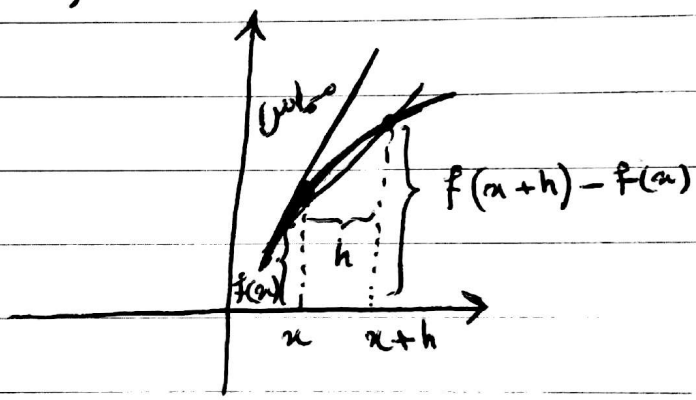
مشتق: فرض کنید F تابعی با ضابطه $y=f(x)$ باشد، مشتق تابع F در نقطه x را با $f'(x)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

اگر حدفوق وجود داشته باشد می گوییم تابع F در نقطهٔ x مشتق پذیر است.

شیب یا ضریب زاویه خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ برابر است با $f'(x_0)$ و بنابراین معادله خط مماس بر منحنی تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ $(x_0, f(x_0))$ به صورت زیری باشد.

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$



مثال) معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $y=x^2$ در نقطه $(1,1)$ را به دست آورید؟

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

معادله خط: $y-y_0 = m(x-x_0) \rightarrow y = m(x-x_0)+y_0$

$$y = 1+2(x-1) \rightarrow y = 1+2x-2 \rightarrow y = 2x-1$$

Scanned by CamScanner

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x)=ax+b$ (a و b اعداد حقیقی) را بدست آورید.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-ax-b}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{ax+ah+b-ax-b}{h}=a$$

مثال) با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع های زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=x^2$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

ب) $f(x)=\frac{1}{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x^2+xh}}{\frac{h}{1}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(x^2+xh)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x^2+h}=-\frac{1}{x^2}$$

ج) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Raz

Scanned by CamScanner

با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع زیر را حساب کنید.

$f(x) = x^n$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1}]}{h}$$

$$= nx^{n-1}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(\underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}\cdot b + a^{n-3}\cdot b^2 + \dots + b^{n-1}}_{\text{جمله } n})$$

مثال: $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

مثال:

$y = x^n \longrightarrow y' = nx^{n-1}$

$y = \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}} \quad (m>n) \rightarrow y' = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1} \rightarrow \frac{n}{m} x^{\frac{n-m}{m}}$

$\Rightarrow x = \frac{n}{\frac{m-n}{m}} = \frac{n}{\sqrt[m]{x^{m-n}}}$ پس: $y = \sqrt[m]{x^n} \rightarrow y' = \frac{n}{\sqrt[m]{x^{m-n}}}$

$\Rightarrow y = \sqrt[7]{x^2} \rightarrow y' = \frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$

قضیه (مجموع، تفاضل)

فرض کنید f و g دو تابع به ترتیب با مشتق های f' و g' باشند در این صورت داریم:

الف) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} +$$

Raz $\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Scanned by CamScanner

ب) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

$$(f-g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f-g)(x+h) - (f-g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - g(x+h) - f(x) + g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) - g'(x)$$

ج) $(cf)'(x) = cf'(x)$ ، c یک عدد حقیقی است.

$$c(f)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c(f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$= c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = (cf)'(x)$$

د) $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to x} \frac{f(h)g(h) - f(x)g(x)}{h - x}$$

$$= \lim_{h\to x} \frac{f(h)g(h) - f(x)g(h) + f(x)g(h) - f(x)g(x)}{h - x}$$

$$= \lim_{h\to x} \frac{(f(h) - f(x))g(h) + f(x)(g(h) - g(x))}{h - x}$$

$$= \lim_{h\to x} \frac{f(h) - f(x)}{h - x} g(h) + f(x) \frac{g(h) - g(x)}{h - x}$$

Raz

Scanned by CamScanner

$$= \lim_{h\to a} \frac{f(h)-f(x)}{h-x} \lim_{h\to a} g(h) + F(x) \lim_{x\to a} \frac{g(h)-g(x)}{h-x}$$

$$= F'(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

$$\delta)\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

مثال) $y = \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + x\right)\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)$

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) + \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + x\right)\left(6x + \frac{1}{x^2}\right)$$

مثال) $y = \frac{x^{-3} + 4x^5}{x^2 + 2\sqrt{x}} \rightarrow y' = \frac{\left(-3x^{-4} + 20x^4\right)\left(x^2 + 2\sqrt{x}\right) - \left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x^{-3} + 4x^5\right)}{\left(x^2 + 2\sqrt{x}\right)^2}$

$$y = f(x) \rightarrow y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x y = D_x f(x)$$

$$f'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

قاعدهٔ زنجیری مشتق:

اگر $y = f(u)$, $u = g(x)$ آنگاه در این صورت داریم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot u'$$

$$y = \sqrt[m]{x^n} \rightarrow y' = \frac{n}{\sqrt[m]{x^{m-n}}}$$

$$y = \sqrt[m]{u^n} \rightarrow y' = \frac{nu'}{\sqrt[m]{u^{m-n}}}$$

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y = u^n \rightarrow y' = nu^{n-1} \cdot u'$$

Raz

Scanned by CamScanner

(ادامه)

① $y = (3x^4 + 2x^2 + 1)^{200}$

$y' = 200(3x^4 + 2x^2 + 1)^{199}(12x^3 + 4x)$

② $y = \sqrt[7]{(\frac{1}{x}) + 3x^{-4} + \sqrt[3]{x})^2}$

$y' = \frac{2(-\frac{1}{x^2} - 12x^{-5} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})}{7\sqrt[7]{(\frac{1}{x} + 3x^{-4} + \sqrt[3]{x})^5}}$

③ $y = \frac{1}{\sqrt[5]{3x^2 + 7x + 1}} \Rightarrow (3x^2 + 7x + 1)^{-\frac{1}{5}}$

$y' = -\frac{1}{5}(3x^2 + 7x + 1)^{-\frac{6}{5}}(6x + 7)$

مشتق توابع مثلثاتی:

$\begin{cases} y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x \\ y = \sin u \longrightarrow y' = u'\cos u \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x \\ y = \cos u \longrightarrow y' = -u'\sin u \end{cases}$

$\begin{cases} y = tgx \longrightarrow y' = 1 + tg^2 x = \sec^2 x \\ y = tgu \longrightarrow y' = u'(1 + tg^2 u) = u'\sec^2 u \end{cases}$

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} y = \cot x \longrightarrow y' = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x \\ y = \cot u \longrightarrow y' = -u'(1+\cot^2 u) = -u'\csc^2 u \end{cases}$$

$\csc u = \frac{1}{\sin u}$

$$\begin{cases} y = \sec x \longrightarrow y' = \sec x \cdot \operatorname{tg} x \\ y = \sec u \longrightarrow y' = u' \sec u \cdot \operatorname{tg} u \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \csc x \longrightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x \\ y = \csc u \longrightarrow y' = -u' \csc u \cdot \cot u \end{cases}$$

① $y = \sin 6x + \cos 7x + \operatorname{tg}(\sqrt{x}) \rightarrow y' = 6\cos 6x - 7\sin 7x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \sec^2(\sqrt{x})$

② $y = \cot(\overbrace{\sin x}^{u}) \rightarrow y' = -\cos x \cdot \csc^2(\sin x)$

③ $y = \sec \sqrt[3]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \sec(\sqrt[3]{x}) \cdot \operatorname{tg}(\sqrt[3]{x})$

