1 \times 5}{0.01} = \frac{18.1 + 5}{1 \times 10^{-2}} = 2310\ m/s$

IDEA

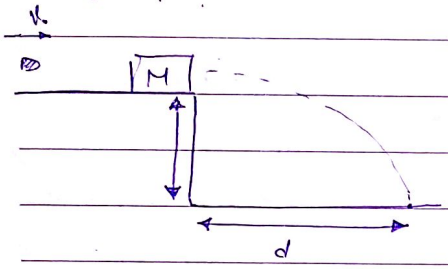
Scanned by CamScanner

خدا دوستون بداشته ره لطف توان شاشن

Subject:

18

* مثال: گلوله‌ای به جرم m به جسمی به جرم M که در حال سکون است با سرعت اولیه V_0 (سرعت گلوله) V_0 حقیر باشد به جسم M برخورد می‌کند.



$P_i = P_f$

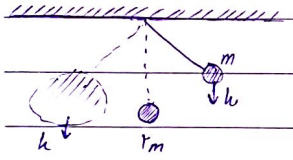
$mV_0 + MV_0 = (m+M)V$

$V_0 = \frac{(m+M)V}{m}$

$h = \frac{1}{2}gt^2 + (V_0 \sin\theta)t \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t^2 = \frac{h}{g/2} = \frac{2h}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$d = (V_0 \cos\theta)t \rightarrow d = Vt \rightarrow V_0 = \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{gd^2}{2h}}$

* تمرین: آونگی به جرم m از ارتفاع h رها شده و در پایین مسیر با گلوله‌ای ساکن به جرم $2m$ برخورد کرده و به هم می‌چسبند. پس از برخورد حداکثر با ارتفاع h بالا می‌رود h را بیابید.



Scanned by CamScanner

$t_r - t_i \quad \Delta t \qquad dt \quad s$

$\star \ 44^\circ = \frac{\pi}{4}$ rad

$x \to \theta$

$v \to \omega$

$a \to \alpha$

$x = r\theta, \ v = r\omega, \ a = r\alpha$

شتاب زاویه‌ای (متوسط): $\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

$\theta = \omega t + \theta_0$

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$

$\omega = \alpha t_0 + \omega_0$

$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$

راستای ω به صفحه حرکت عمود است و جهت آن با قانون دست راست مشخص می‌شود.

راستای α هم، همواره‌ی ω است. تندشونده $\alpha \cdot \omega > 0$

مثال: سرعت زاویه‌ای جسمی از حالت سکون $\omega = 3t^2 + 2t$ پیروی می‌کند در لحظه‌ی $t = 0$، $\theta = 0$ است. θ و α را بیابید.

$\omega = 3t^2 + 2, \ \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 6t \Rightarrow \theta = \int (3t^2 + 2)dt = t^3 + 2t$

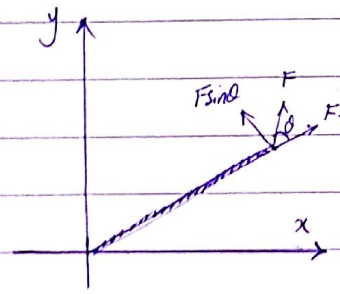
$\omega = \frac{d\theta}{dt} \to d\theta = \omega dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \int \omega dt$

مثال: چرخی پس از 10 ثانیه حرکت با شتاب ثابت $\alpha = -1 \ \frac{rad}{s^2}$ متوقف می‌شود. الف) سرعت زاویه‌ای اولیه ب) بعد از چند دور چرخ متوقف شد؟

(الف) $\omega = \alpha t + \omega_0 \xrightarrow[\alpha = -1]{\text{متوقف شونده}} 0 = (-1)(10) + \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = 10 \ \frac{rad}{s}$

(ب) $\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t \Rightarrow \theta = \frac{1}{2}(-1)(10)^2 + 10 \times 10 \Rightarrow \theta = 50 \ rad$

$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{50}{2\pi} \approx 8$ دور



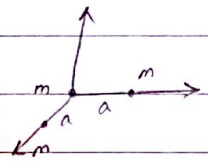
گشتاور نیرو (به تمایل دوران جسم گرفته شود): $\tau = F \sin\theta \cdot r$

r: فاصله عمودی از محور دوران

لختی دورانی: $I = mr^2 = \sum_i m_i r_i^2$

Scanned by CamScanner

مثال: لختی دورانی سیستم ۳ ذره‌ای روبه‌رو را حول هر ۳ محور مختصات می‌یابیم:

