وبسایت اینترنتی جزوه و تمرین

@JozveTamriN

scan me🧐!!

www.wtiau.net

Ref statics and Mechanics of materials → Beer, Johnston, DeWolf, Mazurek

Subject:
Date

physical science → Physical Phenomena

Mechanics
- Rigid bodies (جسم صلب)
  - statics → ثابت → Vicle
  - Dynamics → متحرک
- Deformable bodies (تغییر شکل پذیر)
- fluids (سیالات)

① Ideal (pure) نظر دیدگاه
② practical کاربردی

Mechanics of materials (strength of materials)

- compressible
- Incompressible → Rigid

Mathematics + physics → Engineering sciences
↓ Approximation

برای اینکه موقعیت جسم را تعیین کنیم ← نیاز به ۳ کمیت یا پارامتر مکانی ← ۳ بعد + ۱ پارامتر زمانی

spatial ← مختصات فضایی

Basic concepts / مفاهیم پایه علم مکانیک
① space (مکان)
② time (زمان)
③ Mass (جرم) ← مقدار ماده تشکیل دهنده جسم
④ Force (نیرو) ← اندرکنش بین اجسام ← interaction (تأثیر متقابل یا اثر اجسام بر یکدیگر)

پارامتر مستقل

برای اینکه نیرو را مشخص کنیم ← ۱- جهت ۲- اندازه ۳- نقطه اثر نیاز داریم

نقطه اثر

Si.sotoudeh@gmail.com → اسم، نام خانوادگی، رشته و دوره کی

عنوان ایمیل: موضوع درس مثلاً: استاتیک و مقاومت مصالح

Subject:
Date

سیستم واحدها:

SI:

مقدار	جرم	زمان	نیرو
	kg	s	m
	x	x	x

واحدهای مستقل

واحد فاقد بُعد (driven unit)

$W = mg$ (W: نیرو، m: جرم، g: شتاب گرانش)

$f = ma \rightarrow a = g = 9.81\ m/s^2$

$1\ [N] = 1\ [kg] \times 1\ [m/s^2]$

↳ $[N] = [kg \cdot m/s^2]$ وابسته

$W = 1\ [kg] \times 9.81\ [m/s^2] = 9.81\ [kg \cdot m/s^2] = 9.81\ [N]$

$W = 1\ [kg] \times 9.81 \times 10^{-3}\ [km/s^2] = 9.81 \times 10^{-3}\ [kg \cdot km/s^2]$

$= 9.81 \times 10^{-3}\ k\ [kg \cdot m/s^2] = 9.81 \times 10^{-3}\ [kN]$

N

شتاب	m/s^2	—
زاویه	—	rad
شتاب زاویه‌ای	rad/s^2	—
سرعت زاویه‌ای	rad/s	—
مساحت	m^2	—
چگالی	kg/m^3	—
انرژی	$N \cdot m$	J
نیرو	N	—

$W = F \cdot d$

$[1\ J] = [1\ N] \times [1\ m]$

$[J] = [W \cdot m]$

$\rho = m/V$

$\left[1\ kg/m^3\right] = \left[\frac{1\ kg}{m^3}\right]$

Subject:
Date

واحد

فرکانس	s^{-1}	Hz
ضربه	$N.s$	—
طول	m	—
جرم	kg	—
گشتاور	$N.m$	—
توان	J/s	W
فشار	N/m^2	pa
تنش	N/m^2	pa
زمان	s	—
سرعت	m/s	—

فرکانس: $f = \frac{2\pi}{T} \rightarrow s^{-1}$ ، T برابر $\frac{1}{5}$ است

F — Δt

$M = F.r$

dp $\frac{dv}{dt}$ $\frac{J}{s}$

$P = \frac{F}{A}$ ساختمان طوری طراحی شده که با این دو تا فشار مقاومت کند

* با این دو تا فشار شناخته می‌شود

کمیت ← نرده‌ای ← اندازه

برداری ← جهت و اندازه

تانسوری ← جهت و اندازه و صفحه عمود

فصل دوم: (استاتیک ذرات)

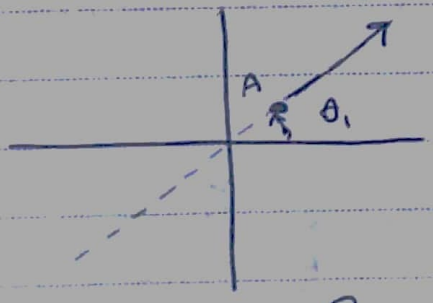
نیرو: وارد بر ذره: نیرو ← اندازه ✓ جهت ✓ نقطه اثر ✓

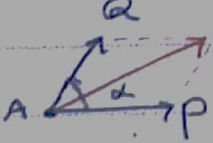
(برآیند نیروها)

$\vec{P}$ ، $\underset{\sim}{P}$ ، P ← بردار

جهت ← خط اثر + جهت ✓

direction → line of action + sense





برآیند نیروها

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

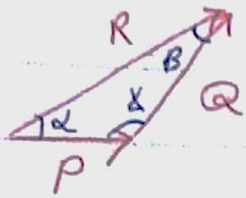


$|\underset{\sim}{R}| = \sqrt{|\underset{\sim}{P}|^2 + |\underset{\sim}{Q}|^2 - 2|\underset{\sim}{P}||\underset{\sim}{Q}|\cos\theta}$ ← منفی

$|\underset{\sim}{R}| = \sqrt{|\underset{\sim}{P}|^2 + |\underset{\sim}{Q}|^2 + 2|\underset{\sim}{P}||\underset{\sim}{Q}|\cos\alpha}$ ← متوازی الاضلاع

P4PCO

Subject:
Date



$$\frac{R}{\sin\gamma} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{P}{\sin\beta}$$

بردار یکه: بردار است به طول واحد

جهت

$\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$

↓ ↓ ↓

x y z

بردار یکه $\underset{\sim}{Q}$

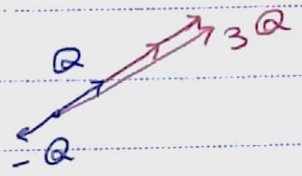
$$\hat{n}_Q = \frac{\underset{\sim}{Q}}{|\underset{\sim}{Q}|}$$

قانون ها:

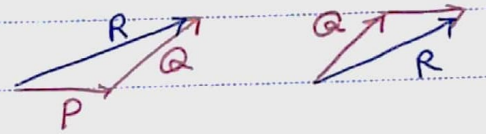
(2) $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{Q}$

$\underset{\sim}{P} + (-\underset{\sim}{Q})$

$-1 \times (-\underset{\sim}{Q})$



(1) $\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{P}$



(3) $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{S} = (\underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}) + \underset{\sim}{S}$

$= \underset{\sim}{P} + (\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{S})$

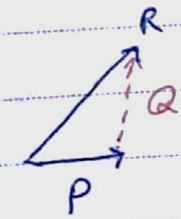
$= (\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{S}) + \underset{\sim}{P}$

$= (\underset{\sim}{Q}) + (\underset{\sim}{S} + \underset{\sim}{P})$

√√√ √√√ ؟؟؟

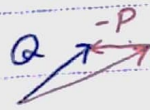
$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

① بردار برایند و یکی از دو بردار غیر صفر معلوم باشد



✓ ✓ ؟

$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

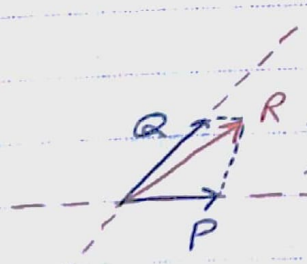
① 

$\underset{\sim}{R} - \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{Q}$

② ″ ″ و خط اثر هر دو بردار غیر صفر معلوم باشند

√ ؟ √√√ مشخص شده توسط

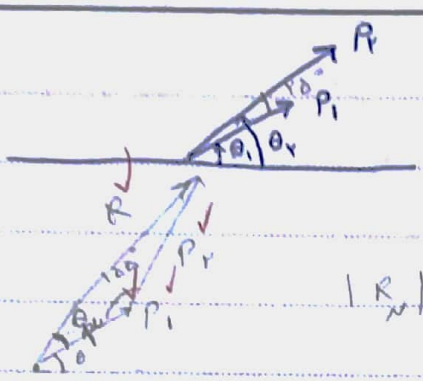
$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q}$

② 

موازات R و تیم نقطه اثر
به خط اثر P و Q برود
مرد بردار P و Q هستند

Subject:
Date

مثال: برایند R را بدست آورید.



$$\begin{cases} P_1 = 40\ N \\ P_2 = 40\ N \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_1 = 20^\circ \\ \theta_2 = 45^\circ \end{cases}$$

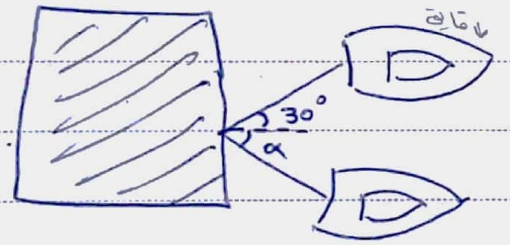
$$|R_N| = \sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2 - 2|P_1||P_2|\cos 125^\circ} = 97.73\ N$$

$$|R| = \sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2 + 2|P_1||P_2|\cos 25^\circ} = 97.73\ N$$

$$\frac{P_2}{\sin\theta_3} = \frac{R}{\sin 50^\circ} \Rightarrow \sin\theta_3 = 0.749$$

$$\theta_3 = \text{Arcsin } 0.749 = 48.6^\circ$$

مثال ۵:

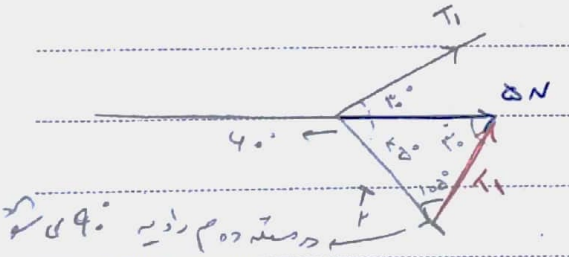


برایند نیروی وارد بر صفحه: 5 kN

افقی

① کشش روی طناب $\alpha = 45^\circ$ باقرض

② محاسبه مقدار α اگر کشش در طناب دوم کمینه باشد



$30 + 45 = 75 \rightarrow 180 - 75 = 105^\circ$

① $$\frac{5}{\sin 105^\circ} = \frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ}$$

$$T_1 = 3.66\ kN$$

$$T_2 = 2.59\ kN$$

② $$\frac{5}{\sin\beta} = \frac{T_1}{\sin\alpha} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow T_2 = \frac{5}{2}\sin(150^\circ - \alpha)$$

$\beta = (180^\circ - \alpha - 30^\circ)$

$\sin 90^\circ \quad 150^\circ - 90^\circ$

$\alpha = 60^\circ$

$\rightarrow T_2 = 2.5$

$T_1 = 5\sqrt{3}/2$

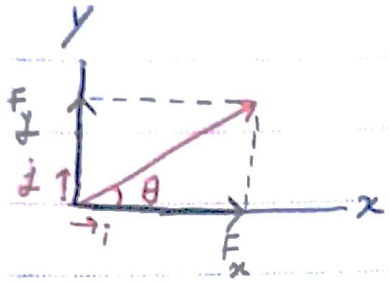
$\frac{dT_2}{d\alpha} = 0$

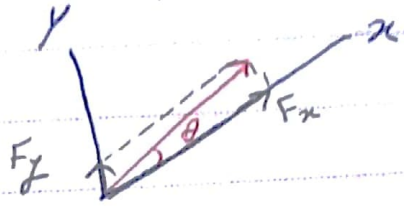
$\frac{5}{\sin 90^\circ} = \frac{T_1}{\sin 60^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ}$

PAPCO

Subject:
Date

مؤلفه‌های عمودی یک بردار (بردار واحد) :





دکارتی (کارتزین)

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

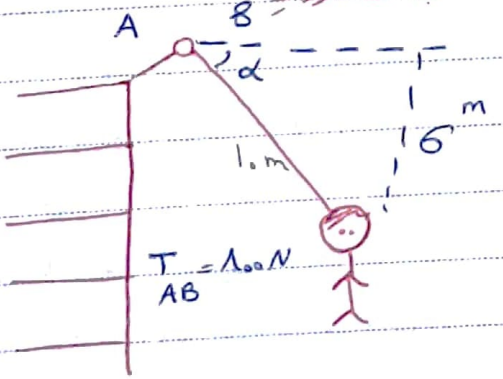
تبدیل جمع بردار به جمع مؤلفه‌ها

$$\begin{cases} F_x = F\cos\theta \\ F_y = F\sin\theta \end{cases}$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

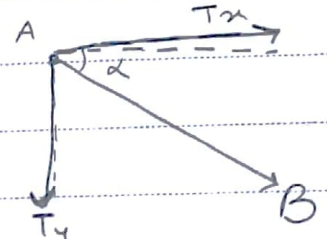
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$ ← فیثاغورس

مثال: مؤلفه‌های افقی و عمودی بردار نیروی $\vec{F}$ در نقطه A بدست آورید.



$$\sin\alpha = \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

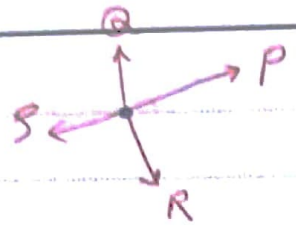


$$T_x = T_{AB}\cos\alpha = 800 \times \frac{4}{5} = 640\ N$$

$$T_y = T_{AB}\sin\alpha = 800 \times \frac{3}{5} = 480\ N$$

$$\vec{T}_{AB} = 640\,\hat{i} - 480\,\hat{j}$$

جمع برداری با استفاده از مؤلفه‌ها



$$\begin{cases} \underset{\sim}{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} \\ \underset{\sim}{S} = S_x\hat{i} + S_y\hat{j} \\ \underset{\sim}{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} \\ \underset{\sim}{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \end{cases} \quad (2)$$

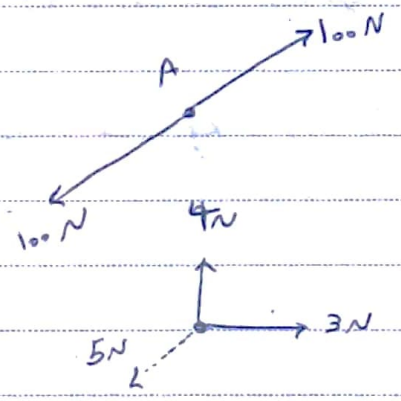
$$\underset{\sim}{F}_R = \underset{\sim}{P} + \underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{R} + \underset{\sim}{S} \quad (1)$$

جمع برداری → جمع مؤلفه‌ها

$$\underset{\sim}{F}_R = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} \quad (3) \xrightarrow[(3)\text{ و }(2)]{\text{با مساوی قرار دادن}} \begin{cases} F_x = P_x + R_x + Q_x + S_x \\ F_y = P_y + R_y + Q_y + S_y \end{cases}$$

تعادل

تعادل زمانی اتفاق می‌افتد که برایند تمام نیروهای وارد بر یک ذره برابر صفر باشد.