④ $y = \csc(x^2 - x) \rightarrow y' = -(2x-1) \cdot \csc^2(x^2-x) \cdot \cot(x^2-x)$

⑤ $y = \sin(\underbrace{\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})}_{u}) \rightarrow y' = \left(\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\right)' \cdot \cos(\cos\frac{1}{\sqrt{x}})$

$\Rightarrow y' = +\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{\sqrt{x}}) \cdot \cos\left(\cos(\frac{1}{\sqrt{x}})\right)$

Scanned by CamScanner

Date: Subject:

$\left(\ln a = \log_e^a\right)$ $e = 2/718$

مشتق توابع نمایی :

$y = a^u \ (a \neq 1, a > 0) \rightarrow y' = u' a^u \cdot \ln a$

$y = e^u \rightarrow y' = u' e^u \cdot \underbrace{\ln e}_{1} = u' e^u$

$y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x \rightarrow y' = e^x$

---

① $y = 2^x \longrightarrow y' = 2^x \cdot \ln 2$

② $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} \longrightarrow y' = (2x+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x} \cdot \ln \frac{1}{3}$

③ $y = e^{\sin x + \cos 5x} \longrightarrow y' = (\cos x - 5\sin 5x) e^{\sin x + \cos 5x}$

④ $y = 5^{\cos x} \longrightarrow y' = -\sin x \, 5^{\cos x} \cdot \ln 5$

مشتق توابع لگاریتمی :

$y = \log_a^u \quad (a \neq 1, a > 0) \rightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$

$y = \ln u \rightarrow y' = \frac{u'}{u}$

① $\log_3 (\sin x + \sqrt{x}) \longrightarrow y' = \frac{\cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sin x + \sqrt{x}) \cdot \ln 3}$

② $y = \ln(\operatorname{tg} x - \sqrt[3]{x^2}) \rightarrow y' = \frac{\sec^2 x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{\operatorname{tg} x - \sqrt[3]{x^2}}$

Raz

Scanned by CamScanner

مشتق معکوس توابع مثلثاتی :

$$\begin{cases} y = \text{Arc Sin}x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y = \text{Arc Sin}u \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Arc Cos}x \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ y = \text{Arc Cos}u \longrightarrow y' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Arc tg}x \longrightarrow y' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y = \text{Arc tg}u \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{1+u^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \text{Arc cot}x \longrightarrow y' = \dfrac{-1}{1+x^2} \\ y = \text{Arc cot}u \longrightarrow y' = \dfrac{-u'}{1+u^2} \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

Date:

① $y = \text{Arc Sin}(\sqrt{x}) \rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$

② $y = \text{Arc tg}(\text{Sin}x) \rightarrow y' = \dfrac{\cos x}{1+(\text{Sin}x)^2}$

③ $y = \text{Sin}^2 x = (\text{Sin}x)^2 \rightarrow y' = 2\text{Sin}x \cdot \cos x = \text{Sin}2x$

④ $y = \text{Sin}^n u = (\text{Sin}u)^n \rightarrow y' = n\text{Sin}^{n-1} u = (u' \cos u)$

⑤ $y = \cos^n u = (\cos u)^n \rightarrow y' = -n\cos^{n-1} u = (-u' \text{Sin}u)$

⑥ $y = \dfrac{\text{Sin}x + \cos x}{\text{Sin}x + \cos x} \rightarrow y' = \dfrac{(\cos x - \text{Sin}x)(\text{Sin}x + \cos x) - (\cos x - \text{Sin}x)(\text{Sin}x + \cos x)}{(\text{Sin}x + \cos x)^2}$

⑦ $y = (x^2+1)\,\text{Arc tg}x \rightarrow y' = 2x\,\text{Arc tg}x + \dfrac{1}{1+x^2}(x^2+1)$

⑧ $y = \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{x} \rightarrow y' = \dfrac{2(1-\sqrt{x})(-\frac{1}{2\sqrt{x}}) \cdot x - (1-\sqrt{x})^2}{x^2}$

⑨ $y = \dfrac{\cos t}{1-\text{Sin}t} \rightarrow y' = \dfrac{-\text{Sin}t(1-\text{Sin}t) + \cos t(\cos t)}{(1-\text{Sin}t)^2}$

⑩ $y = \text{Arc cos}\underbrace{\sqrt{x}}_{u} \rightarrow y' = \dfrac{\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}}$

⑪ $y = \text{Arc tg}\underbrace{(\text{Ln}x)}_{u} + \text{Ln}(\text{Arc tg}x) \rightarrow y' = \dfrac{\frac{1}{x}}{1+(\text{Ln}x)^2} + \dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{\text{Arc tg}x}$

Raz

Scanned by CamScanner

(۱۲) $y = Ln^2 Arctg(\frac{x}{3}) \rightarrow y' = \frac{2(Ln Arctg(\frac{x}{3}))(\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x^2}{9}})}{Arctg(\frac{x}{3})}$

(۱۳) $y = \sqrt{\underbrace{x+\sqrt{\underbrace{x+\sqrt{x}}_{u}}}_{u}} \rightarrow y' = \frac{(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

(۱۴) $y = Ln\underbrace{\cos\underbrace{\sqrt{Arc\sin x}}_{u}}_{u} \rightarrow y' = \frac{(\cos\sqrt{Arc\sin x})'}{(\cos\sqrt{Arc\sin x})}$

$$\rightarrow y' = \frac{-(\sqrt{Arc\sin x})' \cdot \sin\sqrt{Arc\sin x}}{\cos\sqrt{Arc\sin x}}$$

$$\rightarrow y' = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{Arc\sin x}} \cdot \sin\sqrt{Arc\sin x}$$

$$\cos\sqrt{Arc\sin x}$$

مشتق هریک از تابع های زیر را برحسب F' بنویسید.

$y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

(a) $f(3x) \rightarrow 3f'(3x)$ (b) $F(x^2) \rightarrow 2xf'(x^2)$

(c) $F(\pi f(x)) \rightarrow \pi f'(x) \cdot f'(\pi f(x))$

(d) $[F(3-2f(x))]^4 = 4[f(3-2f(x))]^3 \cdot (-2f'(x)) \cdot f'(3-2f(x))$

Scanned by CamScanner

مشتق توابع به فرم $y = u^v$ (توابعی از x و u و v)

$y = x^x$

$\ln y = \ln u^v = v \cdot \ln u$ → $y = e^{\ln x}$

→ $y = e^{v \ln u}$

$\frac{y'}{y} = \left[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right]$

$uv \hookrightarrow \ln y$

$y' = u^v \left[v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right]$

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

① $y = (\sin x)^{(\cos x)}$

x ~ مشتق نسبت ~ $\ln y = \ln(\sin x)^{(\cos x)} = (\cos x) \cdot \ln(\sin x)$

$\frac{y'}{y} = \left[-\sin x \ln(\sin x) + (\cos x) \cdot \frac{\cos x}{\sin x}\right]$

$y' = (\sin x)^{(\cos x)} \left[-\sin x \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$

② $y = (\tan x)^{(x^2 + \sin 2x)}$

$\ln y = \ln(\tan x)^{(x^2 + \sin 2x)} = (x^2 + \sin 2x) \ln(\tan x)$

$\frac{y'}{y} = \left[2x + (2\cos 2x) \ln \tan x + (x^2 + \sin 2x) \sec^2 x\right]$

$y' = \tan x^{(x^2 + \sin 2x)} \left[2x + (2\cos 2x) \ln(\tan x) + (x^2 + \sin 2x) \sec^2\right.$

Scanned by CamScanner

مشتق تابع قدرمطلق :

$$y = |x| = \sqrt{x^2} \rightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases} \rightarrow y' = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{تعریف نشده} \end{cases}$$

$$Sgn(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$\begin{cases} y = |x| \rightarrow y' = \dfrac{x}{|x|} \\ y = |u| \rightarrow y' = \dfrac{uu'}{|u|} \end{cases}$$

مثال $\rightarrow y = |\sin 2x|$

$$y' = \frac{(\sin 2x)(2\cos 2x)}{|\sin 2x|}$$

مشتق مراتب بالا :

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$ مشتق مرتبه دوم

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$ مشتق مرتبه سوم

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$ مشتق مرتبه nام

Scanned by CamScanner

① $y = x^4 + 2 \rightarrow y' = 4x^3 \rightarrow y'' = 12x^2 \rightarrow y''' = 24x$

$y^4 = 24$

$y^5 \dots y^n = 0$

② $y = e^{3x} \rightarrow y' = 3e^{3x} \rightarrow y'' = 3^2 e^{3x} \rightarrow y''' = 3^3 e^{3x}$

$y^n = 3^n e^{3x}$

مشتق توابع پارامتری:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = T$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

مشتق دوم تابع پارامتری زیر را محاسبه نمایید.