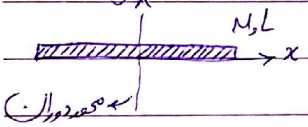


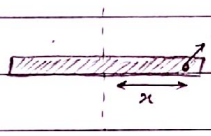
$$\begin{cases} I_x = ma^2 \\ I_y = ma^2 \\ I_z = \sum_{y,x} m_i r_{ij}^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + 0 = 2ma^2 \end{cases}$$

برای جسم پیوسته: $I = \int r^2 dm$

$$dm \begin{cases} \text{خطی} = \lambda dL \\ \text{سطحی} = \sigma dA \\ \text{حجمی} = \rho dV \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{\text{جرم کل}}{\text{طول کل}} \\ \sigma = \frac{\text{جرم کل}}{\text{سطح کل}} \\ \rho = \frac{\text{جرم کل}}{\text{حجم کل}} \end{cases}$$

مثال: لختی دورانی یک میله‌ی همگن به جرم M و طول L را حول محوری که از وسط آن می‌گذرد می‌یابیم:

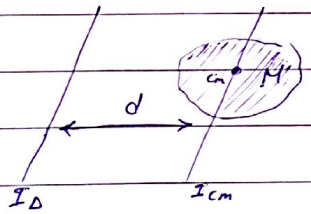




$$dm = \lambda dL = \frac{M}{L} dx \qquad \lambda = \frac{M}{L}$$

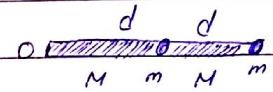
$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

قضیه‌ی محورهای موازی:

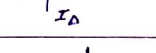


$$I_D = I_{cm} + Md^2$$

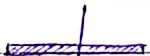
مثال مهم: دو ذره به جرم m به دو سر میله‌ای به جرم M مطابق شکل متصل شده‌اند. طول هر کدام از میله‌ها d و این سیستم حول محور O می‌چرخد. لختی دورانی سیستم حول محور O؟



- رابطه‌ی I برای میله‌ای که I_D باشد: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$



- رابطه‌ی I برای میله‌ای که I_D باشد: $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$



Scanned by CamScanner

* جدول لغتی دورانی یا چرخشی (از کتاب)

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

گشتاور نیرو

$I = mr^2$ لختی دورانی نقطه‌ای

$I = \int r^2 dm$ لختی دورانی پیوسته

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

انرژی جنبشی خطی $K = \frac{1}{2}mv^2$

انرژی جنبشی دورانی $K = \frac{1}{2}I\omega^2$

انرژی جنبشی کل $K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ (خطی + دورانی)

$x \to \theta$

$v \to \omega$

$a \to \alpha$

$F \to \tau$

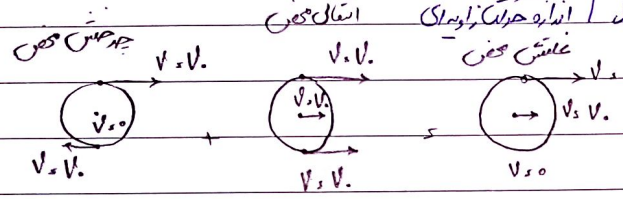
$m \to I$

توان خطی $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

توان زاویه‌ای $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$

اندازه حرکت خطی $p = mv$

اندازه حرکت زاویه‌ای (غلتش محض) $L = I\omega$



شرط غلتش محض ← $x = R\theta$, $v = R\omega$, $a = R\alpha$

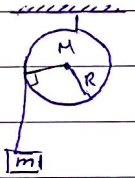
قانون ۲ نیوتن خطی $\vec{F} = m\vec{a}$

قانون ۲ نیوتن دورانی $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

اشکال جرم:

میله ـ استوانه ـ پوسته‌ی استوانه‌ای ـ حلقه ـ دیسک ـ کره ـ پوسته‌ی کروی

مثال: جرم m به قرقره‌ای جرم M و شعاع R متصل است جرم m را با بستن سر ریسمان به غلتش محض وادار می‌کنیم تا بالا برود. جرم m چقدر است؟