تعادل یک ذره:

برداری

$$\sum \underset{\sim}{F}_A = \underset{\sim}{0} \rightarrow \begin{cases} \sum F_{Ax} = 0 \\ \sum F_{Ay} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Eq. in A}$$

اسکالر

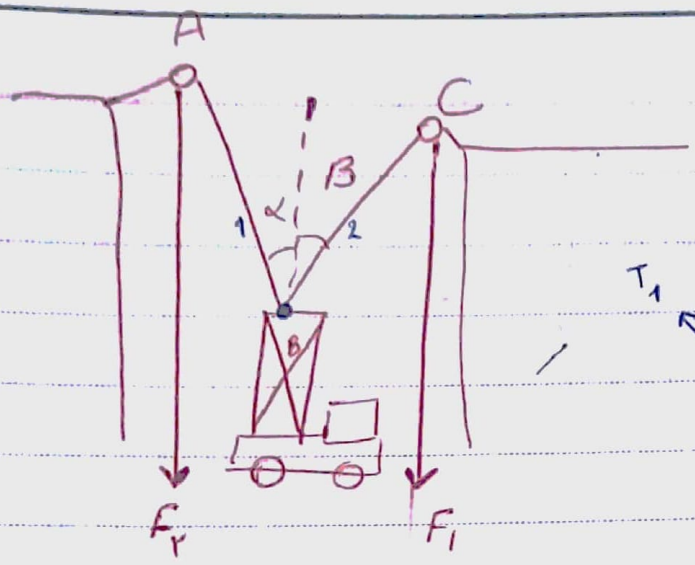
تعادل

$$\sum \underset{\sim}{F}_A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

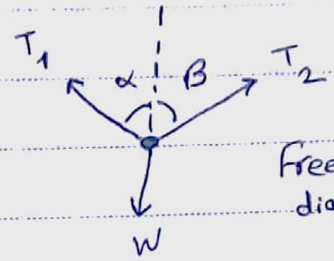
قانون اول نیوتن

اگر برایند نیروهای وارد بر یک ذره برابر با صفر باشد یا به بیان دیگر ذره در حال تعادل باشد، ذره حالت قبلی خود شامل حفظ می‌نماید به بیان دیگر اگر حرکت داشته باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد و اگر ساکن باشد ساکن می‌ماند.

Subject:
Date



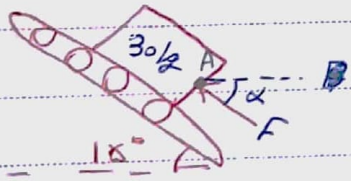
مسائل متعادل ذره ورا حل میکردیم
(بوسیله جسم آزاد)
Free body diagrams
↓
FBD



Free body diagrams

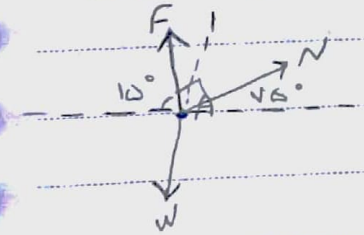
اگر برعکس $T_1 = 5\,k$ $T_2 = 8\,kN$ → T_2 بیشتر از $8\,kN$ باشد

T_{cable} از ... باشد ← ضاب پاره میشود



مثال: اندازه و جهت کمترین نیروی F را محاسبه کنید

بطوریکه جعبه 30kg در شرایط تعادل باقی بماند

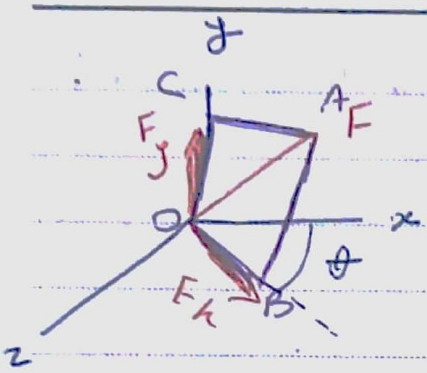


$\sum F = 0$

$\frac{W=mg}{\sin 90} = \frac{F}{\sin 75} = \frac{N}{\sin 15}$ ← زاویه مقابل

$F = 77.1\,N \quad \alpha = 15$

Subject :
Date

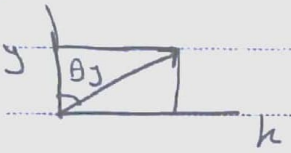


مؤلفه های برداری (کارتزین):

یک نیرو در فضای سه بعدی:

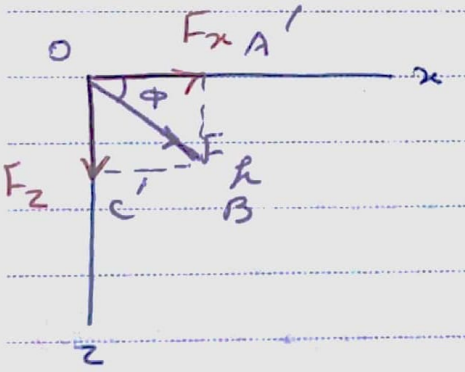
$F_x = F \sin\theta_y$

$F_y = F \cos\theta_y$



F_y = Vertical component
(just in y diretion)

F_h = horizontal component
(componenty both in x and z)



$F_x = F_h \cos\Phi$

$F_z = F_h \sin\Phi$

چگونگی رابطه (2) در رابطه (1)؟

$$\begin{cases} F_x = F\sin\theta_y \cos\Phi \\ F_z = F\sin\theta_y \sin\Phi \\ F_y = F\cos\theta_y \end{cases}$$

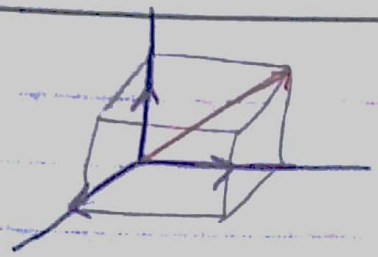
رابطه فیثاغورث

$$\begin{cases} \overline{OB}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{OC'}^2 \\ Fh^2 = F_x^2 + F_z^2 \quad (i,j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 \\ F^2 = F_h^2 + F_y^2 \quad (i,v) \end{cases}$$

PAPCO

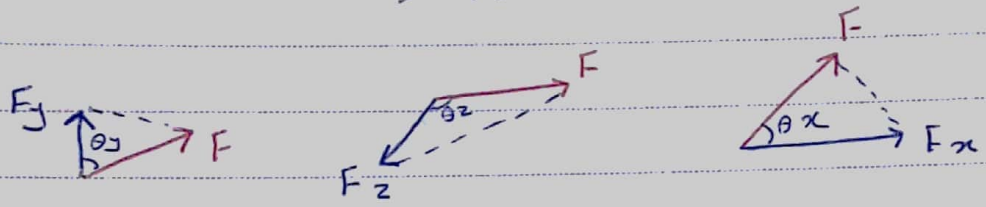
Subject:
Date



برای تشخیص زاویه بردار نیرو در فضای سه بعدی با مرکب از محور های مختصات صفحه ای را شامل بردار نیرو و مرکب از محورهای مختصات در نظر میگیریم

زاویه بین بردار نیرو و محور y : θy زاویه بین بردار نیرو و محور x : θx

زاویه بین بردار نیرو و محور z : θz .



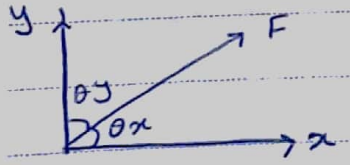
$F_x = F\cos\theta x$

$F_y = F\cos\theta y$ → direction cossionos (۲i)

$F_z = F\cos\theta z$

$$2i \to 2 \Rightarrow F^2\cos^2\theta x + F^2\cos^2\theta y + F^2\cos^2\theta z = F^2$$

رابطه cos ها در فضای سه بعدی : $\cos^2\theta x + \cos^2\theta y + \cos^2\theta z = 1$



$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$
$$= F^2\cos^2\theta x + F^2\cos^2\theta y$$
$$= F^2(\cos^2\theta x + \cos^2\theta y)$$

$$\sin\theta x = \cos\theta y = \frac{F_y}{F}$$

$$\cos^2\theta x + \sin^2\theta x = 1$$

ماده خط در متن بردار یک فضای سه بعدی (طول و زاویه) می توان بردار نیرو F را در فضای سه بعدی

Subject:
Date

به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$F_N = F_x i + F_y j + F_z k$$

با استفاده از رابطه (۷.۱):

$$F_N = F(\cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k) \quad (۷.۱)$$

$$\lambda_n = \cos\theta_x i + \cos\theta_y j + \cos\theta_z k$$

بردار یکه λ در حقیقت بردار یکه است

$$F_N = F\lambda_n \Rightarrow \lambda_n = \frac{F_N}{F} \qquad \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

مثال: نیروی F دارای مولفه‌ی $F_y = 30$ و $F_x = 20$ و $F_z = 60$ باشد اندازه نیروی F و زوایای هادی آن را بیابید.

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = 70\ N$$

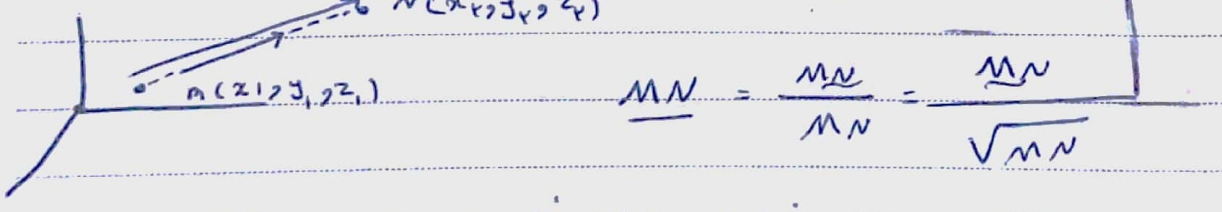
$$\cos\theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{2}{7}$$

$$\cos\theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{3}{7} \xrightarrow{\text{توان دو}} \frac{4}{49} + \frac{9}{49} + \frac{36}{49} = 1$$

$$\cos\theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{6}{7}$$

$$\theta_x = 73.4,\ \theta_y = 115.4 \quad ,\ \theta_z = 31$$

تشکیل بردار نیرو و با فرض طول بزرگ اندازه و نقطه در راستای نیرو:



$$\underline{MN} = \frac{MN}{MN} = \frac{MN}{\sqrt{MN}}$$

$$MN = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

بردار هادی بردار یکه بردار غیال

Subject:
Date

راستای F همان راستای خط (بردار) MN می‌باشد در نتیجه می‌توان بردارهای یکه آن را به راستای در نظر گرفت.

$$\hat{n}F_N = \hat{n}M_N$$

$$\hat{n}F = \frac{F}{F} \Rightarrow F_N = F\hat{n}F$$

$$F_N = F\frac{M_N}{\sqrt{M_N}} \xrightarrow{(Vii)} in$$

$$\cos\theta x = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\quad}} \quad ,\quad \cos\theta y = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{\quad}} \quad ,\quad \cos\theta z = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{\quad}}$$

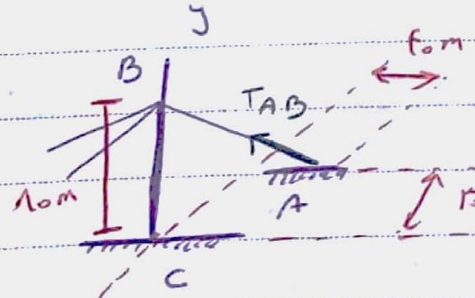
برایند نیروهای هم‌مرکز در فضا:

F_1, F_2, F_3

$$R_N = \sum F_N = F_1 + F_2 + F_3$$

$$R_x i + R_y j + R_z k = (F_{1x} + F_{2x} + F_{3x})i + (F_{1y} + F_{2y} + F_{3y})j + (F_{1z} + F_{2z} + F_{3z})k + \Rightarrow \begin{cases} R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} \end{cases}$$

مثال:



کیبل‌تاور با استفاده از یک گره در نقطه A ثابت شده است نیروی کشش در سیم AB

معلوم است عامل سه مؤلفه F_z و F_y روی گره؟ زوایای حاد θx و θy و θz مربوط به بردار کشش AB؟

Subject:
Date

$N_B (0, 80, 0)$ $\quad AB = (-40, 80, +30)$

$N_A (40, 0, -30)$

$$\hat{n}_{AB} = \frac{(-40, 80, 30)}{94.3}$$

$$\hat{n}_F = \hat{n}_{AB} = \frac{T}{T} \rightarrow T_N = 2500 \frac{-40i + 80j + 30k}{94.3}$$

$$\cos\theta_x = \frac{-40}{94.3} \qquad \cos\theta_y = \frac{80}{94.3} \qquad \cos\theta_z = \frac{30}{94.3}$$

"معادل در $\mathbb{R}^3$ بودن"

① رسم دیاگرام جسم آزاد

② نوشتن معادلات تعادل در فضای سه بعدی

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

فصل ۳: اجسام صلب (سیستم‌های معادل نیروی) ؛ سیستم‌های وارد بر جسم، غالباً برای استاد در اجسام صلب

ساده: جسم صلب و ابعاد و اندازه

جسم صلب: مجموعه‌ای از تعداد زیاد نقطه که اثر نیروهای مختلف

sliding vectors

جسم صلب: بردارهای تبدیل، تجزیه و برآیند

جسم صلب: بردارهای تبدیل، تجزیه و برآیند

طبق تعریف ← couple ← هر سیستم نیروی را می‌توان با یک نیرو و یک معادل couple جایگزین کرد

force - couple sys.

Subject:
Date

نیروی داخلی: نیروی است که ذرات تشکیل دهنده جسم علت را کنار هم قرار میدهند.

نیروی خارجی: نیروی است که از بیرون جسم وارد می‌شود که باعث حرکت جسم یا باقی ماندن آن در سکون می‌شود.

نقشی ندارند

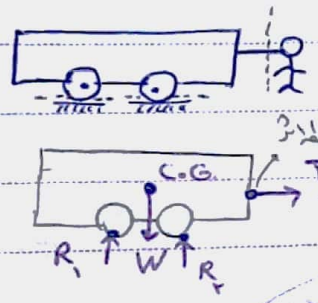
نیروی داخلی ← نگه داشتن ذرات جسم کنار هم ← باعث ایجاد حرکت نمی‌شوند ← در مسائل تعادل صرف نظر می‌کنیم

نیروهای خارجی ← ایجاد حرکت در جسم یا نگه داشتن آن در سکون

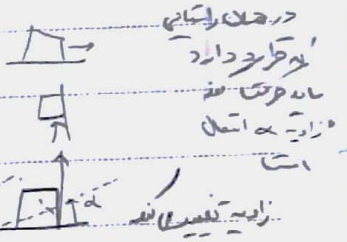
مثال: اصل جداسازی

در راستای ۱ نقطه داریم ← حرکت نداریم

در راستای ۲ نقطه نداریم ← به دلیل T



نیروی خارجی است که ایجاد حرکت می‌کند یا سعی بر ایجاد حرکت آن استان است

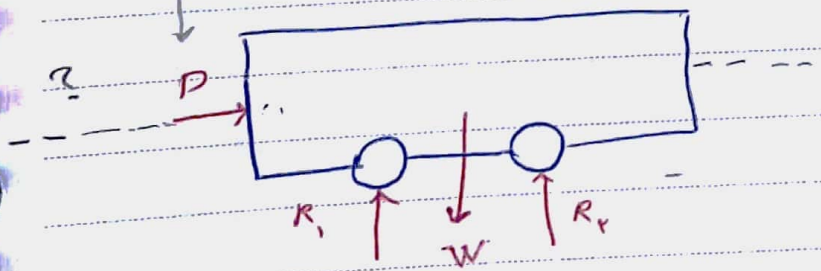


۳ حرکت داریم

① Translation (انتقال)

② Rotation (چرخش)

③ = ① + ② ← حرکت صفحه‌ای جسم



اصل انتقال نیروی (معادل نیروها)

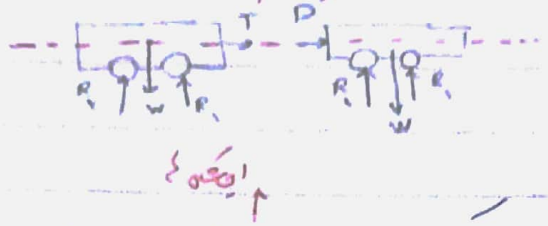
Translation

اگر $P = T$ باشد، این نیرو در دیدار استاتیکی گیرنده حرکت جسم در دو حالت به یک صورت انجام می‌پذیرد.