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = t^3 - t^2 \end{cases} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 2t}{\cos t} = T$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = \frac{\frac{dT}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{(6t+2)(\cos t) - (-\sin t)\cdot(3t^2+2t)}{(\cos t)^2}}{\cos t}$$

Scanned by CamScanner

Date: Subject:

مشتق توابع ضمنی : اگر $f(x,y)=0$ و y تابعی از x باشد $\frac{dy}{dx}$ یا y' از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود :

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

از تابع f نسبت به x مشتق می‌گیریم و y را ثابت فرض می‌کنیم

از تابع f نسبت به y مشتق می‌گیریم و x را ثابت فرض می‌کنیم

$x^2+y^2-3=0$

$2x+(2y)y'=0 \rightarrow y'=-\frac{x}{y} \longrightarrow 2+(2y')y'+y''(2y)=0$

راه دیگر $\rightarrow y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}$

$y''(2y)=-2-2y'^2$

$y''=\frac{-2-2y'^2}{2y}=\frac{-1-y'^2}{y}$

$x^4y^3+e^{x^2}+y^5+\sqrt{x}y=0$

$f(x)=5 \rightarrow f'(x)=0$

$f(x)=5g(x)$

$f'(x)=5g'(x)$

مثال : $\sin\left(\frac{y}{x}\right)-e^{3x}=\cos(xy) \rightarrow \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'-3e^{3x}$

$=(-\sin(xy))(xy)' \longrightarrow \cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y'x-y}{x^2}\right)-3e^{3x}=(-\sin(xy))(y+y'x)$

$\rightarrow \frac{y'x\cos\left(\frac{y}{x}\right)-y\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}=3e^{3x}-y\sin(xy)-y'x\sin x(xy)$

$y'x\cos\left(\frac{y}{x}\right)-y\cos\left(\frac{y}{x}\right)=3x^2e^{3x}-x^2y\sin(xy)-x^3y'\sin(xy)$

$y'\left(x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x^2\sin(xy)\right)=3x^2e^{3x}-x^2y\sin(xy)+y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$

Raz $y'=\frac{3x^2e^{3x}-x^2y\sin(xy)+y\cos(xy)}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x^3\sin(xy)}$

Scanned by CamScanner

Date:

مشتق مرتبه n ام تابع زیر را محاسبه نمایید.

$$y = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y' = -(1+x)^{-3} \longrightarrow y'' = 2(1+x)^{-3} \longrightarrow y''' = -6(1+x)^{-4}$$

$$y^n = (-1)^n n!(1+x)^{-n-1}$$

مشتق مرتبه دوم تابع زیر را محاسبه کنید.

$$xy + y^2 = 2x \longrightarrow y + y'x + (2y)y' = 2$$

$$y' + y''x + y' + 2(y')^2 + y''(2y) = 0$$

$$y''(x+2y) = -2y' - 2(y')^2 \longrightarrow y'' = \frac{-2y' - 2(y')^2}{(x+2y)}$$

مشتق مرتبه اول و دوم تابع مقابل را محاسبه کنید.

$$x^3 + \cos y = y \sin x$$

$$3x^2 - y'\sin y = y\cos x + y'\sin x \Rightarrow -y'\sin x - y'\sin y = -3x^2 + y\cos x$$

$$\rightarrow -y'(\sin x + \sin y) = -3x^2 + y\cos x \Rightarrow y' = \frac{-3x^2 + y\cos x}{-(\sin x + \sin y)}$$

$$3x^2 - y'\sin y - y\cos x - y'\sin x = 0 \longrightarrow 6x - y''\sin y - y'^2\cos y + y\sin x - y'\cos x - y'\cos x - y''\sin x = 0$$

$$\Rightarrow y''\sin x + y''\sin y = 6x - y'^2\cos y + y\sin x - y'\cos x - y'\cos x$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{6x - y'^2\cos y + y\cos x - y'\cos x - y'\cos x}{\sin x + \sin y}$$

Scanned by CamScanner

مشتق مرتبه اول توابع زیر را حساب کنید.

① $y\cos x = x^4 + x + \tg y$

$-y\sin x + y'\cos x = 4x^3 + \tg y + xy'\sec^2 y$

$\rightarrow y'\cos x - xy'\sec^2 y = 4x^3 + \tg y + y\sin x$

$\rightarrow y' = \dfrac{4x^3 + \tg y + y\sin x}{\cos x - x\sec^2 y}$

② $y = (\sqrt{x})^{\sin 2x}$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sin 2x\,(\sqrt{x})^{\sin 2x - 1}\right) \rightarrow y' = \dfrac{\sin 2x\,(\sqrt{x})^{\sin 2x - 1}}{2\sqrt{x}}$

③ $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - e^{2x} = \sin(xy)$

$\dfrac{y}{x^2}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{xy'}{x^2}\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - 2e^{2x} = y\cos(xy) + xy'\cos(xy)$

$y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - xy'\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - 2x^2e^{2x} = x^2y\cos(xy)$

$y' = \dfrac{-y\sin\left(\frac{y}{x}\right) + 2x^2e^{2x} + x^2y\cos(xy)}{-x^3\cos(xy) - x\sin\left(\frac{y}{x}\right)}$

④ $\begin{cases} x = t^3 + \sqrt{\sin t} \\ y = \cos ht^2 \end{cases} \rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{2t\sin ht^2}{3t^2 + \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}}} = T$

Scanned by CamScanner

Date:

توابع هذلولوی (هایپربولیک - هیپربولیک)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$y = \sinh u \longrightarrow y' = u' \cosh u$$

$$y = \cosh u \longrightarrow y' = u' \sinh u$$

$$y = \tanh u \longrightarrow y' = u' \operatorname{sech}^2 u$$

$$y = \coth u \longrightarrow y' = -u' \operatorname{csch}^2 u$$

$$y = \operatorname{sech} u \longrightarrow y' = -u' \operatorname{sech} u \cdot \tanh u$$

$$y = \operatorname{csch} u \longrightarrow y' = -u' \operatorname{csch} u \cdot \coth u$$

Scanned by CamScanner

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

① $y = \sinh \tg x \rightarrow y' = \sec^2 x \cosh \tg x$

② $y = \cosh \ln x^2 \rightarrow y' = \frac{2x}{x^2} \sinh \ln x^2$

③ $y = \tgh \frac{1}{1+x^2} \rightarrow y = \tgh (1+x^2)^{-1}$

$\rightarrow y' = (-1)(2x)(1+x^2)^{-2} \operatorname{sech}^2 \frac{1}{1+x^2}$

④ $y = \sinh^{-1} x \rightarrow \sinh y = \sinh(\sinh^{-1} x) \rightarrow \sinh y = x$

$\frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \rightarrow e^y - e^{-y} - 2x = 0$

$(e^y)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \rightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1}) \rightarrow y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

⑤ $y = \tgh^{-1} x \rightarrow \tgh y = x \rightarrow \frac{\sinh y}{\cosh y} = x \rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x$

$\rightarrow e^y + xe^{-y} \rightarrow e^y e^{-y} - xe^y - xe^{-y} = 0 \rightarrow (e^y)^2 - 1 - x(e^y)^2 - x = 0$

⑥ $y = \cosh^{-1} x \rightarrow \cosh y = x \rightarrow \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x$

$\rightarrow e^y + e^{-y} - 2x = 0 \rightarrow (e^y)^2 - 2xe^y + 1 = 0$

$\rightarrow e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2-4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2-1} \rightarrow y = \ln(x \pm \sqrt{x^2-1})$

$\rightarrow y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Scanned by CamScanner

قضیه رل: هرگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد و $f(a)=f(b)=0$ باشد آنگاه عددی مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$ باشد.