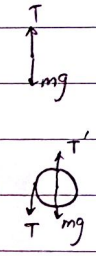


قانون ۲ نیوتن خطی: $mg - T = ma$ (۱) $\to mg - \frac{1}{2}Ma = ma \to a(\frac{1}{2}M + m) = mg \to a = \frac{2mg}{M+2m}$

$Mg + T - T' = 0$ (۲)

قانون ۲ نیوتن دورانی $\tau = I\alpha$

$RT = (\frac{1}{2}MR^2)(a/R) \to T = \frac{1}{2}Ma$



Scanned by CamScanner

مثال: یک چرخ با شتاب زاویه‌ای $3\ rad/s^2$ از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. زمان لازم برای طی ۱۲۰ rad چقدر است؟

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$

مسئله نامعین بازه‌ی زمانی چیست؟

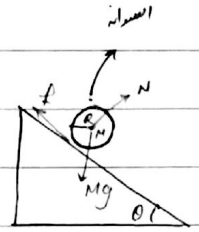
$\theta_2 - \theta_1 = \frac{1}{2}\alpha(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1)(t_2 + t_1)$

$\begin{cases} t_2 - t_1 = 4\ s \\ \theta_2 - \theta_1 = 120\ rad \end{cases}$ $\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 \\ \theta_2 = \frac{1}{2}\alpha t_2^2 \end{cases}$

$120 = \frac{3}{2} \times 4(t_2 + t_1) \rightarrow \begin{cases} t_2 + t_1 = 20 \\ t_2 - t_1 \end{cases} \rightarrow t_1 = 8\ s,\ t_2 = 12\ s$

نکته: جهت نیروی اصطکاک ایستایی همواره مخالف جهت حرکت می‌باشد.

مثال:



$Mg\sin\theta - f = Ma$

$f = \frac{1}{2}Ma = Ma$

$a(\frac{1}{2}M + M) = Mg\sin\theta$

$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$

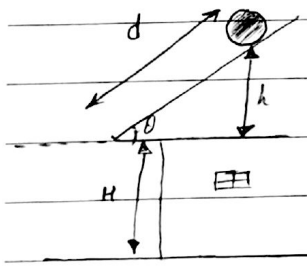
$a = \frac{2}{3}g\sin\theta$ $\quad K_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$\begin{cases} N - Mg\cos\theta = 0 \\ Mg\sin\theta - f = Ma \end{cases}$

$a = g\sin\theta$

مثال: یک استوانه‌ی جامد با شعاع 10cm و جرم 12 کیلوگرم از بروی سطحی شیب‌دار با زاویه‌ی نسبت 30° شروع به غلتیدن می‌کند و به اندازه‌ی $d = 4m$ به پایین می‌آید. الف) سرعت زاویه‌ای استوانه هنگام عبور از لبه‌ی سطح شیب‌دار چقدر است؟

ب) با روش انرژی ارتفاع سطح h و استوانه در حین غلطیدن از لبه‌ی سطح به زمین چقدر است؟



$\Delta E = 0 \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

$mgh = \frac{1}{2}m(R\omega)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2)\omega^2 \rightarrow gh = \frac{1}{2}R^2\omega^2 + \frac{1}{4}R^2\omega^2$ (الف)

$\rightarrow R^2\omega^2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = gh \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4gd\sin\theta}{3R^2}} = 42\ rad/s$

$\begin{cases} x = (V_0\cos\theta)t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 + (V_0\sin\theta)t \end{cases}$ (ب)

$V_0 = (R \times \omega) \rightarrow V_0 = 10 \times 10^{-2} \times 42 = 4.2\ m/s$

$V_{0y} = V_0\sin\theta = 4.2 \times \frac{1}{2} = 2.1\ m/s$

$H = \frac{1}{2}gt^2 + (V_{0y})t \rightarrow \frac{1}{2}gt^2 + V_0 yt - H = 0 \rightarrow t = \frac{-V_{0y} \pm \sqrt{(V_0 y)^2 + 2Hg}}{g} \Rightarrow t = \frac{-2.1 \pm \sqrt{(2.1)^2 + 2 \times 5 \times 10}}{10} = 0.71\ s$

$x = V_0 t \quad x = V_0\cos\theta t = 4.2 \times \sqrt{3} \times 0.71 = 2.5\ m$

IDEA

Scanned by CamScanner