* نیروی T که در دیدار نقطه مشخص به جسم صلب وارد می‌شود می‌تواند با نیروی P که همان اندازه و هم جهت نیروی T است ولی روی نقطه دیگری اثر می‌کند جایگزین شود به شرطی که این دو نیرو راستای اثر

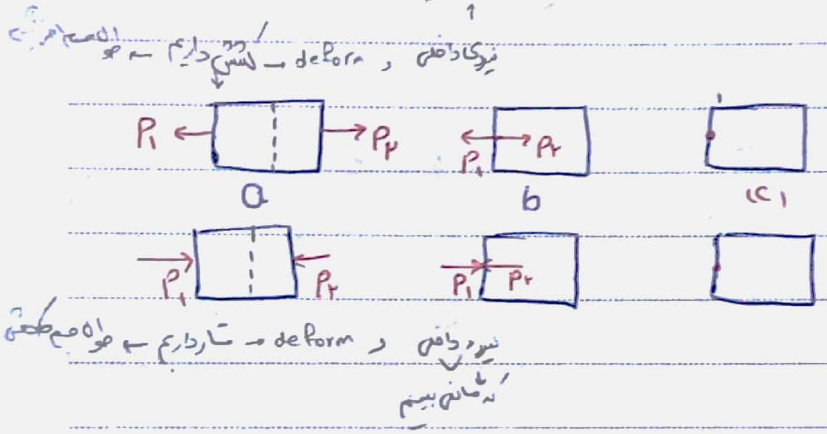
Subject :
Date

equivalent



یکسانی داشته باشند .

برد لغزشی (sliding vector) : برداری است که از اصل انتقال پذیری تبعیت می کند یا توجه به این توضیحات بردار نیرو یک بردار لغزشی است .

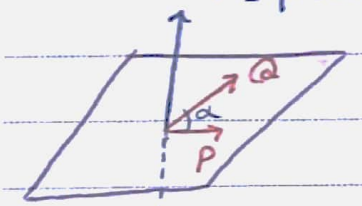


محدودیت استفاده از بردار لغزشی :

انتقال پذیری

محدودیت استفاده از بردار لغزشی در زمانی است که تغییرشکل درونی داخلی برای ما اهمیت داشته باشد .

$V = P \times Q$



① شرایط حرکت جسم

② معادل هم ← Sliding Vectors

$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2$

عرب برداری دو بردار

① اندازه $V = PQ \sin\alpha$

② راستای حاصل : عمود بر صفحه شامل بردارهای P و Q

③ جهت : قانون دست راست ؛ برای تعیین جهت بردار V از قانون دست راست استفاده می کنیم بدین صورت که ۴ انگشت دست را در جهت بردار اول قرار می دهیم به طوری که با طی کردن کوچکترین زاویه بین دو بردار به بردار دوم برسیم در این صورت انگشت شست نشان دهنده جهت بردار اندازه است

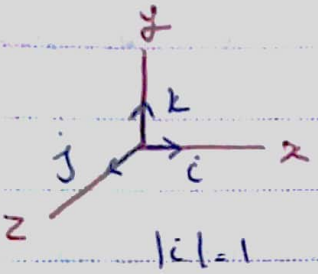
$P \times Q \neq Q \times P$

ضرب خارجی خاصیت تعویض پذیری ندارد .

Subject:
Date

$$\underset{\sim}{P} \times (\underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{S}) \neq (\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q}) \times \underset{\sim}{S}$$

ضرب برداری در قالب ترم هایی از مؤلفه های کارتزین (دکارتی) :

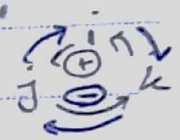


$|i|=1 \quad |j|=1 \quad |k|=1$

$i \times i = \underset{\sim}{0} \qquad i \times j = \hat{k} \qquad i \times k = -\hat{j}$

$j \times i = -\hat{k} \qquad j \times j = \underset{\sim}{0} \qquad j \times k = \hat{i}$

$k \times i = \hat{j} \qquad k \times j = -\hat{i} \qquad k \times k = \underset{\sim}{0}$



ساعت برود + یا ساعت برود −

$$\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q}$$

$$= (P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}) \times (Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j} + Q_z \hat{k})$$

$$- P_x Q_y \hat{k} - P_x Q_z \hat{j} - P_y Q_x \hat{k} + P_y Q_z \hat{i}$$

$$+ P_z Q_x \hat{j} - P_z Q_y \hat{i}$$

$$= (P_y Q_z - P_z Q_y)\hat{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\hat{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x)\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{R} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

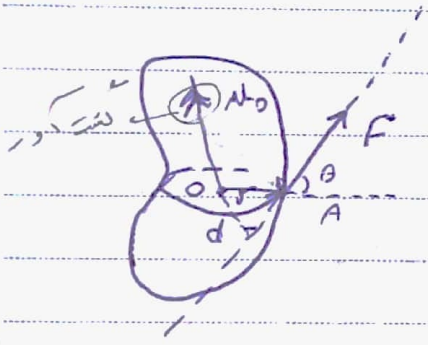
Subject:
Date

$$\underset{\sim}{R} = (-1)^{1+n}\,\hat{i}\begin{vmatrix} P_y & P_z \\ Q_y & Q_z \end{vmatrix} + (-1)^{1+n'}\,\hat{j}\begin{vmatrix} P_x & P_z \\ Q_x & Q_z \end{vmatrix} + (-1)^{1+m'}\,\hat{k}\begin{vmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{vmatrix}$$

$$\underset{\sim}{R} = \sum_{m=1}^{3} (-1)^{1+m}\,\hat{q}_r \begin{vmatrix} P_r & P_s \\ Q_r & Q_s \end{vmatrix}$$

$\hat{q} = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$
$r = x, y, z$
$s = x, y, z$

گشتاور یک نیرو حول یک نقطه:



به نیروی F در صفحه چرخش آن هم حول او می‌چرخاند

$$\underset{\sim}{M}_O = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} \qquad |\underset{\sim}{M}_O| = rF\sin\theta$$

$d = r\sin\theta$ فاصله عمودی نقطه O تا خط اثر نیروی F

$$|\underset{\sim}{M}_O| = Fd$$

$\overrightarrow{OA} = \underset{\sim}{r}$ بردار موقعیت (position Vector)

واحد گشتاور $[N.m]$ است. گشتاور وقتی وابسته به خط اثر نیرو است.

* اندازه گشتاور نقطه به اندازه نیرو و خط اثر آن بستگی دارد و به نقطه اثر وابسته نیست.

* برای یک نیرو F و F_2 معادل هم هستند اگر و تنها اگر اندازه و جهت یکسان داشته باشند و گشتاور یکسانی حول یک نقطه مشخص ایجاد نمایند.

$F_1, F_2, \ldots$ نقاط اثر مشترکی داشته باشند

$\underset{\sim}{r}$: بردار موقعیت نقطه اثر

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{F_2} + \cdots$$

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times (\underset{\sim}{F_1} + \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F_2} + \cdots$$

Varignon's theorm: $\underset{\sim}{M} = r \times (F_1 + F_2 + \cdots) = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F}$

Subject:
Date

مولفه ها و کاربرد گشتاور حول یک نقطه

$$\underset{\sim}{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$$

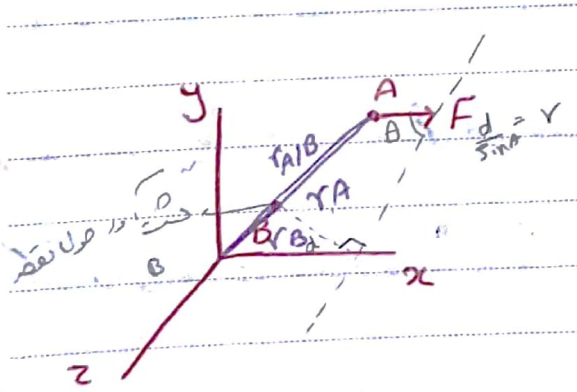
مختصات نقطه اثر نیروی F | x | y | z

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{M} = M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k}$$

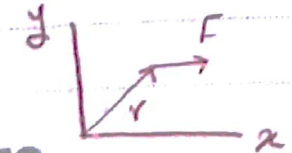
$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = xF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$



$$\underset{A/B}{r} = \underset{\sim}{r}_A - \underset{\sim}{r}_B = (x_A - x_B)\hat{i} + (y_A - y_B)\hat{j} + (z_A - z_B)\hat{k}$$

$$\underset{\sim B}{M} = \underset{\sim A/B}{r} \times \underset{\sim}{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

2D:



$$\underset{\sim}{M_O} = (xF_y - yF_x)\hat{k}$$

$$\underset{\sim}{M_O} = M_z$$

$$|M_O| = xF_y - yF_x$$

Subject:
Date

$$\frac{dF}{d\theta}=0 \rightarrow \frac{(-2/4\cos\theta)(120)}{(2/4\sin\theta)^2}=0 \qquad \theta=90^\circ$$

$\underset{\sim}{M}_B$ گشتاور حول نقطه B است که عمود بر صفحه است

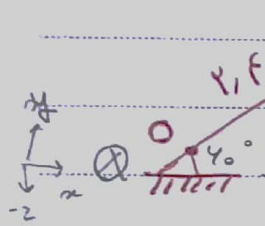
$$\underset{\sim}{M}_B = \{(x_A-x_B)F_y-(y_A-y_B)F_x\}\hat{k}$$

$\underset{\sim}{M}_{B_z}$

d فاصله عمودی بین خط عمل نیرو و نقطه B

* بردار گشتاور بر صفحه شامل بردار موقعیت و بردار نیرو عمود می‌باشد.

مثال: گشتاور نیروی ۱۰۰ نیوتونی حول نقطه O بدست آورید



چون دوبعدی است داریم: $d = 2/4\sin 30 = 1/2\ m$

نیوتن Fd

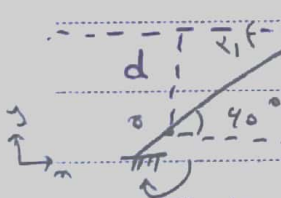
$$M_O = Fd = (100)(1/2) = 120\ N.m$$ (جهت ساعتگرد)

$\underset{\sim}{M}_O = -120\hat{k}\ N.m$ صفحه xz است

قانون دست راست: انگشت در جهت r و بردار به سمت F

قانون دست راست برای تشخیص جهت گشتاور: انگشت دست راست را در جهت نیرو طوری قرار می‌دهیم که نقطه مورد نظر (که در اینجا مثال O است) بسمت کف دستمان قرار گیرد در این حالت انگشت شصت جهت بردار گشتاور را نشان میدهد

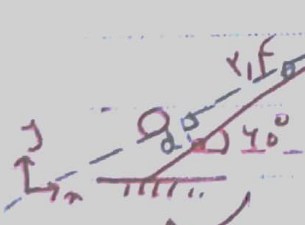
ب) اگر در این مسئله گشتاور ایجاد شده از جهت آن در نقطه O حاضر باشد و بدانیم نیرو به صورت افقی در نقطه A اثر کرده است مقدار نیروی F چقدر بدست آورید؟



$d = 2/4\sin 30 = 1.2\sqrt{3}\ m$ $\quad M_O = Fd$ (N.m)

$120 = F(1.2\sqrt{3}) \Rightarrow F = \frac{100\sqrt{3}}{3}\ (N)$

ج) اگر گشتاور ایجاد شده از قسمت الف در جسم حاضر باشد کوچکترین نیروی ممکن وارد بر نقطه A چقدر محاسبه کنید؟ (خط اثر نیروی F رسم کرده)



برای اینکه نیروی F مینیمم باشد باید $M_{MAX} = 2/4F\sin\theta$ مقدار خود یعنی $\sin\theta$ بیشترین مقدار خود یعنی $\theta = 90^\circ$ بدست آید

$d = 2/4\sin\theta$

$M_O = Fd = 2/4F\sin\theta$

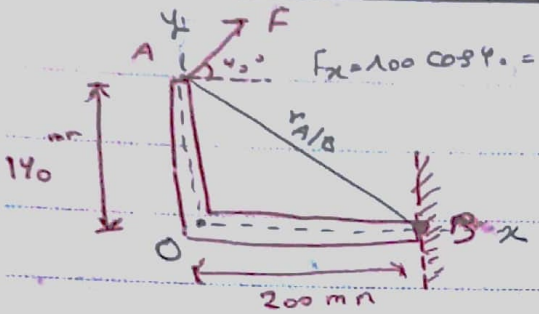
$120 = 2/4F\sin\theta$ $\quad F = \frac{120}{2/4\sin\theta}$ $\quad F = \frac{120}{2/4} = 50\ N$

PAPCO

Subject: $F_y = 800 \sin 30 = 493$ (N)

Date

800(N)



نیروی 800 (N) روی پیچ نیشی به شکل نشان داده شده است. لنگر آن را حول نقطه B بدست آورید.

$$r_A = 140\,\hat{j}\ mm \qquad r_B = 200\,\hat{i}\ m$$

$$r_{A/B} = r_A - r_B = 140\,\hat{j} - 200\,\hat{i}\ mm$$

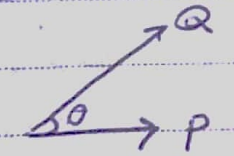
$$F = 700\,\hat{i} + 493\,\hat{j}$$

$$M_B = r_{A/B} \times F = (-200\,i + 140\,j) \times (700\,\hat{i} + 493\,\hat{j})$$

$$= (-200)(493) - (140)(700) = -203 \times 10^3\ N.mm = -203\ N.m$$

بردار ساعت گرد

ضرب داخلی (اسکالر یا عددی) و برداره جهتم



$V = P \cdot Q$ → بردار

اندازه $V = PQ\cos\theta$

① $P \cdot Q = Q \cdot P$ ② $P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2$

$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$	$\hat{j} \cdot \hat{i} = 0$	$\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$
$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$	$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$	$\hat{k} \cdot \hat{j} = 0$
$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$	$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$	$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

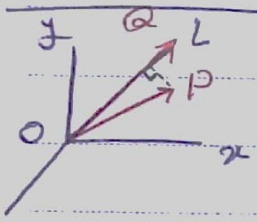
$$P = P_x\,\hat{i} + P_y\,\hat{j} + P_z\,\hat{k}$$
$$Q = Q_x\,\hat{i} + Q_y\,\hat{j} + Q_z\,\hat{k}$$
$$\Rightarrow \boxed{V = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}$$

Subject: $* \underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q} = -\underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{P}$

Date

if $\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{P}$: $\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{P} = PP\cos 0 = P^2$ $\quad P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2$

$* \ \underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{Q} \overset{①}{=} PQ\cos\theta$ $\quad \overset{②}{=} P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$ $\quad \overset{①,②}{\Longrightarrow} PQ\cos\theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$ $\quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{\square}{\square} = \frac{\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{Q}}{PQ}$



$P_{OL} = P\cos\theta$ $\quad \& \quad \underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{Q} = PQ\cos\theta = P_{OL} Q$

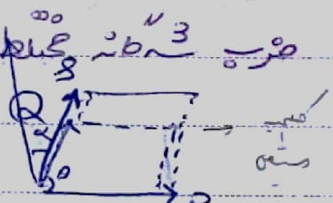
$\frac{\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{Q}}{Q} = P_{OL}$ ← برداریه در راستای Q (OL)

$\underset{\sim}{P} \cdot \underset{\sim}{\lambda} = P_{OL}$ $\quad \underset{\sim}{\lambda} = \cos\theta_x \hat{i} + \cos\theta_y \hat{j} + \cos\theta_z \hat{k}$

$\underset{\sim}{P} = P_x \hat{i} + P_y \hat{j} + P_z \hat{k}$ $\quad P_{OL} = P_x \cos\theta_x + P_y \cos\theta_y + P_z \cos\theta_z$

$\underset{\sim}{S} \cdot (\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q})$ $\quad \underset{\sim}{V}$

ضرب سه‌تایی عجیب برداری: مانند ضرب اسکالر، خروجی یک عدد میشه.