قضیه مقدار میانگین: هرگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر باشد آنگاه عددی مانند c وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

مثال) نشان دهید که معادله $3x^5+18x-8=0$ دارای یک جواب است؟

$f(x)=3x^5+18x-8$

$f(0)=-8$

$f(1)=13$

واضح است که معادله دارای یک جواب است حال فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو جواب معادله باشند یعنی $f(x_2)=f(x_1)=0$.

* تابع $f(x)=3x^5+18x-8$ بازه $[x_1,x_2]$ پیوسته و روی بازه (x_1,x_2) مشتق پذیر است و $f(x_1)=f(x_2)=0$ بنابراین طبق قضیه رل عددی مانند c وجود دارد به طوری که $f'(c)=0$ اما:

$f'(x)=15x^4+18 \rightarrow f'(c)=15c^4+18$

مثال) ثابت کنید در بازه بسته $[a,b]$ داریم $1-\frac{a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b}{a}-1$

قضیهٔ کوشی: اگر توابع f و g روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازه (a,b) مشتق پذیر و $g'(x) \neq 0$ باشد آن گاه عددی مانند c بین a و b وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{f(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

مثال) اگر $x_1 < x_2$ باشد نشان دهید $(\text{Arctg}\, x_2 - \text{Arctg}\, x_1) < (x_2 - x_1)$

حل: تابع $f(x) = \text{Arctg}\, x$ روی بازهٔ $[x_1, x_2]$ پیوسته و روی بازهٔ (x_1, x_2) مشتق پذیر است بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین عددی مانند $x_1 < c < x_2$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$f(x) = \text{Arctg}\, x \rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow f'(c) = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\frac{\text{Arctg}\, x_2 - \text{Arctg}\, x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1+c^2} \rightarrow (1+c^2) > 1 \rightarrow (+)$$

$\leftarrow x_2 - x_1 > 0$ بین طرفین را در $x_2 - x_1$ ضرب می‌کنیم.

$$(\text{Arctg}\, x_2 - \text{Arctg}\, x_1) < (x_2 - x_1)$$

به کمک قضیهٔ مقدار میانگین ثابت کنید: $\forall x > 0 \rightarrow \text{Ln}(1+x^2) < x$

$$f(x) = \text{Ln}(1+x^2)$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = [0, x]$$

Scanned by CamScanner

ثابت کنید در بازهٔ $[a,b]$ داریم: $1-\frac{a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a}-1$

حل: تابع $f(x)=\ln x$ را در نظر می‌گیریم این تابع روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر است بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین عددی مانند c وجود دارد $a<c<b$ به طوری که:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \rightarrow f(x)=\ln x \rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow f'(c)=\frac{1}{c} \longrightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln b-\ln a}{b-a} = \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

$b-a>0$ طرفین را در $b-a$ ضرب می‌کنیم:

$$(b-a)\cdot\left(\frac{1}{b}\right) < \ln b-\ln a < \frac{1}{a}(b-a)$$

$$1-\frac{b}{a} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b}{a}-1$$

مثال) نشان دهید به ازای $x>0$ و x بین ۰ و ۱ داریم: $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$

حل: $\sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2} \rightarrow 1 \leq x < 0 \quad x>0$

فرض $x>0$ تابع $f(x)=\sqrt{1+x}$ روی بازهٔ $[x,0]$ پیوسته و روی بازه $(x,0)$ مشتق‌پذیر است بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین $x<c<0$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$$

$$f'(x)=\sqrt{1+x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+c}}$$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2\sqrt{1+c}} < \frac{1}{2}$$

$x>0$ سپس طرفین را در $x>0$ ضرب می‌کنیم.

$$\sqrt{1+x}-1 < \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$$

حال فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt{1+x}$ تابع روی بازهٔ $[x,0]$ پیوسته و روی $(x,0)$ مشتق پذیر است بنابراین طبق قضیه مقدار میانگین $x<c<0$ وجود دارد به طوری که:

$$\frac{f(0)-f(x)}{0-x}=f'(c) \rightarrow \frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}=\frac{1}{2\sqrt{c+1}}>\frac{1}{2}$$

$0>-x$ طرفین را در $-x$ ضرب می‌کنیم:

$$1-\sqrt{1+x}>-\frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 1+\frac{x}{2}>\sqrt{1+x} \rightarrow \sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$$

قاعدهٔ هوپیتال: هرگاه توابع f و g روی بازه $[a,b]$ پیوسته و روی بازهٔ (a,b) مشتق پذیر باشند و $f(a)=g(a)=0$ آن‌گاه در صورت وجود $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

وصی $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

مثال) حدزیر را حساب کنید:

$$\text{(1)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-1}{tg^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2tgx(1+tg^2x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{2x[1+tg^2x]} \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2[1+tg^2x]}=\frac{-1}{2}$$

Date: Subject:

(r) $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} \rightarrow y' = (\ln x + x\frac{1}{x})\, e^{x\ln x}$

it is $a = e^{\ln a}$

(س) $y = (\sin x)^{(\cos x)} = e^{\ln \sin x^{\cos x}} = e^{\cos x \ln(\sin x)}$

$y' = \left[(-\sin x)\ln(\sin x) + \cos x \frac{\cos x}{\sin x}\right](\sin x)^{(\cos x)}$

(ن) $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

$e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{-x}$

★ $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\cos x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right)^{H\cdot p}$

$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{1}} = e^0 = 1$

★ $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - 1 + x(e^x)}\right)$

$= \lim \left(\frac{e^x}{e^x + e^x + x}\right) \rightarrow \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{e^x(2+x)}\right) = \frac{1}{2}$

Raz

Scanned by CamScanner

مشتق در نقطه $(-\pi, \frac{1}{2})$ را حساب کنید: $tg(xy)^2 = \frac{2xy}{\pi}$

$x'y = ?$ $\quad tg(xy)^2 - \frac{2xy}{\pi} = 0$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{\text{مشتق تابع نسبت به } y}{\text{مشتق تابع نسبت به } x} = -\frac{2(xy)(x)\left[1+tg^2(xy)^2\right]-\frac{2x}{\pi}}{2(xy)(y)\left[1+tg^2(xy)^2\right]-\frac{2y}{\pi}}$$

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{(\pi,\frac{1}{2})} = \frac{2(-\pi)(\frac{1}{2})(-\pi)\left[1+tg^2(\frac{\pi}{2})^2\right]-\frac{2}{\pi}(-\pi)}{2(-\frac{\pi}{2})(\frac{1}{2})\left[1+tg^2(-\frac{\pi}{2})^2\right]-\frac{2}{\pi}(\frac{1}{2})}$$

حد) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-x^2-2}{\sin^2 x - x^2} \to \lim\left(\frac{e^x-e^{-x}-2x}{2\sin x\cos x - 2x}\right)$ $\quad (\sin 2x)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\cos 2x - 2}\right) = \lim_{x\to}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{-4\sin 2x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{-8\cos 2x}\right)$

$= -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$

مثال) مشتق مرتبه n ام تابع $f(x)=e^{ax}$ را محاسبه کنید.