$* \ \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{V} \cdot \underset{\sim}{S}$

$* \ S \cdot V = SV\cos\alpha$ $\quad A = PQ\sin\theta = |\underset{\sim}{P} \times \underset{\s�}{Q}|$

(حاصل‌ضرب آمری را باید بیاد داشت)

$* \ \underset{\sim}{S} \cdot (\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q}) = \underset{\sim}{Q} \cdot (\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{P}) = \underset{\sim}{P} \cdot (\underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{S})$

$= -\underset{\sim}{S} \cdot (\underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{P}) = -\underset{\sim}{Q} \cdot (\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{S}) = -\underset{\sim}{P} \cdot (\underset{\sim}{S} \times \underset{\sim}{Q})$

$* \ (S_x \hat{i} + S_y \hat{j} + S_z \hat{k}) \cdot \{ (P_y Q_z - P_z Q_y) \hat{i} - (P_x Q_z - P_z Q_x) \hat{j} + (P_y Q_x - P_x Q_y) \hat{k} \}$

$\Rightarrow \underset{\sim}{S} \cdot (\underset{\sim}{P} \times \underset{\sim}{Q}) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_y Q_x - P_x Q_y)$

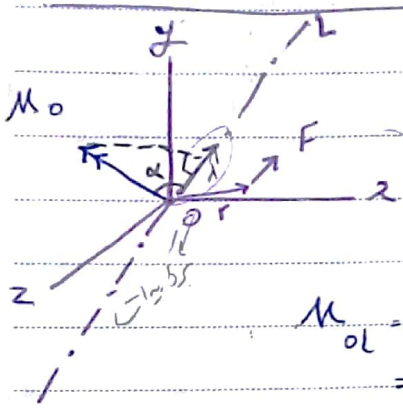
Subject:
Date

$\underset{\sim}{P}\cdot\underset{\sim}{Q} = P\,Q\cos\alpha$

$\underset{\sim}{\lambda}\cdot\underset{\sim}{Q} = (1)\,Q\cos\alpha = Q\cos\alpha$

$$\underset{\sim}{S}\cdot(\underset{\sim}{P}\times\underset{\sim}{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور مشخص:



بردار گشتاور $\underset{\sim}{M}$

$\underset{\sim}{M_o} = \underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F}$

بردار نیرو — بردار مکان

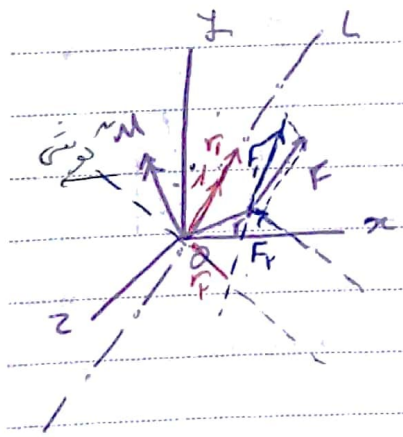
$M_{oL} = M_o\cos\alpha$ — زاویه محصور — بردار دلخواه نشان‌دهنده محور

$= |\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F}|\cos\alpha$

$M_{oL} = \underset{\sim}{\lambda}\cdot(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F}) = (\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F})\cos\alpha$

بردار یکه در راستای oL

$$M_{oL} = \underset{\sim}{\lambda}\cdot\underset{\sim}{M_o} = \underset{\sim}{\lambda}\cdot(\underset{\sim}{r}\times\underset{\sim}{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



① موازی با محور ⟸ گشتاور وارد از آن نیرو حول محور داده شده

② متقاطع با محور — صفر خواهد بود.

$$\begin{aligned} M_{oL} &= \lambda\cdot(r\times F) \\ &= \lambda\cdot((r_1+r_2)\times(F_1+F_2)) \\ &= \lambda\cdot(r_1\times F_1 + r_1\times F_2 + r_2\times F_2 + r_2\times F_1) \\ &= \lambda\cdot(r_2\times F_2) \end{aligned}$$

★ گشتاور $\underset{\sim}{M_{oL}}$ نیروی F حول محور oL تمایل نیروی F برای ایجاد چرخش در جسم حول محور ثابت oL را نشان می‌دهد.

Subject:
Date

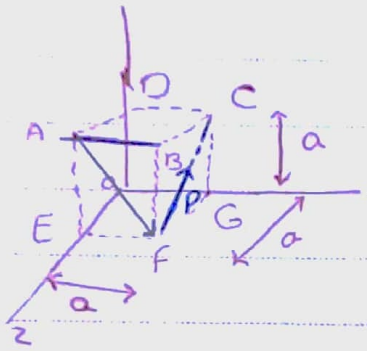
$$\begin{cases} M_x = yF_z - zF_y \\ M_y = zF_x - xF_z \\ M_z = xF_y - yF_x \end{cases}$$

$\underset{\sim}{M}_x$ گشتاور نیروی F حول محور x

$\underset{\sim}{M}_y$ گشتاور نیروی F حول محور y

$\underset{\sim}{M}_z$ گشتاور نیروی F حول محور z

مثال: ملقی به ضلع a تحت نیروی P مطابق شکل قرار گرفته است. گشتاور نیروی P را الف) حول نقطه A ب) حول لبه‌ی AB، ج) حول قطر AG بدست آورید.



$A\begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix}$ $F\begin{vmatrix} a \\ 0 \\ a \end{vmatrix}$ $C\begin{vmatrix} a \\ a \\ 0 \end{vmatrix}$

الف) $\underset{\sim}{M}_A = \underset{\sim}{r}_{F/A} \times \underset{\sim}{P}$ ← راستای نیروی P ∥ راستای خط F_C

$\underset{\sim}{M}_A = \underset{\sim}{r}_{F/A} \times P\,\underset{\sim}{\lambda}_{F_C}$ ← $\underset{\sim}{\lambda}_{F_C} = \dfrac{\underset{\sim}{r}_{C/F}}{r_{C/F}}$

$= (a\hat{i} - a\hat{j}) \times P\,\dfrac{(a\hat{j} - a\hat{k})}{a\sqrt{2}}$

$\underset{\sim}{r}_{C/F} = (x_C - x_F)\hat{i} + (y_C - y_F)\hat{j} + (z_C - z_F)\hat{k}$

$|r_{C/F}| = \sqrt{0^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

$\dfrac{1}{a\sqrt{2}}\left(Pa^2\hat{k} + Pa^2\hat{j} + Pa^2\hat{i}\right)$

$= \dfrac{Pa}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ ← $\underset{\sim}{M}_1$

ب) بردار یکه در راستای لبه AB ∥ بردار یکه در راستای محور z ← از آنجا محور z و لبه AB توانایی مشترک

$\underset{\sim}{M}_{AB} = \underset{\sim}{\lambda}_{AB} \cdot \underset{\sim}{M}_A$

$= \hat{i} \cdot \underset{\sim}{M}_A = \dfrac{Pa}{\sqrt{2}}$

ج) $AG \to A\begin{vmatrix} 0 \\ a \end{vmatrix}$ $G\begin{vmatrix} a \\ \vdots \end{vmatrix}$

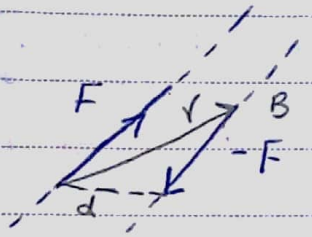
$\underset{\sim}{\lambda}_{AC} = \dfrac{\underset{\sim}{r}_{G/A}}{r_{G/A}} = \dfrac{(x_G - x_A)\hat{i} + (y_G - y_A)\hat{j} + (z_G - z_A)\hat{k}}{\sqrt{(x_G - x_A)^2 + (y_G - y_A)^2 + (z_G - z_A)^2}}$

Subject:
Date

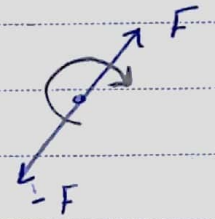
$$\underset{AG}{\lambda} = \frac{a\hat{i} - a\hat{j} - a\hat{k}}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}} = \frac{a(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})$$

$$\underset{AG}{M} = \underset{AG}{\lambda} \cdot \underset{A}{M} = \frac{1}{3}(\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}) \cdot \underset{A}{M} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{Pa}{\sqrt{2}}\right)(1-1-1) = -\frac{Pa}{\sqrt{6}}$$

گشتاور زوج نیرو (moment of couple):



$\equiv$



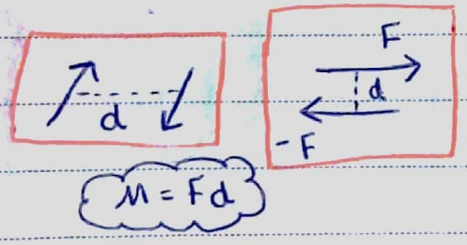
$F, -F$: زوج نیروی

$$M = Fd$$

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{f}$$

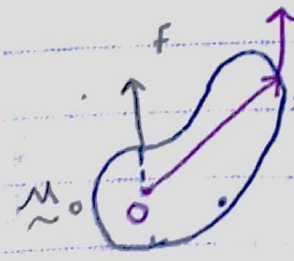
$$|\underset{\sim}{M}| = |\underset{\sim}{r}||\underset{\sim}{F}|\sin\theta$$

$$d = r\sin\theta$$



$$\begin{cases} M_1 = r_1 \times F_1 \\ M_2 = r_2 \times F_2 \\ \vdots \\ M_i = r_i \times F_i \end{cases} \Rightarrow \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2 + \cdots + \underset{\sim}{M}_i$$

جابجایی یک نیرو با یک نیروی دیگر در نقطه O و کوپل ایجاد شده:

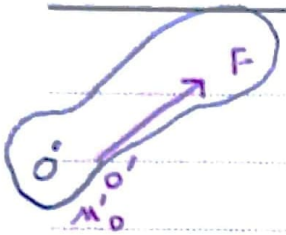


$\underset{\sim}{M}_O$

$$\underset{\sim}{M}_O = \underset{\sim}{r}_O \times F$$

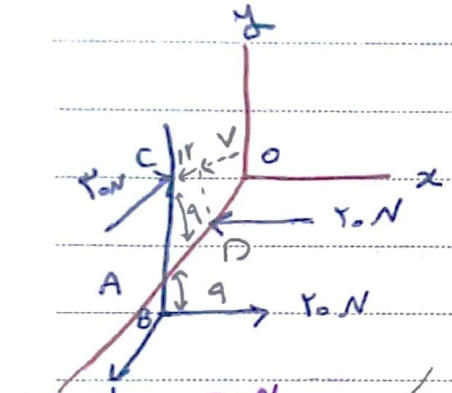
انتقال نیروی F از نقطه A به نقطه O

Subject:
Year. Month. Date. ( )



$$\underset{\sim}{M}'_O = \underset{\sim}{M}_O + \underset{\sim}{r}_{O'} \times \underset{\sim}{F}$$

مثال: مولفه‌های کوپل معادل دو کوپل مثال داده شده در شکل زیر بیابید. با توجه به اینکه کوپل نیروی 20N در صفحه‌ی مشخص قرار گرفته است. اثر نیروی 20N از نقطه B به نقطه A منتقل می‌کنیم تا این کوپل نیرو در صفحه xz قرار گیرد.



r_1 : A به B از
r_2 : B به C از
r_3 : D به A از

$$\underset{\sim}{M}_1 = \underset{\sim}{r}_1 \times \underset{\sim}{F}_1 = -9\,\underset{\sim}{j} \times 20\,\underset{\sim}{i} = 180\,\underset{\sim}{k}\ N.m$$

$$M_2 = 18(30) = 540\ N.m \quad \text{(عدد با استفاده از قانون دست راست)}$$

$$M_2 = -540\,\underset{\sim}{i}\ N.m$$

$$M_3 = 12(20) = 240\ N.m \quad (+ \text{علامت})$$

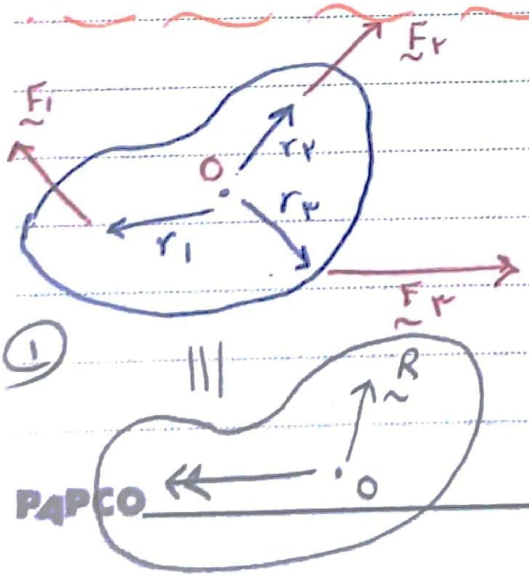
$$M_3 = 240\,\underset{\sim}{j}\ N.m$$

روش دوم

$$M_2 = r_2 \times F_2 \Rightarrow M_2 = (-18\,\underset{\sim}{j})(+30\,k) = -540\,\underset{\sim}{i}$$

$$M_3 = r_3 \times F_3 \Rightarrow M_3 = (-12\,\underset{\sim}{k}) \times (-20\,\underset{\sim}{i}) = 240\,\underset{\sim}{j}\ N.m$$

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2 + \underset{\sim}{M}_3 = 180\,\underset{\sim}{k} - 540\,\underset{\sim}{i} + 240\,\underset{\sim}{j}\ N.m = -540\,\underset{\sim}{i} + 240\,\underset{\sim}{j} + 180\,\underset{\sim}{k}\ N.m$$



$$\underset{\sim}{R} = \sum \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 + \underset{\sim}{F}_3$$

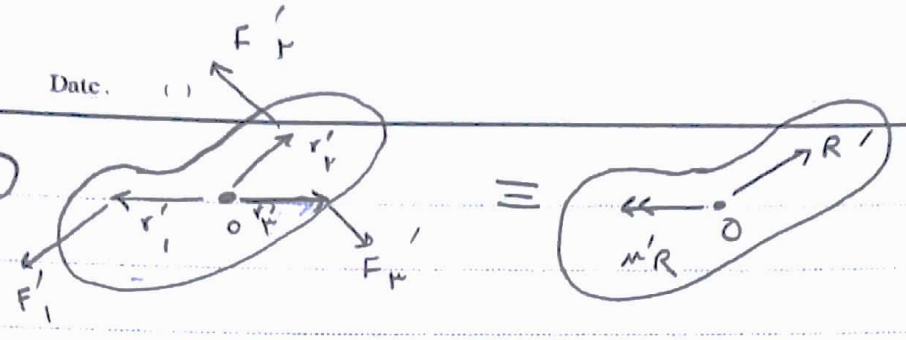
$$\underset{\sim}{M}_R = \sum \underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{M}_1 + \underset{\sim}{M}_2 + \underset{\sim}{M}_3$$

$$= \underset{\sim}{r}_1 \times \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{r}_2 \times \underset{\sim}{F}_2 + \underset{\sim}{r}_3 \times \underset{\sim}{F}_3$$