$f'(x) = ae^{ax} \to F''(x) = a^2e^{ax} \to f''' a^3e^{ax} \to f^{(n)}_{(x)} = a^n e^{ax}$

فرمول لایبنیتز:

$(uv)' = u'v.uv'$

$$(u.v)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}.v^{(k)}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + \dots + \binom{n}{n}uv^{(n)} \to (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}.b^k$$

Scanned by CamScanner

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(uv)^4 = u^4v + 4(u)^3v' + 6(u)^2(v)^2 + 4u'(v)^{(3)} + u(v)^4$

① $(\sin x \cdot e^{6x})^4 \rightarrow (\sin x)' = \cos x \rightarrow (\sin x)'' = -\sin x$

$(\sin x)^3 = -\cos x \rightarrow (\sin x)^4 = \sin x$

② $(e^{6x})' = 6e^{6x} \rightarrow (e^{6x})'' = 6^2 e^{6x} \rightarrow (e^{6x})''' = 6^3 e^{6x}$

$\rightarrow (e^{4x})^4 = 6^4 e^{6x}$

$(\sin x)e^{6x} + 4(-\cos x)6e^{6x} + 6(-\sin x)(6^2 e^{6x}) + 4(\cos x)(6^3 e^{6x}) + \sin x(6^4 e^{6x})$

دیفرانسیل یک تابع: فرض کنید $y = f(x)$ ضابطه تابع f باشد دیفرانسیل تابع f یا dy نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$dy = f'(x)dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)$

دیفرانسیل مراتب بالا:

$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$

$\frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$

$\frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x) \rightarrow d^ny = f^n(x)dx^n$

Scanned by CamScanner

دیفرانسیل تابع روبه رو را حساب کنید.

$$y=\sqrt[7]{(2x+1)(3x^2+2)(4x^3+5)}$$

$$\ln y=\frac{1}{7}\left[\ln(2x+1)+\ln(3x^2+2)+\ln(4x^3+5)\right]$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{7}\left[\frac{1}{2x+1}+\frac{6x}{3x^2+2}+\frac{12x^2}{4x^3+5}\right]$$

$$y'=\frac{1}{7}\sqrt[7]{(2x+1)(3x^2+2)(4x^3+5)}\left[\frac{1}{2x+1}+\frac{6x}{3x^2+2}+\frac{12x^2}{4x^3+5}\right]$$

$$dy=y'dx$$

چند جمله ای تیلور و مکلورن :

فرض کنید $y=f(a)$ باشد :

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$f_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

$$f_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

اگر $f^n(x)$ یک بازهٔ باز شامل $x=a$ وجود داشته باشد در این صورت داریم :

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

$P_n(x)$ را چند جمله ای مرتبه n ام تیلور حول نقطهٔ $x=a$ می نامیم و اگر $a=0$ باشد چند جمله ای را مکلورن می نامیم.

بسط تیلور تابع $f(x)$ به صورت زیر می باشد :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+E_n(x)$$

که $E_n(x)$ را جمله خطا یا باقیماندهٔ تیلور گویند

$$E_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

که s بین a و x قرار دارد

Scanned by CamScanner

Date: Subject:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + En(x)$$

حداکثر عملیات مرتبه دوم تیلور برای تابع $f(x)=\sqrt{x}$ حول نقطه $x=25$ را بدست آورید و $\sqrt{26}$ را تقریب بزنید.

$$f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{-1}{4(x^{\frac{1}{2}})^3}$$

$$P_2(x)=f(25)+f'(25)(x-25)+\frac{f''(25)}{2!}(x-25)^2 \leftarrow (x=25 \to \sqrt{26})$$

$$P_2(x)=5+\frac{1}{10}(x-25)-\frac{1}{1000}(x-25)^2$$

$$f(26)=\sqrt{26} \simeq P_2(26)=5+\frac{100}{1000}-\frac{1}{1000}=5|0.99$$

سپس تابع $f(x)=e^x$ را محاسبه کنید و سپس به کمک آن سپس مکلورن $\cosh x$ را بدست آورید.

$$f'(x)=e^x \quad f'(0)=1$$
$$f''(x)=e^x \quad f''(0)=1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+En(x)$$

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots \longrightarrow \cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots \qquad e^{\frac{1}{x}}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}\frac{1}{x^2}+\cdots$$

Scanned by CamScanner

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + E_n(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + E_n(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$ (انتبه)

$\ln(1+x) = ?$ $\qquad f(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$$

التكامل:

$$\int f(x)\,dx = f(x) + C$$

$$f'(x) = f(x)$$

$$\begin{cases} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq 1) \\ \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \end{cases}$$

① $\int x^1 dx = \frac{x^2}{2} + C$ ⑥ $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$

② $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$ ⑦ $\int x^{\frac{5}{7}} dx = \frac{7}{12} x^{\frac{12}{7}} + C$

③ $\int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$ ⑧ $\int \frac{1}{x^5} dx = \int x^{-5} dx = \frac{x^{-4}}{-4} + C$

⑤ $\int \sqrt[5]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{5}{7} x^{\frac{7}{5}} + C$

Scanned by CamScanner

★ $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

خواص انتگرال:

1- $\int a\,dx = ax + C$ $\xrightarrow{\text{ثابت}}$ $\int 5\,dx = 5x + C$ یا $\int \sqrt{7}\,dx = \sqrt{7}x + C$

2- $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

3- $\int [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx \pm \cdots \pm \int f_n(x)\,dx$

$\xrightarrow{\text{ثابت}} \int \left[4x^5 - 3x^{-2} + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^4} + \sqrt{2}\right] dx \to \frac{4x^6}{6} - \frac{3x^{-1}}{-1} + 7\ln x + \frac{x^{-3}}{-3} + \sqrt{2}x + C$

★ روش تغییر متغیر:

$$\begin{cases} \int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \\ \int \frac{du}{u} = \ln u + C \end{cases}$$

① $\int (x+4)^{200}\,dx = \int u^{200}\,du = \frac{u^{201}}{201} + C$

$u = x+4 \longrightarrow \frac{(x+4)^{201}}{201} + C$

② $\int (3x^5 + e^{4x} + \sin x)^{15} (15x^4 + 4e^{4x} + \cos x)\,dx$

$u = 3x^5 + e^{4x} + \sin x$

$du = (15x^4 + 4e^{4x} + \cos x)\,dx$

$\int u^{15}\,du = \frac{u^{16}}{16} + C = \frac{(3x^5 + e^{4x} + \sin x)^{16}}{16} + C$

Scanned by CamScanner

(۳) $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x+5) + C$

$\begin{cases} x+5 = u \\ dx = du \end{cases}$

(۴) $\int \frac{8x+3}{9x^2+3x+5} dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(4x^2+3x+5) + C$

$u = 4x^2+3x+5$

$du = (8x+3)dx$

(۵) $\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\sqrt{2}} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\sqrt{2}} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{2}) + C$

انتگرال توابع مثلثاتی و نمایی :

(۱) $\int \cos u\, du = \sin u + C$ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

(۲) $\int \sin u\, du = -\cos u + C$ $\int \sin x\, dx = -\cos x\, dx$

(۳) $\int (1+tg^2 u)\, du = \int \sec^2 u\, du = tg u + C$

(۴) $\int (1+\cot^2 u)\, du = \int \csc^2 u\, du = -\cot u + C$

(۵) $\int tg x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + C$

(۶) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln \sin x + C$

Scanned by CamScanner

(٧) $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$

(٨) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$

(٩) $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$

(حل)