PAPCO

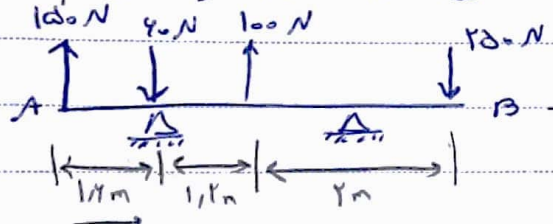
Subject.
Year. Month. Date. ( )

حالت کلی



$$\begin{cases} \underset{\sim}{R}' = \underset{\sim}{R} \\ \underset{\sim}{M}'_R = \underset{\sim}{M}_R \end{cases} \Leftarrow$$ در سیستم ① و ② هم ارز می باشند

مثال: بر یک تیغ با طول ۰٫۸m تحت اثر نیروهایی به شکل داده شده قرار گرفته است این سیستم نیروها را:
الف) به سیستم نیرو-کوپل در نقطه A ب) " " " B ج) به کمترین نیرو تقلیل دهید؟

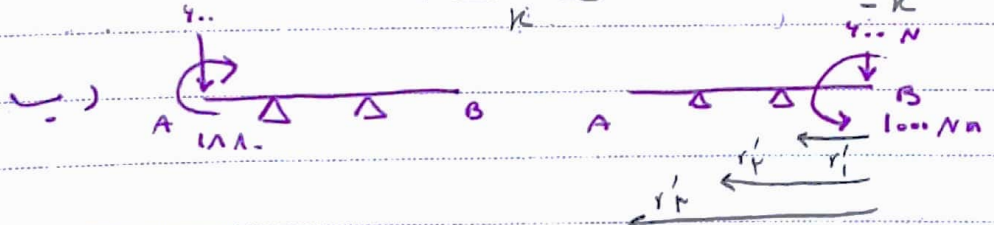


الف)

$$\underset{\sim}{R} = \sum \underset{\sim}{F} = 150\hat{j} - 600\hat{j} + 100\hat{j} - 250\hat{j} = -600\hat{j}$$

$$\underset{\sim}{M}_R = \sum \underset{\sim}{M} = \underbrace{(+1{,}2\hat{i})(-600\hat{j})}_{-k} + \underbrace{(+2{,}8\hat{i})(-100\hat{j})}_{k} + \underbrace{(+4{,}8\hat{i})(-250\hat{j})}_{-k} = -1180\hat{k}\ N.m$$

ب)

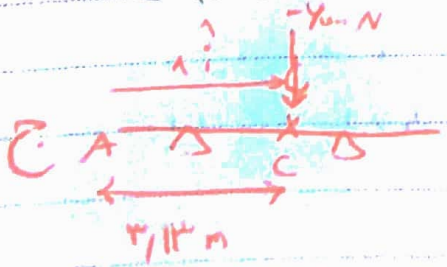


$$\underset{\sim}{R}' = \sum \underset{\sim}{F} = -250\hat{j} + 100\hat{j} - 600\hat{j} + 150\hat{j} = -600\hat{j}\ N$$

$$\underset{\sim}{M}'_R = \sum \underset{\sim}{M} = \underbrace{(-2\hat{i}) \times (100\hat{j})}_{-k} + \underbrace{[-3{,}2\hat{i} \times -600\hat{j}]}_{-k} + \underbrace{[-4{,}8\hat{i} \times 150\hat{j}]}_{-k}$$

$$= +1000\hat{k}$$

ج)



$$R = -600\hat{j}\ N$$

$$1180\hat{k} = x\hat{i} \times -600\hat{j} = -600x\hat{k}$$

$$1180 = 600x \qquad x = 3{,}13\ m$$

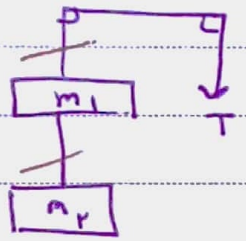
Subject:

Year, Month, Date, ( )

شرط تعادل اجسام صلب

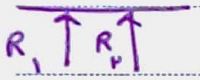
$$\begin{cases} \sum \underset{\sim}{F} = 0 \\ \sum \underset{\sim}{M} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{cases}$$

$$\sum (\underset{\sim}{r} \times \underset{\sim}{f}) = 0$$



دیاگرام جسم آزاد:

نیروهای تکیه گاهی
و
نیروهای وارده از اجسام دیگر
نیروهای درون (نیروهای جسم)



body

2D ⇒

① تکیه گاه roller



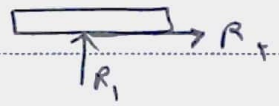
Free body



Unknowns
یک مجهول

② تکیه گاه Pinned یا Simple

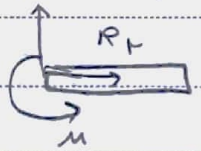




دو مجهول

③ تکیه گاه clamped





سه مجهول

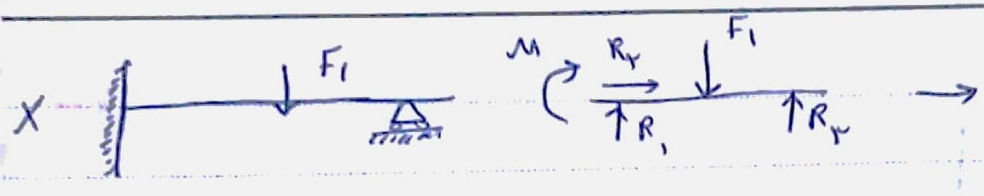
شرط تعادل اجسام صلب در صفحه دوبعدی

$$\begin{cases} \sum \underset{\sim}{F} = 0 \\ \sum \underset{\sim}{M} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum M_{@z} = 0 \end{cases} \quad \sum F_y = 0$$

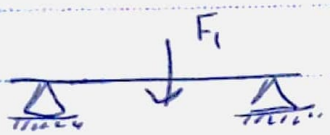
تکیه گاه معین
Deteminate supports

تکیه گاه نامعین
interminate supports

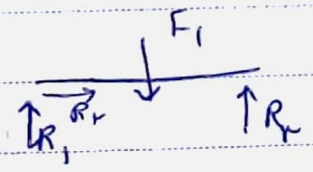
Subject :
Year . Month . Date . ( )



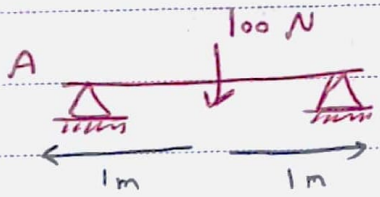
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ R_1 + R_2 + R_3 \neq M \quad \text{و} \quad \text{جواب} \end{cases}$$



FBD:

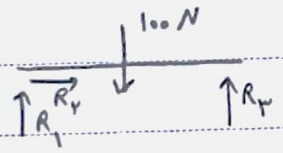


R_1, R_2, R_3 3 مجهول



علی العمل کی کلیدہ ھی حم محاسبہ لنو؟

FBD:

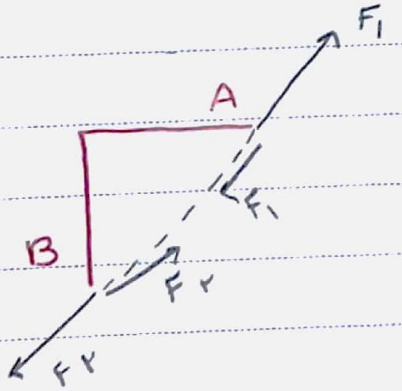


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_2 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_1 + R_3 - 100 = 0 \quad \boxed{R_1 = 50\,N}$$

$$\sum M_z = 0 \quad \text{at } A$$

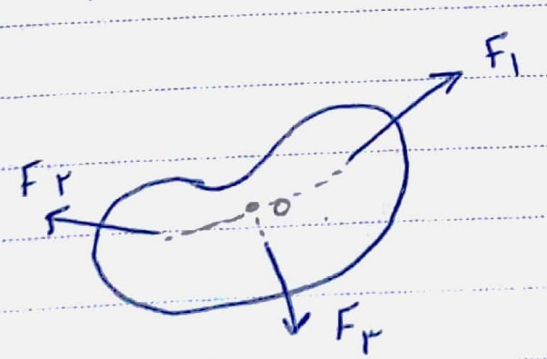
$$(-100)(1) + 2R_3 = 0 \quad \boxed{R_3 = 50\,N}$$



تعادل اجسام دو نیروی: ① خط اثر نیروها یکی باشد

② رابطه تعادل نیروها برقرار باشد

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad F_1 = F_2$$

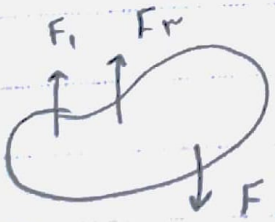


تعادل اجسام سه نیرویی:

① خط اثر نیرو در یک نقطه تلاقی کنند

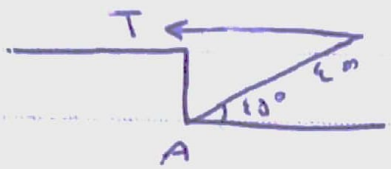
② سه نیرو موازی باشند

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M = 0 \end{cases}$$

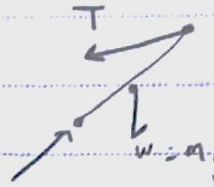


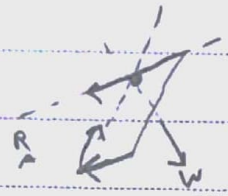
Subject:
Year. Month. Date. ( )

میله‌ی یکنواخت به طول 4m با استفاده از طناب ثابت نگه داشته شده است. نیروی کشش طناب (T) و عکس‌العمل نقطه‌ی A را محاسبه کنید.



FBD

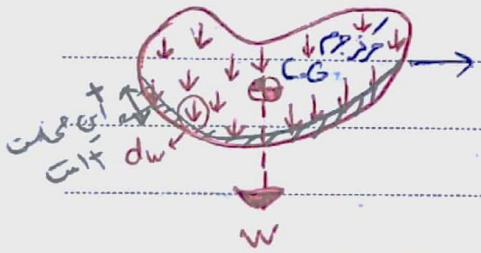




فصل 5: مرکز سطح و مرکز جرم

$R = \sum F = F_1 + F_2 + \dots$

مرکز جرم = مرکز ثقل



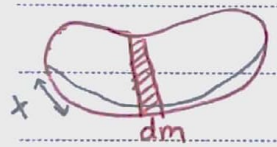
$W = \int_{V,A,L} dw$ (حجمی، سطحی، خطی)

$\begin{cases} \bar{x}W = \int x\,dw \\ \bar{y}W = \int y\,dw \end{cases}$

$W = mg$ (وزن = جرم × شتاب گرانش)

$= \rho V g$ (چگالی × حجم × شتاب گرانش)

$= \rho A t g$ (رابطه 1) (چگالی × مساحت سطح مقطع × ضخامت)



$m = \int_{V,A,L} dm$

$\begin{cases} \bar{x}m = \int x\,dm \\ \bar{y}m = \int y\,dm \end{cases}$

چگالی و ضخامت در انتگرال‌گیری ثابت می‌مانند و مقدار آن‌ها مشتق می‌شود.

$d(\dots) \rightarrow dw = \rho t g\,dA$

$* \quad \bar{x}\,\rho t A g = \int x(\rho t g)\,dA$

مختصات مرکز سطح 2D

$\begin{cases} \bar{x}A = \int_A x\,dA \\ \bar{y}A = \int_A y\,dA \end{cases}$

First moment of area (گشتاور اول سطح)

نتیجه: در مواد همگن مرکز جرم و مرکز سطح بر هم منطبق می‌شوند.

1D $\begin{cases} \bar{x}L = \int_L x\,dL \\ \bar{y}L = \int_L y\,dL \end{cases}$

3D $\begin{cases} \bar{x}V = \int_V x\,dV \\ \bar{y}V = \int_V y\,dV \end{cases}$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

$$Q_x = \int_A x\,dA \qquad \bar{x}A = Q_x \qquad \bar{x} = \frac{Q_x}{A}$$

$$Q_y = \int_A y\,dA \qquad \bar{y}A = Q_y \qquad \bar{y} = \frac{Q_y}{A}$$

اگر شکل متقارن باشد دیگر لزوم آن را نداریم

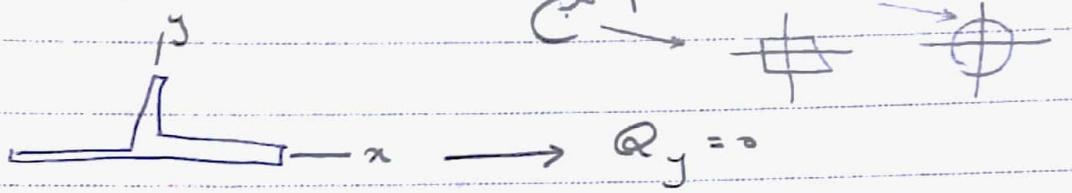
اگر سطح متقارن باشد یا شکل مرکب از سطح متقارن باشد

$Q_x = 0$ ← سطح نسبت به محور x متقارن است

$Q_y = 0$ ← سطح نسبت به محور y متقارن است

کدام سطح‌ها نسبت به محور y و x متقارن است و در نتیجه $Q_x, Q_y = 0$ است

مربع

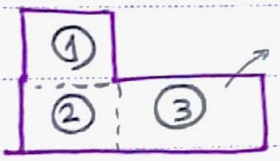


$Q_y = 0$

صفحه ۱۹۳

اجسام کامپوزیت (قاعده جمع آثار)

این مرجع‌ات تشکیل شده



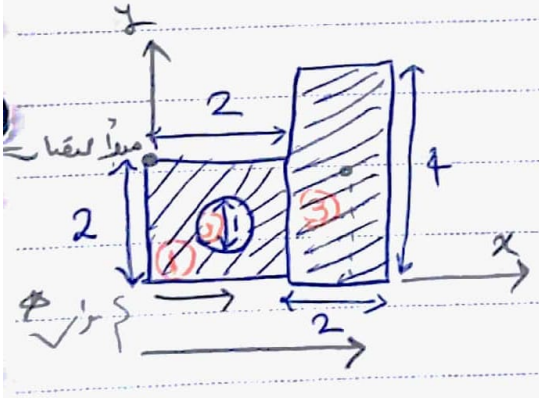
در حالت کلی

$$\bar{x}W = \bar{x}(W_1 + W_2 + W_3 + \dots)$$

$$= \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots$$

$$\bar{y}W = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots$$

مثال: فرض کنید در این مربع یه جایی از داخلش خالی کردیم مختصات مرکز جرم و سطح رو حساب کرده؟ (ماده‌همگن)



$$\bar{x}A_{\text{کل}} = \bar{x}_1 A_1 - \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3$$

اون جاهایی جسم اضافه + جسم کم −

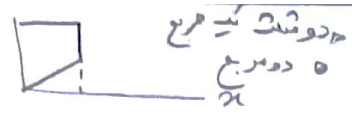
$A_1 = 4 \quad A_2 = -\pi(0.5)^2 \quad / \quad A_3 = 1$

$$A = 4 - \pi(0.5)^2 + A$$

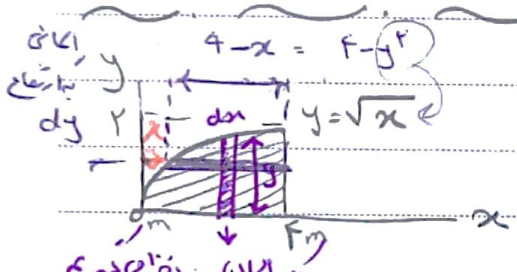
$$\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1$$

$$\bar{x}_3 = 3$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\left(4 - \pi(0.5)^2 + 24\right) = \checkmark$$



$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 1 \\ \bar{y}_3 = 2 \end{cases} \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\left(\bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3\right) = \checkmark$$



بردین : اول هندسی که مرکز هم وجود دارد.