1- $\int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

2- $\int \cos\sqrt{2}x\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}x + c$

3- $\int e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}e^{6x} + c$

4- $\int \frac{\sin x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\sin u\,du = 2\int \sin u\,du = -2\cos u + c$

$= -2\cos\sqrt{x} + c$

$\sqrt{x} = u \xrightarrow{\text{تفاضل}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du \xrightarrow{\times 2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2du$

5- $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^u\,du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$

$\sqrt{x} = u$

$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2du$

6- $\frac{1}{2}\int e^{x^2}(2x)\,dx = \int e^u\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int e^u\,du$

$= \frac{1}{2}e^u + c$

$x^2 = u$

(تفاضل) $2x\,dx = du \rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}du$

$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

Scanned by CamScanner

$\star \int e^{\sin x}\cos x\,dx = e^{\sin x}+C \longrightarrow \int e^{\text{عبارت}}(\text{مشتق عبارت})\,dx = e^{\text{عبارت}}+C$

انتگرال جزء به جزء

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

مثال: $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$

$$\begin{cases} \ln x = u \xrightarrow{\text{از طرفین دیفرانسیل (مشتق)}} \frac{1}{x}dx = du \\ dx = dV \xrightarrow{\text{از طرفین انتگرال}} x = V \end{cases}$$

$\star \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

$$\begin{cases} x = u \rightarrow dx = du \\ e^x du = dV \rightarrow e^x = v \end{cases}$$

از روش جدول می‌توان حل کرد $\int$ (چندجمله‌ای / توابع مثلثاتی) dx

(مثال با جدول)

x و مشتقات	e^x و انتگرال‌ها
x	$+$ e^x
1	$-$ e^x
تا به صفر برسیم. 0	

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

Scanned by CamScanner

مثال) $\int (3x^2+5x+6)e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}(3x^2+5x+6)e^{5x} - \frac{(6x+5)}{25}e^{5x} + \frac{6}{125}e^{5x} + C$

مشتقات $3x^2+5x+6$	تکرار انتگرال e^{5x}
$6x+5$	$+ \rightarrow \frac{1}{5}e^{5x}$
6	$- \rightarrow \frac{1}{25}e^{5x}$
0	$+ \rightarrow \frac{1}{125}e^{5x}$

$\int (x^3+2x+4)\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}(x^3+2x+4)\sin 3x + \frac{(3x^2+2)}{9}\cos 3x - \frac{6x}{27}\sin 3x - \frac{6}{81}\cos 3x + C$

مشتقات x^3+2x+4	تکرار انتگرال $\cos 3x$
$3x^2+2$	$+ \rightarrow \frac{1}{3}\sin 3x$
$6x$	$- \rightarrow -\frac{1}{9}\cos 3x$
6	$+ \rightarrow -\frac{1}{27}\sin 3x$
0	$- \rightarrow \frac{1}{81}\cos 3x$

(تمارین)

1) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$ 2) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ 3) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

4) $\int \frac{(\text{Arc tg}\,x)^3}{1+x^2}\,dx$ 5) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ 6) $\int \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,dx$

7) $\int \frac{1}{1+e^x}\,dx$ 8) $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}\,dx$ 9) $\int \frac{\sqrt{1+\text{tg}\,x}}{\cos^2 x}\,dx$

جزء به جزء: 1) $\int e^x \sin x\,dx$ 2) $\int e^x \cos x\,dx$ 3) $\int \sec^3 x\,dx$

Raz

Scanned by CamScanner

$$\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + tg\,x)}{(\sec x + tg\,x)}\,dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot tg\,x}{\sec x + tg\,x}\,dx = Ln\,|\sec x + tg\,x| + C$$

$$\star \int \sec^3 x\,dx = \sec x \cdot tg\,x - \int \sec x \underbrace{tg^2 x}_{(\sec^2 x - 1)}\,dx = \sec x\,tg\,x$$

$$- \int \sec^2 x\,dx + \int \sec x\,dx = 2\int \sec^3 x\,dx = \sec x \cdot tg\,x +$$

$$Ln\,|\sec x + tg\,x| + C \Rightarrow \int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\left[\sec x\,tg\,x + Ln\,|\sec x + tg\,x|\right] + C$$

انتگرال‌های به فرم $\int \sec^m x \cdot tg^n x\,dx$, $\int csc^m x \cdot \cot^m x\,dx$ با استفاده از فرمول‌های $1 + tg^2 x = \sec^2 x$, $1 + \cot^2 x = csc^2 x$ محاسبه می‌شوند.

① $$\int tg^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = tg\,x - x + C$$

② $$\int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot (1 + tg^2 x)\,dx \rightarrow \int \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x \underbrace{tg^2 x}_{u}\,dx = tg\,x + \frac{1}{3}tg^3 x + C$$

Scanned by CamScanner

$$I=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$\begin{cases} e^{ax}=u \longrightarrow ae^{ax}dx=du \\ \cos bx\,dx=dv \longrightarrow \frac{1}{b}\sin bx=v \end{cases}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$\begin{cases} e^{ax}=u \longrightarrow ae^{ax}dx=du \\ \sin bx\,dx=dv \longrightarrow -\frac{1}{b}\cos bx=v \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ادامه}} =\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left[-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}I\right]$$

$$=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}I$$

$$\xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{طرفین را در } b^2 \text{ ضرب}} b^2I=be^{ax}\sin bx+ae^{ax}\cos bx-a^2I$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)I=e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)$$

$$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx+a\cos bx)$$

مثال) $\int \sin(\ln x)dx$

$$\begin{cases} \sin(\ln x)=u \longrightarrow \frac{1}{x}\cos(\ln x)dx=du \\ dx=dv \longrightarrow x=v \end{cases}$$

$$I=\int \sin(\ln x)\,dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx$$

Scanned by CamScanner

۵) $\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx$

$$\begin{cases} \cos(\ln x) = u \longrightarrow -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx = du \\ dx = dv \longrightarrow x = v \end{cases}$$

$$I = x\sin(\ln x) - (x\cos(\ln x) + I) \rightarrow 2I = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

$$I = \frac{1}{2}x\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right)$$

تمارین:

1) $\int tg^{-1}x\,dx$ 2) $\int x\,tg^{-1}x\,dx$ 3) $\int \sin^{-1}x\,dx$

4) $\int \frac{\sin(3\ln x)}{x}\,dx = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x) + C$

$$\begin{cases} u = 3\ln x \\ du = 3\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{3}{x}dx \end{cases}$$

انتگرال های به فرم $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\,dx$: اگر m یا n یکی مثبت باشد با توجه به فرمول های $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$ ، $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$ و اگر توان $\sin$ ، $\cos$ زوج باشند با توجه به فرمول های $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ، $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

مثال: ① $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x \sin^2 x\,dx = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,dx$

$$= \int(\sin x - \sin x\cos^2 x)\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Scanned by CamScanner

(۲) $\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x) \cos^4 x \, dx$

$= \int (\sin x \cos^4 x - \sin x \cdot \cos^6 x) \, dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C$

(۳) $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(۴) $\int \sin^4 x \, dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$= \frac{1}{4}\int (1+\cos^2 2x - 2\cos 2x) \, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

$\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x - \sin 2x\right) + C$

تغییر متغیر به کمک توابع مثلثاتی: ـ انتگرال هایی که شامل $\sqrt{a^2+u^2}$ یا a^2+u^2 می باشند معمولاً با تغییر متغیر $u = a\tan\theta$ قابل حل می باشد.

ـ انتگرال هایی که شامل $\sqrt{a^2-u^2}$ می باشند معمولاً با تغییر متغیر $u = a\sin\theta$ قابل حل می باشد.