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{A}\int x\,dA \\ \bar{y} = \frac{1}{A}\int y\,dA \end{cases} \qquad dA = y\,dx = \sqrt{x}\,dx$$

این مرحله نیاز نداشت

$$A = \int dA = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4 = \frac{16}{3}\,m^2$$

کمان سهمی

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^4 x\sqrt{x}\,dx$$

$$\bar{x} = \frac{3}{16}\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{3}{16}\times\frac{2}{5}\times 32 = \frac{12}{5}\,m$$

$$dA = (4-x)\,dy = (4-y^2)\,dy$$

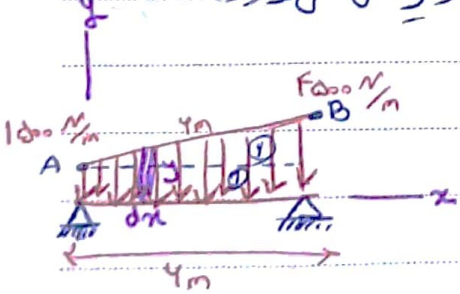
$$\bar{y} = \frac{3}{16}\left(\int_0^2 y(4-y^2)\,dy\right) = \frac{3}{16}\left(2y^2 - \frac{1}{4}y^4\right)_0^2 = \frac{3}{16}(8-4) =$$

$$= \frac{3}{4}\,m$$

$$C = \begin{cases} \bar{x} = \frac{12}{5} \\ \bar{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

یارگرفته : یک تیر ۶ متری مستقل به وسیله‌ی یک بار متمرکز جابجایی کرد اندازه‌ی این بار است

یک نیرو معادل مساحت زیر منحنی بار و خط اثر آن از مرکز سطح زیر منحنی می‌گذرد.



طول تیر = 6m

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$A = \int dA = \int y\,dx$$

$$\int_0^4 (500x + 1500)\,dx$$

$$250x^2 + 1500x \Big]_0^4$$

$$= 18000$$

$$R = 18000\,N = \boxed{18\,kN}$$

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{y - 1500}{x - 0} = \frac{4500 - 1500}{4 - 0}$$

$$= 4500 = 500$$

$$y - 1500 = 500x$$

$$y = 500x + 1500$$

تا حدود ۲/۶

superposition $\quad \bar{x}A = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 \quad \bar{x}(18000) = 3(6000) + \frac{4}{6}(\frac{4 \times 3000}{2})$

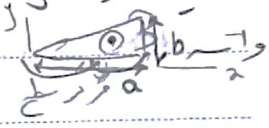
$\Rightarrow \bar{x} = 3/5$

حداقل برای هر یک از محورها باید یک بردار داشته باشیم

ست دینال یک بردار

عمود

$c \begin{cases} \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{4}b \end{cases}$



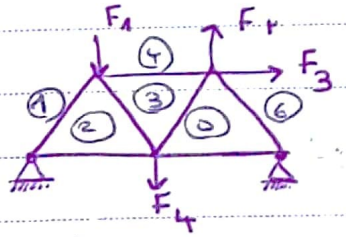
فصل ششم

تحلیل سازه‌ها (خرپا)

خرپا truss: از ضم سازه مختلف ساخته شده است

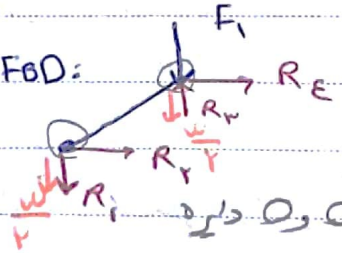
frame قاب

machine ماشین



همیشه در تعادل استاتیکی

① FBD:



نیروی میله را بین دو گره و دایره در خرپا می‌نویسیم

- روش مفصل‌ها:

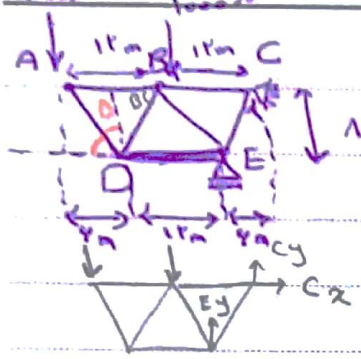
مثال: با استفاده از روش مفصل‌ها نیروی هر یک از اعضای خرپا را نشان داده و محاسبه کنید

Subject.

Year. Month. Date. ( )

$\cos\beta = \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ $\sin\beta = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\sin\theta = \frac{3}{5}$



نیروی خارجی که بر سازه اعمال می‌شود

① FBD of entire truss دیاگرام آزاد کل خرپا

جادار $\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$ $\sum M_z = 0$

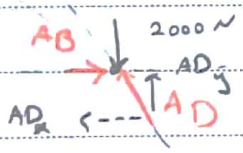
$\sum F_x = 0 \rightarrow C_x = 0$ $\sum F_y = 0 \rightarrow C_y + E_y = 2000 - 1000 = 0$

$\Rightarrow C_y + E_y = 3000\,N$ (i) $\sum M_z = 0$ @ C : $2000(2E) + 1000(12) - 6E_y = 0$

$E_y = 1000\,N$

(i) $C_y = 2000\,N$

② F.BD of joints دیاگرام آزاد مفاصل

Joint A : 

مفصل A صفحه داده باید نیروها تعادل باشد

داشته باشد چون دو نیرو بی است

* در روش مفاصل بعد از جدا کردن هر مفصل از نوشتن روابط تعادل فقط از روابط تعادل نیروی استفاده می‌کنیم چون ممکن است گشتاور همه نیروها صفر خواهد بود

$\sum F_x = 0$ $AD_x = AD\sin\theta = \frac{3}{5}AD$

$AD_y = AD\cos\theta = \frac{4}{5}AD$

$AB - AD_x = 0$

$AB = \frac{3}{5}AD$ (ii)

$\sum F_y = 0$ $AD_y = \frac{4}{5}AD = 2000 \rightarrow AD = 2500\,N$

Subject.
Year. Month. Date. ( )

(ii) $AB = 1500\ N$

joint D :



$\sum F_x = 0 \rightarrow AD_x - DE - BD_x = 0$

$\Rightarrow 1500 - DE - \frac{3}{5} BD = 0$ (iii)

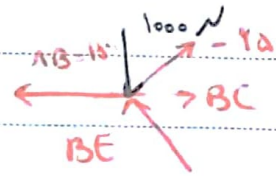
$\sum F_y = 0 \rightarrow -AD_y - BD_y = 0 \quad \frac{4}{5} AD + \frac{4}{5} BD = 0$

$BD = -AD = -2500\ N$

در نتیجه علامت انتخاب شده برای BD اشتباه بوده و باید عوض شود

(iii) $1500 - DE - \frac{3}{5}(-2500) = 0 \rightarrow DE = 3000\ N$

joint B :



$\sum F_x = 0 \rightarrow BC + BD_x - AB - BE_x = 0$

$BC + \frac{3}{5}(-2500) - 1500 - \frac{3}{5} BE = 0$

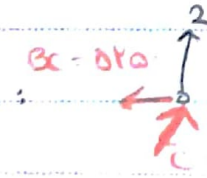
$\rightarrow BC - \frac{3}{5} BE = 3000\ N$ (iv)

$\sum F_y = 0 \rightarrow BE_y + BD_y - 1000 = 0 \rightarrow \frac{4}{5} BE + \frac{4}{5}(-2500) - 1000 = 0$

$\Rightarrow BE = 3750$

(iv) $BC = 5250\ N$

joint C :



$\sum F_x = 0 \rightarrow CE_x - 5250 = 0 \rightarrow \frac{3}{5} CE = 5250$

$CE = 8750$

Subject ..... Date .....

فصل ۷: نیروهای گسترده، ممان اینرسی سطوح

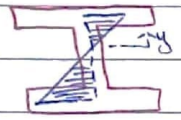
① وزن گسترده در جسم $\frac{W \times m \times A}{R}$

② بار توزیع شده روی تیر

③ ـــــ اینرسی سه بعدی

تشابه اول سطح $\begin{cases} Q_x = \int x\, dA \\ Q_y = \int y\, dA \end{cases}$

تشابه دوم سطح $\begin{cases} I_{yy} = \int x^2\, dA \\ I_{xx} = \int y^2\, dA \end{cases}$ ممان اینرسی

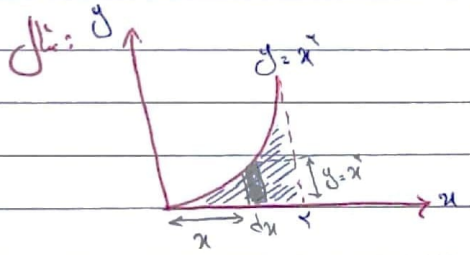


$R = k\int y\, dA$

$dF = ky\, dA$

$\Delta m = ky\, dA \rightarrow M = \int ky^2\, dA = k\int y^2\, dA$

مثال:

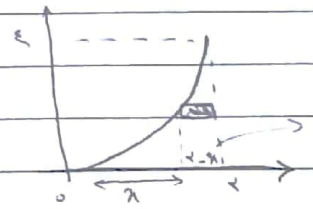


$I_{xx} = ?$

$I_{yy} = ?$

$dA = y\,dx = x^2\,dx$

$I_{yy} = \int_0^2 x^2(x^2\,dx) = \int_0^2 x^4\,dx = \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5}$



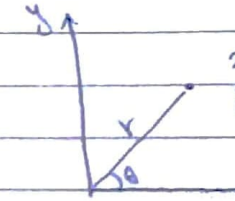
$2 - x = 2 - \sqrt{y}$

$I_{xx} = \int y^2\, dA = \int_0^4 y^2(2-\sqrt{y})\,dy = \int_0^4 (2y^2 - y^{\frac{5}{2}})\,dy$

$= \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\Big]_0^4 = \frac{128}{3} - \frac{2}{7}(2^7) = \frac{128}{21}$

$dA = (2-x)\,dy \Rightarrow (2-\sqrt{y})\,dy$

$I_x + I_y = \int y^2\,dA + \int x^2\,dA = \int (x^2+y^2)\,dA \overset{*}{\Rightarrow} \int (x^2+y^2)\,dA = \int r^2\,dA = I_{\text{قطبی سطح}}$ ①



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$* \quad x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$

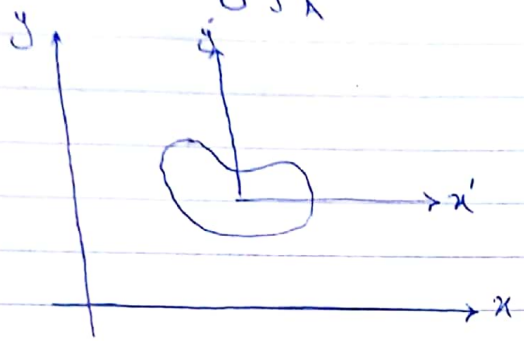
$$J_o = \int r^2\, dA$$

ممان قطبی سطح

Subject Date

شعاع ژیراسیون:
$$\begin{cases} r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \\ r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \end{cases}$$

$$dI_x = y^2 dA \rightarrow I_x = \int y^2 dA \Rightarrow I_x = \int r^2 A$$

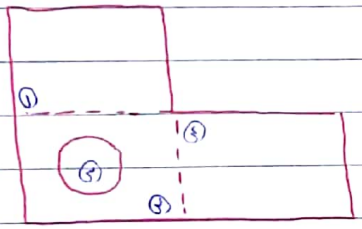


تانون محورهای موازی

$$\begin{cases} I_x = \int (y' + L_y)^2 dA \\ I_y = \int (x' + L_x)^2 dA \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_x = \int y'^2 dA + \int L_y^2 dA = I_{x'} + \int L_y^2 dA = I_{x'} + L_y^2 A \\ I_y = \int x'^2 dA + \int L_x^2 dA = I_{y'} + \int L_x^2 dA = I_{y'} + L_x^2 A \end{cases}$$

($I_{x'}$, $I_{y'}$)

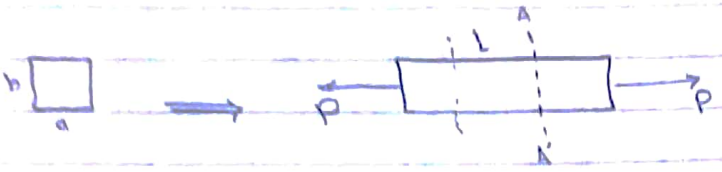


اصل جمع آثار

$$I = I_1 - I_2 - I_3 + I_4$$

Subject Date

فصل ۸ : مفهوم تنش





تنش $\sigma = \frac{P}{A}$



تنش $\sigma = \frac{P}{A}$ $\left(\frac{N}{m^2}\right) = [Pa]$

$\left(\frac{kN}{m^2}\right) = [kPa]$

$\left(\frac{MN}{m^2}\right) = [MPa]$

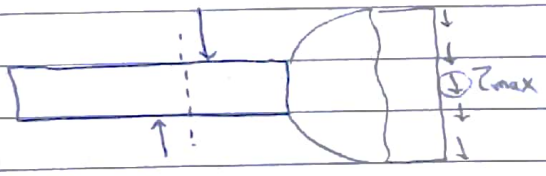
بارگذاری محوری

Axial Loading

تنش نرمال (تنشی که بر سطح مقطع در نظر گرفته شده عمود باشد)

$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ $\sigma = \frac{P}{A}$

$\sigma dA = dF$ if σ is ثابت $F = \sigma \int dA = \sigma A$ $\sigma = \frac{F}{A}$



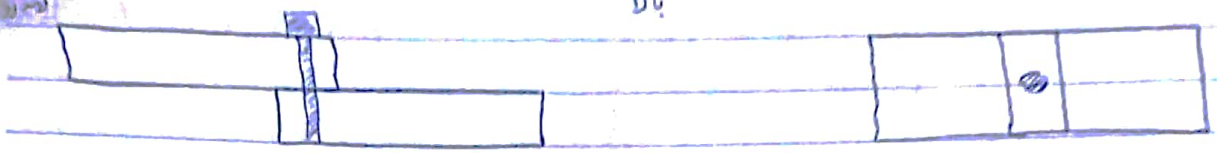
تنش برشی : تنشی که موازی سطح مقطع در نظر گرفته شده باشد)

تنش برشی $\tau_{avg} = \frac{P}{A}$

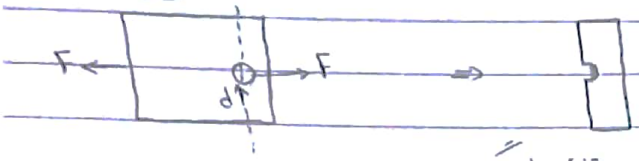
clips.ir

Subject Date

بالا

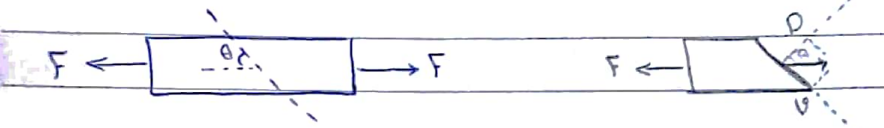


FBD



$\sigma = \frac{F}{A}$ تنش کششی

مقاومت ماده ← قطر میله

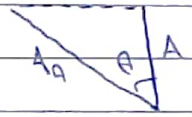


$P = F\cos\theta$

$V = F\sin\theta$

$$\sigma = \frac{P}{A_\theta} = \frac{F\cos\theta}{A}$$

$$\tau = \frac{V}{A_\theta} = \frac{F\sin\theta}{A_\theta} = \frac{F\sin\theta\cos\theta}{A}$$

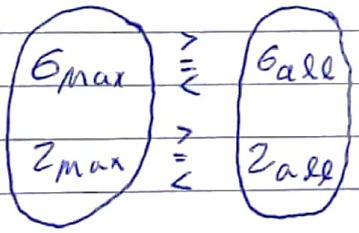


$A = A_\theta \cos\theta \rightarrow A_\theta = \frac{A}{\cos\theta}$

اگر $F.S. < 1$ ← ماده تسلیم شده

اگر $F.S. > 1$ ← ماده ایمن است

$F.S. = \frac{\sigma_{all}}{\sigma_{max}}$



allowable

Factor of safety

ضریب اطمینان

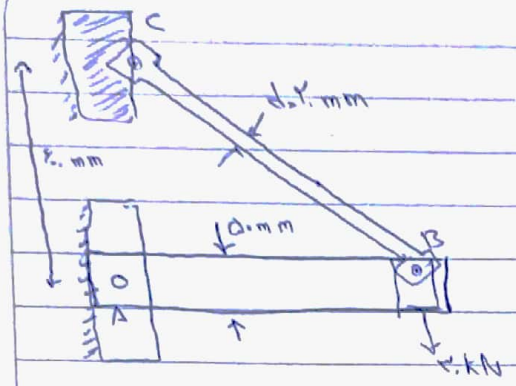
$$(F.S.) \begin{cases} \sigma_{max} \\ \text{یا} \\ \tau_{max} \end{cases} = \begin{cases} \sigma_{all} \\ \tau_{all} \end{cases}$$

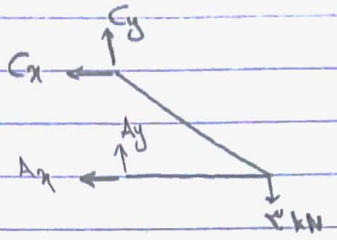
$F.S. > 1$

ص ۳۰۷ کامل خوانده شود مثال

Subject ..... Date .....

مثال ۳۰:

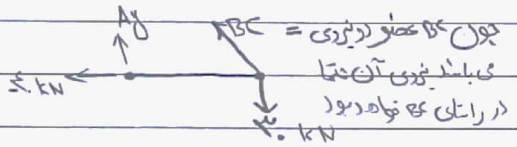




$$\Sigma M_C = 0 \rightarrow -A_x(۲۰۰) - ۳۰(۸۰۰) = 0 \Rightarrow A_x = -۴۰\ kN$$

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow -A_x - C_x = 0 \Rightarrow C_x = -A_x = ۴۰\ kN$$

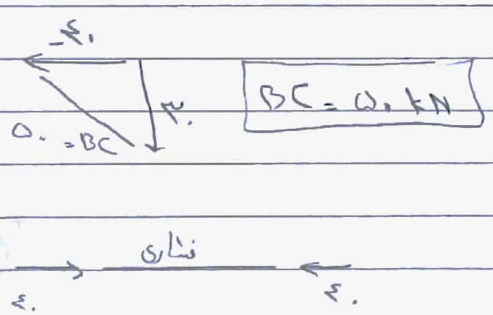
$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + C_y - ۳۰\ kN = 0 \Rightarrow A_y + C_y = ۳۰\ kN \quad (۲)$$

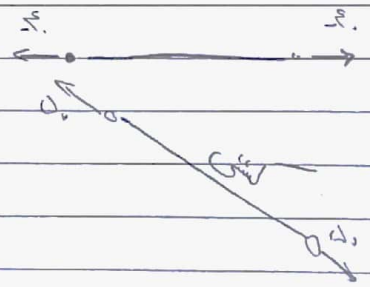


چون BC عضو دوتیزی است
می‌باشد نیروی آن تنها
در راستای BC خواهد بود

$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow -A_y(۸۰۰) = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = 0} \quad (۱)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow C_y = ۳۰\ kN$$





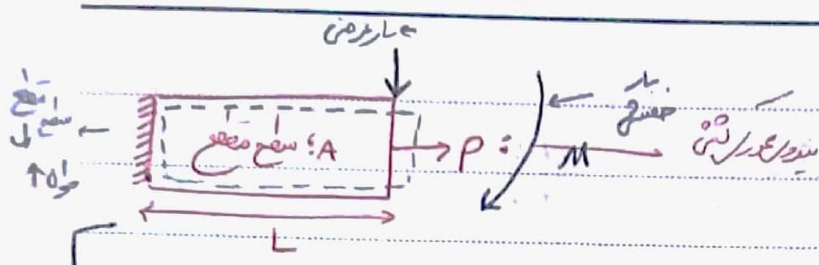
Subject:

Year. Month. Date. ( )

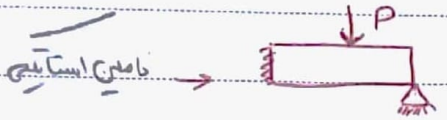
Stress and Axial loading stress

فصل ۹: بارمحوری - تنش و کرنش

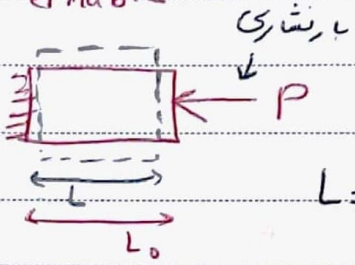
مواد تغییر شکل پذیر هستند



undeformable, rigid bodies → statically indeteminate



deformable



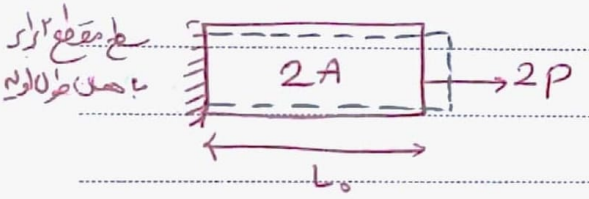
L: طول اولیه

$L+\delta$: طول بعد از بارگذاری

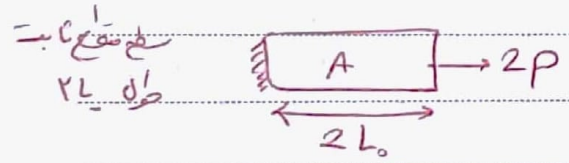
$L_0 + (\delta) = L$ برای کشش علامت + دارد

برای فشاری δ

$L = L_0 + (\delta)$ → علامت منفی دارد

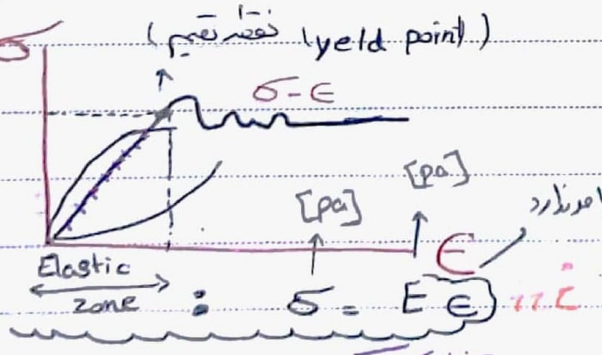


تغییر طول $L_1 = L_0 + \delta_1$ $\quad \delta_1 = \delta$



(۲۲) تنش: $\sigma = \frac{P}{A}$ (سطح)

(۲۳) کرنش: $\epsilon = \frac{\delta}{L_0}$ $\left[\frac{m}{m}\right]$ بدون بعد



قانون هوک

Hook's Law

(مقدار E فقط به جنس ماده بستگی دارد.)

این رابطه را در کنکور به خاطر بسپارید

← شیب نمودار شود مدول یانگ

تنش ← قانون هوک ← کرنش

Hook's Law

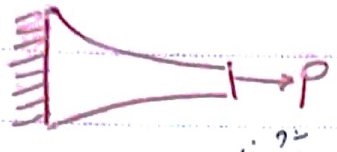
P4PCO

Subject:
Year. Month. Date.

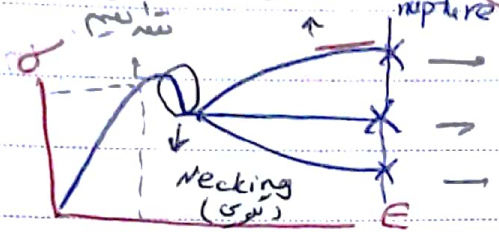
جسم موقتی تعادل نداره در شتاب داشته باشد
حرکت آهسته هم شرط تعادل داره ← وقتی شتاب نداره

در جامدی که سطح مقطع ثابت است ←

$$\epsilon = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta \delta}{\Delta L} = \frac{d\delta}{dx}$$

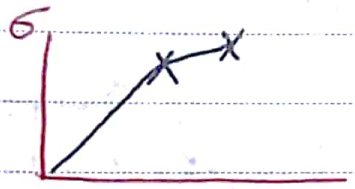


تنش ←



رفتار نرم شونده — ideal plastic — softening

نرم Ductile



مواد ترد (brittle) ← بدون تغییر شکل پلاستیک

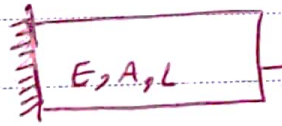
جسم را می‌کشند وقتی به تنش رسید ماده از هم جدا می‌شود.

* مواد ترد نقطه تسلیم (روی نمودار) ندارند.

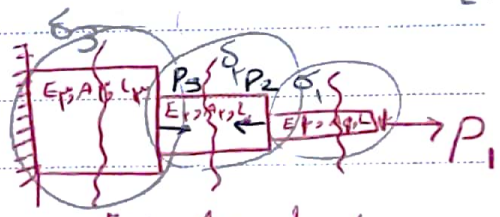
$$\frac{P}{A} = E\epsilon \xrightarrow{\epsilon} \frac{P}{A} = \frac{E\delta}{L_0} \rightarrow \delta = \frac{PL}{EA}$$

[N] [N] [m] [Pa] [m²]

$\frac{N}{m^2} \times m^2 = m$



نیروی پلاستیک



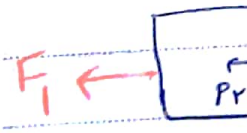
E_i, A_i, L_i ← i ام

۳ رابطه مرتبط سری دارند جمع می‌شوند

$\delta = \sum_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$ ← اگر نیرو پلاستیک P بیرون کشیدن بدهد



$\sum F_x = 0 \rightarrow F = P_1$ ، $\delta = \frac{P_1 L_1}{E_1 A_1}$



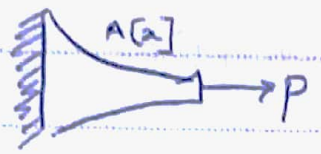
$\sum F_x = 0 \rightarrow F = P_1 - P_2$ ، $\delta_2 = \frac{F_1 L_2}{E_2 A_2} = \frac{(P_1 - P_2) L_2}{E_2 A_2}$

$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$

Subject :

Year . Month . Date . ( )

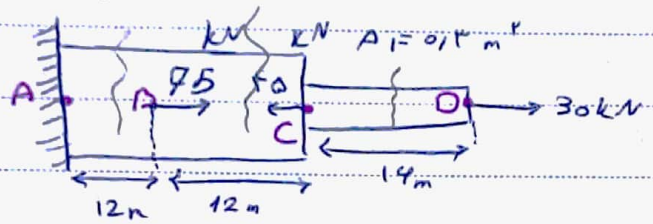
کشش +
فشاری -



$$\delta = \int \frac{P\,dx}{EA}$$

if P, E, A are constants $\quad \frac{P}{EA}\int_0^L dx = \frac{Px}{EA}\Big]_0^L = \frac{PL}{EA}$

$A_2 = 0.9\ m^2$



$E = 29 \times 10^6\ pa$

تغییر طول این شی صلب را بدست آورید

$$\delta = \frac{PL}{EA}$$

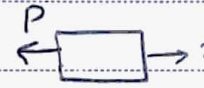
$$\delta_1 = \frac{+30\times10^3 \times 14}{29\times10^6 \times 0.3} = 0.0483\ m$$

P

C-D : طول ثابت، نیروی محوری ثابت

E ثابت، سطح مقطع ثابت A بین نقاط C و D تغییر مقطع

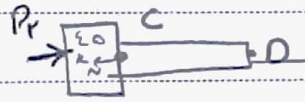
$\sum F_x = 0$



① : $P = 30\ kN$ → کشش T

A-C : نیروی محوری ثابت است ، طول ثابت ، جنس ثابت ، سطح مقطع ثابت

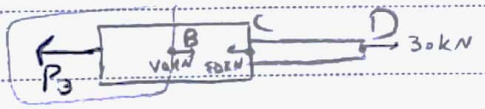
B-C :



$\sum F_x = 0 \rightarrow P_2 = 45 - 30 = 15\ kN$ فشاری

$$\delta_2 = \frac{-15\times10^3 \times 12}{29\times10^6 \times 0.9} = -0.0069$$

A-B :



$\sum F_x = 0 \rightarrow P_3 = 75 - 45 + 30 = 60\ kN$ کشش T

$$\delta_3 = \frac{60\times10^3 \times 12}{29\times10^6 \times 0.9} = 0.0276$$

$$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0.0483 - 0.0069 + 0.0276 = 0.0691\ m$$



① مثل و بعد از تغییر سطح مقطع



② مثل و بعد از تغییر جنس

③ مثل و بعد از تغییر نیروی مقطعی





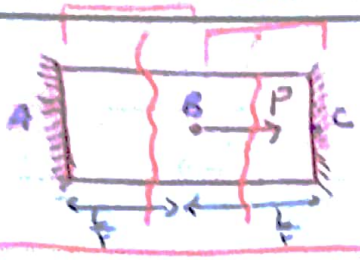
④ مثل و بعد از تغییر تکیه گاه

نیاز به بررسی دارند

Subject: δ_1 δ_2

Year. Month. Date.

مثال ۲/۱۲ نیروی تکیه‌گاهی را بیابید.





$\sum F_x = 0 \rightarrow F_1 + F_2 = P$

مجهول یک درجه نامعین است

$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 = 0$ شرط سازگاری مسأله

B-C : 

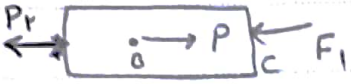
$\sum F_x = 0 \rightarrow P_1 = F_1$

⊖

مقدار برش‌زدن بعد از رسم دیاگرام جسم آزاد انجام می‌شود

$\delta_1 = \frac{PL_1}{E_1 A_1} = \frac{-F_1 L/2}{EA} = \frac{-F_1 L}{2EA}$

⊕ T کشش

A-B : 

$\sum F_x = 0 \quad P_2 = P - F_1$

$\delta_2 = \frac{P_2 L_2}{E_2 A_2} = \frac{(P-F_1)\,L/2}{EA} = \frac{(P-F_1)L}{2EA}$

$\delta_T = \delta_1 + \delta_2 = \frac{-F_1 L}{2EA} + \frac{(P-F_1)L}{2EA} = 0 \quad \frac{L}{2EA}(-F_1 + P - F_1) = 0$

$P - 2F_1 = 0 \quad F_1 = \frac{P}{2} \quad F_2 = P/2$

۴ میله $\rightarrow \frac{L}{2}, \frac{3L}{2}$

$\delta_1 = -\frac{F_1 (3L/2)}{EA} = -\frac{3F_1 L}{4EA}$

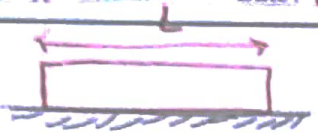
$\delta_2 = \frac{(P-F_1)\,L/2}{EA} = \frac{(P-F_1)L}{4EA}$

$\delta_T = -\frac{3F_1 L}{4EA} + \frac{(P-F_1)L}{4EA} = 0 \rightarrow F_1 = P/4 \quad F_2 = \frac{3P}{4}$

نیروی تکیه‌گاهی نیروی کوچکتر نیروی تکیه‌گاهی بزرگتر

Subject:

Year. 97 Month. 10 Date. 12( )



$T_0 \rightarrow T_1 \qquad L \rightarrow L_1 \qquad L_1 = L + \delta$

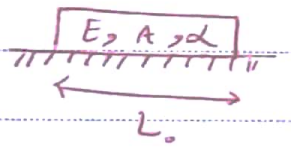
کرنش حرارتی $\epsilon_T = \frac{\delta}{L} = \frac{\alpha L(\Delta T)}{L} = \alpha \Delta T$

تنش حرارتی مقید شده $\sigma = E\epsilon = E\epsilon_T = E\alpha\Delta T$

ایجاد می‌شود در جسم که تمایل به کرنش دارد (در مقابل تغییر طول جسم مقاومتی وجود داشته باشد)

ص 315 حتماً بخوانید مثال حل شده جرم جرم در ایران ۱۰۰٪ میاد.