ـ انتگرال هایی که شامل $\sqrt{u^2-a^2}$ می باشند معمولاً با تغییر متغیر $u = a\sec\theta$ قابل مشاهده اند.

Scanned by CamScanner

8 بنطلعو

$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} tg^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\frac{u}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = tg^{-1}x + C$$

(لحد

① $$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{2} + C$$

② $$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2} tg^{-1}\frac{u}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} tg^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

③ $$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = tg^{-1}(x+2) + C$$

④ $$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} tg^{-1}u + C$$

$$\begin{cases} x^2 = u \\ 2x\,dx = du \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} tg^{-1}(x^2) + C$$

Scanned by CamScanner

۵) $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = tg^{-1}u + C = tg^{-1}(\sin x) + C$

$\begin{cases} \sin x = u \\ \cos x\,dx = du \end{cases}$

۶) $\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta}{[5-5\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta}{5\sqrt{5}\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\int \sec^2\theta\,d\theta$

$= \frac{1}{5}tg\theta + C = \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}\right) + C$ $\quad \begin{cases} x = \sqrt{5}\sin\theta \\ dx = \sqrt{5}\cos\theta\,d\theta \end{cases}$ $\quad tg\theta = \frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$

۷) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x^2-2x+1)}}$

$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + C$

$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \quad (n>m)$ $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n
$Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه m

$R(x)$ $\left| \frac{Q(x)}{Q(x)} \right.$ و در این صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$

$r(x)$

حل) $\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left((x+3) + \frac{-x-3}{x^2+1} \right) dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{1}{2}Ln(x^2+1) - 3tg^{-1}x + C$

$x^3+3x^2 \mid x^2+1$
$x^3+x \quad\quad x+3$
$3x^2-x$
$3x^2+3$
$-x-3$

Scanned by CamScanner

د) $\int \frac{x}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-1)+1}{2x-1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int\left[\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right)\right]$

تجزئة كسور

$\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$

$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{Ax+3A+Bx-2B}{(x-2)(x+3)}$

$= \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow A=-B \\ 3A-2B=1 \rightarrow 3A-2(-A)=1 \\ 5A=1 \rightarrow \boxed{A=\frac{1}{5}} \end{cases}$

$= \int\left[\frac{\frac{1}{5}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{5}}{x+3}\right]dx = \frac{1}{5}\ln(x-2) - \frac{1}{5}(x+3)+C$

هـ) $\int \frac{dx}{(x-2)^3(x^2+6)^2}$

$\frac{1}{(x-2)^3(x^2+6)^2} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{A_1x+B_1}{(x^2+6)}$

$+ \frac{A_2x+B_2}{(x^2+6)^2} + \dots$

و) $\int \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{2+3x+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)}$

$= \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \quad \begin{cases} A+B=1 \rightarrow B=-1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases} = \int\left[\frac{2}{x} + \frac{-x+3}{x^2+1}\right]dx = 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\tan^{-1}x + C$

Date: Subject:

انتگرال‌های به فرم $\int f(\sin x, \cos x)\,dx$ با تغییر متغیر قابل حل است.

که در این صورت داریم: $tg\frac{x}{2} = t$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

مثال) $$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{1+t^2}{2(1+t)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+t)+C$$

$$= \ln\left(1+tg\frac{x}{2}\right)+C$$

انتگرال‌های به فرم $\int f(x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{p}{q}})\,dx$ را با تغییر متغیر $x = t^k$ که k کوچک‌ترین مخرج مشترک $q, \dots, n$ است حل می‌کنیم.

۱) $\int \frac{d\theta}{1-\sin\theta+\cos\theta}$ ۲) $\int \frac{dx}{2+\cos\theta}$

۳) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}$

$x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{2}}$ داریم:

$x = t^6 \rightarrow t = \sqrt[6]{x}$

$dx = 6t^5\,dt$

$$\downarrow \int \frac{t^3}{t^2+1} \cdot 6t^2\,dt = 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt = 6\int \left[(t^6-t^4+t^2-1)+\frac{1}{t^2+1}\right]dt$$

$$= 6\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+tg^{-1}t\right]+C$$

Raz

Scanned by CamScanner

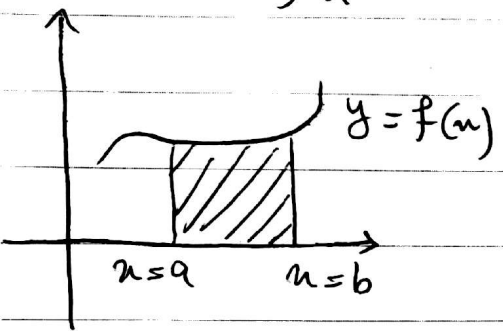
$\int \frac{\sqrt{x}}{4\sqrt{x}+1} \rightarrow x = t^4 \rightarrow dx = 4t^3\,dx$

1) $\int \frac{dx}{9+\sin x}$, 2) $\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}\,dx$, 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ تمارین: ۸

اگر تابع F در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و تابعی مانند $f(x)=f(x)$ باشد داریم:

انتگرال معین:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$



$\star \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

خواص انتگرال معین:

1) $\int_a^b dx = b-a$

2) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

4) $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

تابع فرد باشد $\rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

تابع زوج باشد $\rightarrow f(-x) = f(x)$ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

Scanned by CamScanner

(لیبنیز) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 x\, dx = 0$

مشتق انتگرال:

$\star f(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$

$f'(x) = v'(x) f(v(x)) - u'(x) \cdot f(u(x))$

$\star f(x) = \int_{0}^{v(x)} f(t)\, dt$

$f'(x) = v''(x) f'(v(x))$

$\star f(x) = \int_{0}^{x} \cos t^2\, dt$

$f'(x) = \cos x^2$

مشتق تابع زیر را محاسبه نمایید.

① $G(x) = x^2 \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\, dt$

$G'(x) = 5e^{-(5x)^2} x^2 + 2x \int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\, dt$

② $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x + \sin t\, dt}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H\cdot p}{\Longrightarrow}} \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3}$

مثال: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[F(\frac{1}{n}) + F(\frac{2}{n}) + \cdots + F(\frac{n}{n}) \right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{i}{n})$

$= \int_0^1 f(x)\, dx$

Scanned by CamScanner

مثال) $\lim \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$

← مانند ای چیزی که تقسیمی کنیم x می گذاریم.

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = Ln(1+x)\Big|_0^1 = Ln2$$

↓

صورت = مخرج $\to 0$ مشتق مخرج $\to Ln$(مخرج)

★ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{1}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{1}{1+(\frac{n}{n})^2}\right] =$

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = tg^{-1}x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

★ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right]$

$= \lim \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{2}{n})^2}}+\right.$

$\left.\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{n}{n})^2}}\right] = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = Sin^{-1}\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$

★ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}}}$

$= \lim \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\cdots\right)$

Scanned by CamScanner

انتگرال های ناسره (مجازی) :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$, $\int_{\infty}^{0} f(x)\,dx$, $\int_{-1}^{+1} \frac{1}{x}\,dx$

↳ به ازای 0 در بازهٔ $[-1, 1]$ ناسره است.

$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

انتگرال های همگرا و واگرا : وجود داشته باشد و دارای مقدار اما اگر مقداری نزند واگراست

$$\text{مثال) } \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \ln x \Big|_{1}^{a}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \ln a - \underbrace{\ln 1}_{\text{صفر}} = \infty \quad \text{واگرا}$$

$$\star \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{-1}{x} \Big|_{1}^{a}$$

$$\lim_{a\to\infty} -\frac{1}{a} + 1 = 1 \longrightarrow \int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

$$\star \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \overset{\text{تابع زوج}}{=} 2\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\lim_{a\to\infty} \int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= 2\lim_{a\to\infty} \text{Arc tg } x \Big|_{0}^{a} = 2\lim_{a\to\infty} \text{Arc tg } a = 2\times\frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{همگرا}$$

Scanned by CamScanner

مثال: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ $\xrightarrow{p>1}$ همگرا

$\xrightarrow{p\leq 1}$ واگرا

۱) $0 \leq f(x) \leq g(x) \longrightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ همگرا باشد / همگرا می‌شود

۲) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

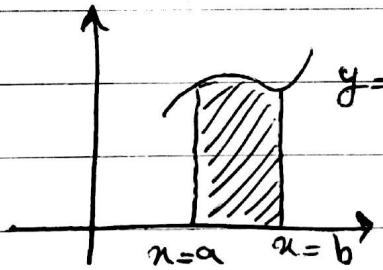
آیا این انتگرال همگراست؟

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \rightarrow 0 < \frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$

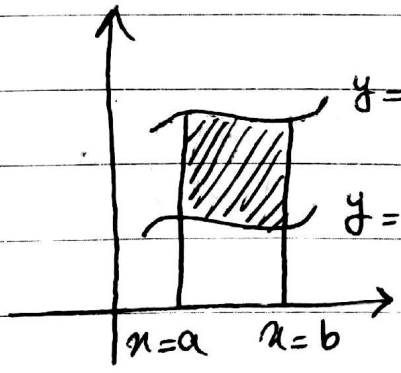
$0 < \int \frac{1}{x^2(1+e^x)}\,dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ همگرا

کاربرد ۸

$A = \int_a^b f(x)\,dx$



$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$



مساحت محصور بین $y=f(x)=e^{3x}$ ، $x=1$ ، $x=2$ را بیابید.

$A = \int_1^2 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\Big|_1^2 = \frac{1}{3}e^6 - \frac{1}{3}e^3$

Scanned by CamScanner

Date: Subject:

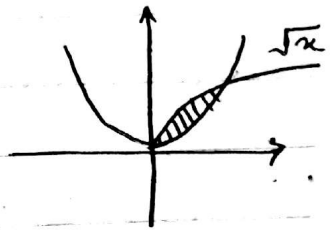
مساحت محصور بین دو نمودار $y=x^2$ ، $y=\sqrt{x}$ را بیابید.

محل تلاقی

$$\sqrt{x}=x^2$$

$$x=x^4$$

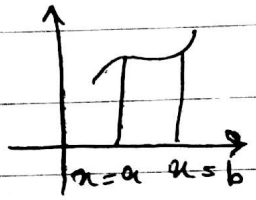
$$x^4-x=0 \longrightarrow x(x^2-1)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$



$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

سطح جانبی و حجم:

$y=f(x)$
$x=a$
$x=b$



حجم $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$y=f(x)$
$x=a$
$x=b$

$$S = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

اگر $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$

طول خمیده $S = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

مثال) محیط دایره $x^2+y^2=a^2$

$x=a\cos t$
$y=a\sin t$

$0 \le t \le 2\pi$ $\quad \frac{dx}{dt}=-a\sin t$ $\quad \frac{dy}{dt}=a\cos t$

طول خمیده $S = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt$

$= a\int_0^{2\pi} dt \rightarrow a(2\pi) = 2\pi a$

Raz

Scanned by CamScanner

۱) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{n^{\frac{3}{2}}}$

۲) ثابت کنید برای $0<a<b<\frac{\pi}{2}$

$$a-b\,tg\,b<\ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)<(a-b)\,tg\,a$$

راهنمایی: $f(x)=\ln(\cos x)$

۳) مساحت بین نمودارهای $y=\sin x$ ، $y=\cos x$ ، $x=0$ ، $x=2\pi$ را بیابید.

Scanned by CamScanner

دنباله و سری :

$f: N \to \mathbb{R}$ $\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$f(n) = a_n$

$\{a_1, a_2, \dots\}$ جملات دنباله

دنباله یک تابع است پس می‌تواند حد داشته باشد اگر یک دنباله حدش عدد شد می‌گن همگراس، اگر L عدد نشد می‌گن واگرا

$\lim_{n \to \infty} a_n = L$ (یک عدد حقیقی)

$\lim_{n \to \infty} \frac{3n+5}{4n-2} = \frac{3}{4}$ همگراست $\left\{\frac{3n+5}{4n-2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

سری : اعضای دنباله را با هم جمع بزنیم. یک سری وقتی همگرا است که حاصل جمع های جزئی آن سری $S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ به S همگرا باشد. در غیر این صورت به آن واگرا می‌گوییم یعنی عدد نشد بی‌نهایت شد

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

دنباله: $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\lim_{n \to \infty} S_n = S$ یعنی: به S همگرا باشد

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$S_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$

$\lim_{n \to \infty} S_n = 1$ سری همگرا به 1

Scanned by CamScanner

قضیه: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

نتیجه: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال: $\sum_{n=1} \frac{5n+1}{2n-3}$ ← $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{2n-3} = \frac{5}{2} \neq 0$

پس سری واگراست.

سری هندسی: $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$

- $|q|<1$ باشد سری $= \frac{q}{1-q}$ همگراست
- $|q|>1$ باشد سری واگراست.

مثال) مقدار سری $\sum_{n=1} \frac{1}{2^n}$ را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

سری همگرا به 1 است.

آزمون انتگرال: اگر یک سری داشته باشیم $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ و یک تابعی مثل $f(n)$ داریم که پیوسته و مثبت و نزولی است و اگر $f(n)=a_n$ قرار دهیم با سری مساوی می شود. اگر انتگرال همگرا باشد سری همگرا و اگر واگرا باشد سری واگراست.

مثال) آیا $\sum_{n=} \frac{1}{1+n^2}$ همگراست؟

$f(n) = \frac{1}{1+n^2}$ پیوسته - مثبت و نزولی است.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

همگراست.

$$= \lim_{a\to\infty} \text{Arc tg } a - \text{Arc tg } 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Raz

Scanned by CamScanner

$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$ — if $p>1$ همگرا — if $p\le 1$ واگرا

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ — if $p>1$ همگرا (سری p) — if $p\le 1$ واگرا

مثال) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگرا

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ واگرا

آزمون مقایسه: $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ $\quad 0 \le a_n \le b_n$

① اگر $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد آنگاه همگراست. a_n

② اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد آنگاه واگراست. b_n

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$ $\quad n^3+2 > n^3$ $\quad \frac{1}{n^3+2} < \frac{1}{n^3}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ همگراست $\rightarrow$ $p=3$ $\quad$ بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$ همگراست.

Scanned by CamScanner

آزمون نسبت: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و اگر $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ و اگر $L<1$ باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست و اگر $L>1$ باشد آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

آزمون ریشه: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و اگر $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

۱) اگر $L<1$ باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

۲) اگر $L>1$ باشد سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال) آیا سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{5n-1}\right)^n$ همگراست؟ (آزمون ریشه)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+5}{5n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+5}{5n-1} = \frac{2}{5} < 1$$

همگراست.

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا می‌گوییم در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشد.

هر سری مطلقاً همگرا، همگراست.

آیا سری زیر همگراست؟ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ همگراست

سری‌های توانی: هر سری به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را یک سری توانی حول نقطه $x=x_0$ می‌نامیم.

$x_0 = 0$

$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

R (شعاع همگرایی سری)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$|x - x_0| < R$

$|x| < R$

شعاع همگرایی سری های زیر را محاسبه کنید.

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$

② $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ $\quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$

$= \frac{1}{\infty} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 0 \to \frac{1}{0} = \infty$

③ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} x^n \to \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}$

$R = 2$ $\quad |x| < 2$

★ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا

نکته طبری $0 < \ln n < n$

$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ واگراست.

آیا سری زیر همگراست؟

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2} \to \left|\frac{1+\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{2}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست در نتیجه $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2}$ همگراست.

Scanned by CamScanner