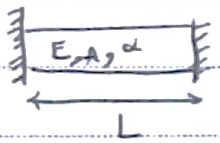
تنش ناشی از حرارت ↑



$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$ → تغییر دما بوجود آمده

ضریب انبساط حرارتی ← α

اولیه جسم ← L_0



→ چون این دیواره‌ها مانع می‌شوند طول جسم افزایش پیدا کند تنشی بوجود می‌آید

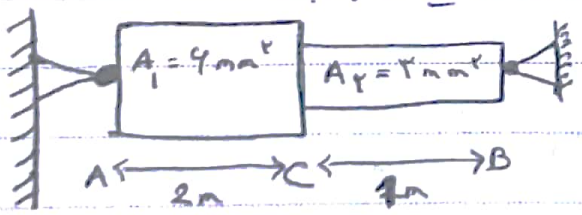
$\frac{\Delta L}{L_0} = \epsilon = \alpha\Delta T \qquad \sigma = E\epsilon \rightarrow \sigma = E\alpha\Delta T$

ΔT ← تغییر دمای حرارتی

مدول الاستیسیته ← E

مثال ص 320 مقادیر تنش هم برای میله‌های AC و CB در میله مثال داده شده بدست

آورید در صورتی که دمای میله از 25°C به 50°C افزایش پیدا کند.



$\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$

$\Delta L = 11.7 \times 10^{-6} (\frac{1}{C}) (1500 - 25)$

$= 0.0173 \times 10^{-3} m = 0.0173 mm$

$E = 200 Gpa$

$\alpha = 11.7 \times 10^{-6} \frac{1}{C}$



جهت نیروهای داخلی ← برای حل مسایل نیازی به بررسی نیروی تقطه‌ای

آنها که خوانده نشده

Subject:

Year. Month. Date. ( )

① P_1 R_1 $P=R_1$ P_2 R_1 $P_2 = R_1$ ← نیروی داخلی ثابت است

$$\delta = \sum \frac{PL}{AE} = \frac{P_1 L_1}{A_1 E_1} + \frac{P_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{-R_1 \times 2}{4\times10^{-4} \times 200\times10^9} + \frac{-R_1 \times 4}{3\times10^{-4} \times 200\times10^9}$$

$\Delta L + \delta = 0$ ← شرط هندسی مسئله با توجه به تکیه‌گاه

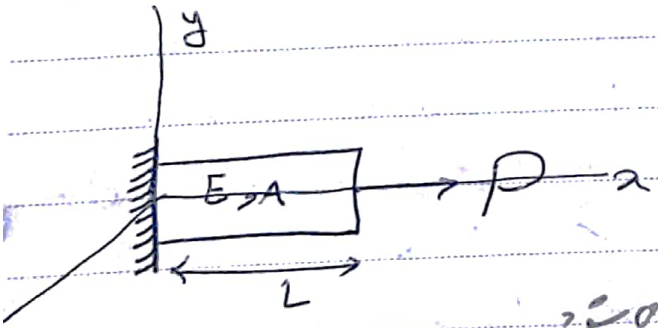
$$4,385\times10^{-3} + \frac{-2R_1}{3\times200\times10^3} = 0 \qquad R_1 = \frac{4,385\times3\times200}{2} \simeq 1316\,N$$

ΔL منبسط شده $+ \rightarrow \delta$ حذف شده $=$ بارگذاری اصلی

$\Delta L + \delta = 0$ ← عبارت تکیه‌گاهی

بارگذاری اصلی = بارگذاری حذف شده + بارگذاری تکیه‌گاهی (یا superposition) ← همیشه این مسائل این‌گونه حل می‌شوند

$$\sigma_{AC} = \frac{1316}{4\times10^{-4}} = 219,3\,Mpa \qquad \sigma_{BC} = \frac{1316}{3\times10^{-4}} = 4385,7\,Mpa$$



ضریب پواسون (Poisson's Ratio):

اگر بارگذاری کشش باشد طول افزایش و سطح مقطع کاهش می‌یابد

اگر فشاری باشد L کاهش و A افزایش سطح مقطع خواهد داشت

$$\sigma_x = \frac{P}{A} \qquad \epsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \qquad \sigma_x = E\epsilon_x$$

ضریب پواسون: $\nu = -\frac{\text{کرنش جانبی}}{\text{کرنش طولی}} = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = -\frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$

$\nu > 0$ ← همیشه مثبت

* کرنش جانبی ϵ_y و ϵ_z در مخالفت علامت کرنش محوری هم باشند.

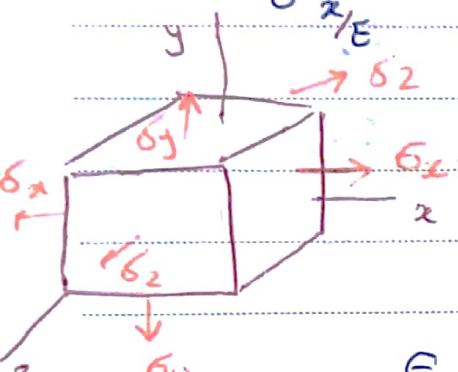
P4PCO

* اگر بارگذاری محوری تک محوری باشد ϵ_y و ϵ_z برابر هستند
و اگر تک محوری نباشد فرق می‌کند

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\nu = \frac{-\epsilon_y}{\sigma_x/E} \Rightarrow \boxed{\epsilon_y = \frac{-\nu \sigma_x}{E}} \qquad \boxed{E_z = \frac{-\nu \sigma_x}{E}}$$

تک محور 2



** با استفاده از super position قانون هوک تعمیم یافته 2

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

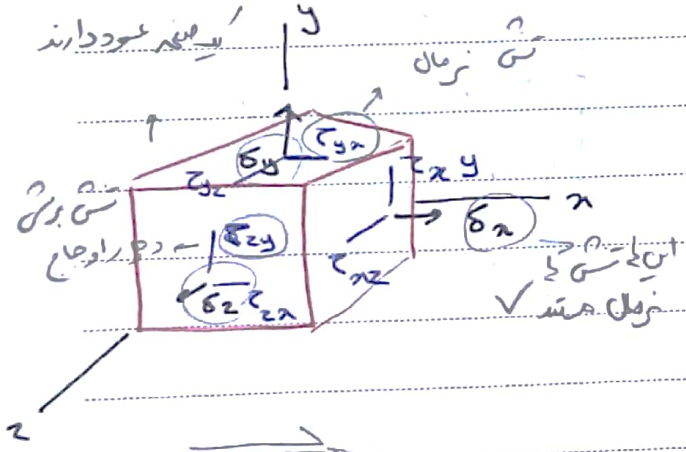
$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right)$$

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right)$$

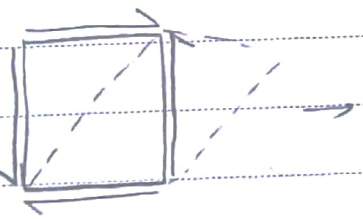
Generalized Hook's Law

* کرنش برشی (shearing strain):
در اینجا کمیت را اثر داده می‌دهیم
بی نقطه تنش نرمال نداریم و کرنش برشی هم
اضافه شده

σ: normal stress → عمود
τ: shearing stress → مماس



تنش نرمال
تنش برشی
دو راه جای
این تنش‌ها
نرمال هستند



دیگر تانسور طول نداریم تانسور داریم

$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad , \quad [\underset{\sim}{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

تانسور تنش — تانسور کرنش

Subject :

Year . Month . Date . ( )

فرض می‌کنیم بار بدست آمده از (مشتق داخلی) :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \end{cases}$$

$$[\underset{\sim}{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{Symm.} & & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$\sigma \to \tau$

$\epsilon \to \gamma$

تنش برشی ←

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G \to \text{مدول برشی}}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G \to}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

جسم ایزوتروپیک (isotropic و Homogeneous) معمولی

مدول برشی

این ۲ رابطه تنش تانسوری * مشتق بین خانه

$$[\underset{\sim}{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = 2\gamma_{xy} \\ \epsilon_{xz} = 2\gamma_{xz} \\ \epsilon_{yz} = 2\gamma_{yz} \end{cases}$$

$$[\underset{\sim}{\sigma}]^* = [\underset{\sim}{E}][\underset{\sim}{\epsilon}]$$

(۹ کمیت و ۶ عدد مخالف تانسور)

E, G, ν → رابطه‌ی آن‌ها

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu$$

جسم ماده همگن ← با ۲ پارامتر مکانیکی به

ماده ایزوتروپیک همگن داشتن ۲ خاصیت

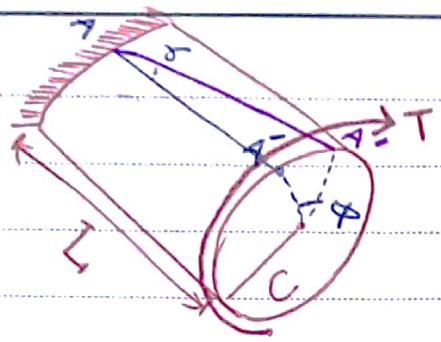
مکانیکی آن کفایت است.

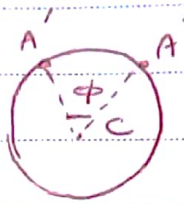
Subject :

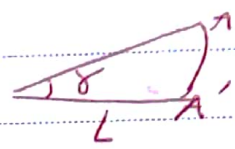
Year . Month . Date . ( )

فصل 10: پیچش (Torsion)

باعث اعوجاج شده است







به عضوی که در حالت پیچش باشد می‌گویند shaft

$$\begin{cases} A'A'' = C\phi \\ A'A'' = L\gamma \end{cases} \Rightarrow C\phi = L\gamma \rightarrow \phi = \frac{L\gamma}{C}$$

(C: شعاع دایره، shaft: طول، ϕ: زاویه پیچش، γ: برشی کرنش)

$$\delta = \frac{PL}{EA} \quad \text{(متقارنند)} \qquad \phi = \frac{TL}{GJ}$$

* $\phi = \frac{TL}{GJ}$ → طول شفت، گشتاور پیچشی، زاویه پیچش، مدول صلبیت برشی

* $[rad] = \frac{[N/m][m]}{[N/m^2][m^4]}$ $\quad \times \frac{180}{\pi} \quad \frac{\pi}{180}$

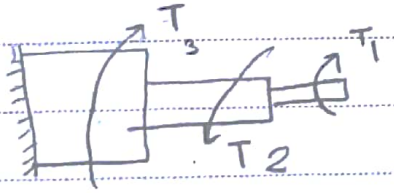
$$\tau = G\gamma \qquad \gamma = \frac{C}{L}\phi = \frac{C}{L}\frac{TL}{GJ}$$

$$= G \times \frac{CT}{GJ} = \frac{C}{J}T$$

$$\gamma = \frac{CT}{GJ}$$

(ثابت برای هر شفت)

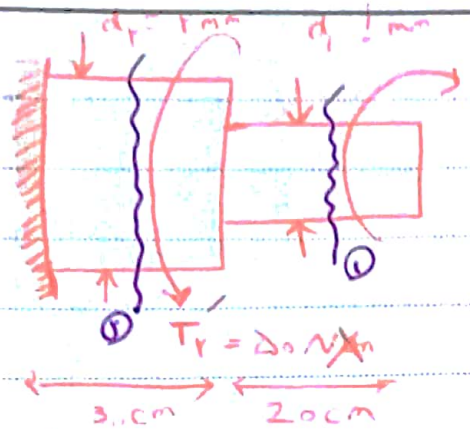
$$\boxed{\tau_{Max} = \frac{C}{J}T}$$



$$\rightarrow \boxed{\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{G_i J_i}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )



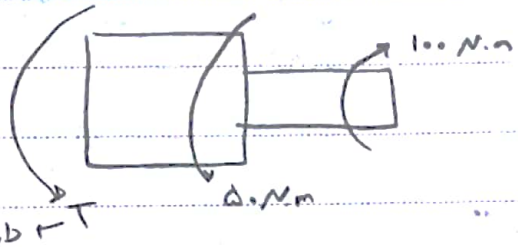
- نامه پرسش‌های زیر را پاسخ دهید؟

مدول برشی مقدار ویسکوزیته متغیر در این جا موجود نیست

$G = 77\ GPa$

از همان ابتدا تمایل برشی حل می‌کنیم

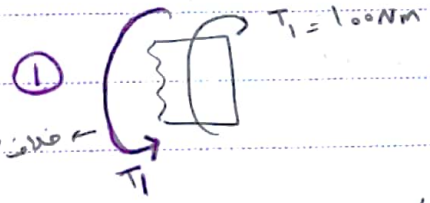
F.B.D.



$\sum M = 0 \rightarrow T + 50 - 100 = 0$

$T = 50\ N.m$

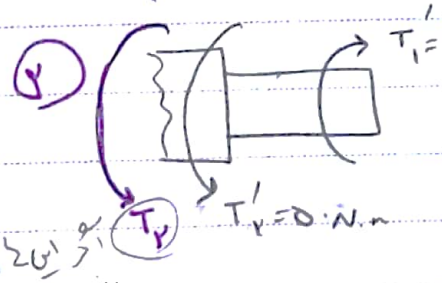
T = طبق مقاومت میله همان گشتاور ۵۰ است



$\sum M = 0 \Rightarrow T_1 - T_1' = 0$

$T_1 = 100\ N.m$

T_1 = خلاف جهت ساعتگرد



$\sum M = 0 \Rightarrow T_2 + T_2' - T_1' = 0$

$T_2 = 50\ N.m$

T_2 = از این دو عدد کمتر است پس جهت را خلاف جهت ساعتگرد اختیار کردیم

$$\phi = \sum \frac{T_i L_i}{G_i J_i} = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} + \frac{T_2 L_2}{G_2 J_2}$$

$$= \frac{100 \times 20 \times 10^{-2}}{77 \times 10^9 \times J_1} + \frac{50 \times 30 \times 10^{-2}}{77 \times 10^9 \times J_2}$$

* $J = \frac{\pi d^4}{32}$ — 2 میلی‌متر قطر دارد / 1 میلی‌متر قطر دارد — d

$$J_1 = \frac{\pi (1 \times 10^{-3})^4}{32}$$

$$J_2 = \frac{\pi (2 \times 10^{-3})^4}{32}$$

جایگذاری کرده و حل می‌کنیم

PAPCO

حوزه تمرین